P2-gruppedannelsen for Mat og MatØk

Diego Ruano

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet
Danmark

1-02-2012

Vejledere

- Bo Hove
  E-mail: bh@thisted-gymnasium.dk
  3 Mat grupper

- Diego Ruano (semesterkoordinator)
  E-mail: diego@math.aau.dk.
  Web page: http://people.math.aau.dk/~diego/
  2 MatØk grupper

- Jan B. Sørensen
  Email: js@aalborgstudenterkursus.dk
  2 MatØk grupper

Bivejledere

- Lone Stub Petersen
  E-mail: lonep@plan.aau.dk
  3 Mat grupper
- Lars Bang Jensen
  E-mail: lbj@learning.aau.dk.
  4 MatØk grupper

P2-projektforslag Kombinatorik: grafteori og optimering

- Kombinatorik≈Diskret matematik: endelige strukturer eller strukturer, der er “næsten endelige”.

- Graf: En graf er i denne sammenhæng en endelig struktur, der består af et antal punkter og forbindelser mellem punkterne. Punkterne tegnes tit som små cirkler. Forbindelserne, der kaldes kanter, tegnes som kurver, der forbinder to punkter.

- Optimering: I kombinatorisk optimering skal vi finde maksimum eller minimum for en funktion $f : S \mapsto \mathbb{R}$, hvor S er en endelig (eller “næsten” endelig) mængde med en bestemt struktur.

Algoritmer

- I optimering vil vi være interesserede i at finde systematisk fremgangmåde til at bestemme en optimal løsning. En sådan fremgangsmåde kaldes en algoritme.
- Antallet af udregninger vil blandt andet afhænge af grafens størrelse. En øvre grænse for antal udregninger kan altså angives som en funktion af antallet af punkter i grafen. Den funktion kaldes algoritmens kompleksitet.
- Hvis en algoritme bygger på "afprøvning af alle muligheder", så vil algoritmens kompleksitet måske være af størrelsesorden 2^n, hvor n er antal punkter i grafen.

Projekterne

- Matematik-økonomi studerende skal vælge et projektemne inden for optimering, som giver mulighed for at se på anvendelser i økonomi.
- Matematik studerende kan enten vælge et projektemne inden for optimering eller et emne som er et teoretisk studie af grafer og deres struktur.

Projektarbejdet skal resultere i udarbejdelsen af en P2-rapport og en P2-procesanalyse. P2-rapporten skal behandle matematiske/matematik-økonomiske aspekter og kontekstuelle aspekter. I vejledes i disse emner af henholdvis hovedvejleder og bivejleder.

Wikipedia og Bogen

Hjælp til projektvælg:

http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory

og

Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, sixth edition, McGraw-Hill 2007

Euler-kredse: ruter gennem alle kanter

- Kan man gå en tur i byen sådan at man passerer over hver af de syv broer præcis én gang?.
- Han oversatte så problemet til et grafteoretisk problem: Kan man finde en rute (en vej) i en graf som går gennem hver kant præcis én gang (Euler kreds og Euler vej)
- Et mere kompliceret problem: find en korteste rute som går gennem hver kant mindst én gang. Problemet studeres som regel i vægtede grafer hvor hver kant har en længde.
- Et postbud skal gå igennem alle gader i sit distrikt mindst én gang. Hvis han vil planlægge ruten så han går kortest muligt, så har han netop det ovenstående problem. Problemet kaldes derfor det kinesiske postbuds problem.

Graffarvning: firefarve problemet

- Firefarve problemet spørger om man kan farve landene i et vilkårligt landkort med fire forskellige farver sådan at to lande, der har en fælles grænse skal have forskellig farve. Lande der ikke grænser op til hinanden må gerne få samme farve.
- Ud fra et landkort kan vi konstruere to grafer, der begge er planare. At de er planare betyder at de kan tegnes i planen uden kanter der krydser hinanden. Den ene af disse grafer har grænserne som kanter og punkterne er de steder hvor tre eller flere lande mødes. Den anden graf har et punkt for hvert land med en kant mellem to punkter hvis de tilsvarende lande har en fælles grænse.
- Problemet: kan punkterne i en vilkårlig planar graf tildeles farver sådan at to punkter, der er forbundet med en kant, har forskellig farve.

Korteste veje

- Dette har en umiddelbar anvendelse i trafikken hvis man skal finde en korteste rute fra punkt A til punkt B. Men der mange andre anvendelser af korteste veje.
- Et af de mest F.eks. indgår problemet i løsningen af visse andre optimeringsproblemer, som f.eks. det kinesiske postbuds problem. I visse anvendelser vil længden af en kant altid være et positivt tal, men i andre anvendelser tillader man negative kant-længder.
- Der findes et stort antal algoritmer til bestemmelse af korteste veje. Hvilken algoritme, der er bedst egnet til en konkret anvendelse afhænger blandt af om der er kanter med negativ længde.

Lineær programmering

- Lineær programmering kan delvis opfattes som et kombinatorisk optimeringsproblem, idet vi ved at maksimum/minimum skal findes i et af de endeligt mange hjørnepunkter.
- Men grunden til at lineær programmering nævnes her er at en del af de optimeringsproblemer, der vedrører grafer, kan formuleres som lineære programmerings-problemer.
- Eksempel: Korteste vej.

Transport i netværk

- Antag vi skal transportere nogle varer fra A til B gennem et netværk. Vægten på en kant skal i dette tilfælde opfattes som en kapacitet af kanten (altså: det største antal varer, der kan kan transporteres gennem denne kant). En sådan transport kaldes en strømning.
- Hvis den maksimale strømning fra A til B har værdi s (Der sendes altså s varer fra A til B.) så kan man bevise at der findes en mængde af kanter hvis samlede kapacitet er s og som opfylder at hvis man fjerner dem fra grafen så er der ikke længere nogen vej fra A til B. Dette resultat kaldes "max-flow-min-cut" sætningen.
- Strømning i netværk er et problem, der kan formuleres som et lineært programmerings problem. Strømning har har også anvendelse i forbindelse med optimale parringer i to-delte grafer (se afsnit 9) og i forbindelse med det kinesiske postbuds problem i orienterede grafer.

Hamilton-kredse og den handelsrejsendes problem

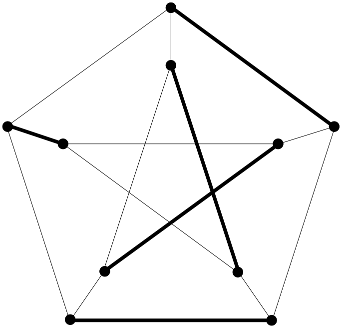
- Hamilton-kreds i en graf er en kreds, der besøger hvert punkt præcis én gang – bortset fra at startpunkt er slutpunkt. Der findes et simpelt kriterium, der afgør om en graf har Euler-kreds. Men det er meget svært at afgøre om en graf har en Hamilton-kreds.
- Antag vi har en vægtet ikke-orienteret graf; helst med en kant mellem hvert par af punkter så vi er sikre på at der mange Hamilton-kredse. Så vil vi gerne finde den korteste Hamilton-kreds i grafen. Dette kaldes den handelsrejsendes problem, idet vi forestiller os en handelsrejsende, der skal besøge et antal byer.
- Der kendes ikke nogen effektiv algoritme til løsning af den handelsrejsendes problem men man kan bevise at den konstruerede Hamiltonkreds er højst 2 eller $\frac{3}{2}$ gange så lang som den optimale. Disse algoritmer bygger på minimum vægt udspændende træer, parringer og Euler-kredse.

Minimum vægt udspændende træer

- Et udspændende træ i en ikke-orienteret graf består af alle grafens punkter og en delmængde af dens kanter, udvalgt sådan at der er veje mellem alle par af punkter, men er ingen kredse. Et træ altså en minimal måde at forbinde punkterne.
- Hvis grafen har n punkter og der er en kant mellem hvert par af punkter, så er der præcis n^{n-2} udspændende træer.
- Et minimum vægt udspændende træ i en vægtet graf er et udspændende træ, hvor summen af vægtene af træets kanter er minimalt. Til trods for at antallet af udspændende træer i en graf kan være meget stort, så findes der faktisk effektive algoritmer, der finder det træ som har mindst vægt.
- Minimum vægt udspændende træer finder anvendelse hvor skal forbinde et antal punkter så billigt som muligt.

Parring

- En parring i en ikke-orienteret graf er en inddeling af punkterne i par af to punkter, som er forbundet med en kant. Hvert punkt er i højst (evt. præcis) ét af disse par.
- I optimering er man tit interesseret i bestemme en parring i en vægtet graf med størst mulig samlet vægt (eller mindst mulig samlet vægt).



Parring

- I mange tilfælde har grafen to typer af punkter og hver kant forbinder to punkter af forskellig type. F.eks.: visse punkter svarer til jobs, der skal udføres og de andre punkter svarer til personer. En kant mellem et job og en person angiver at personen kan udføre dette job.
- Kantens vægt kan være prisen for udførelsen. Man er så interesseret i få alle jobs udført (af forskellige personer) sådan at prisen bliver så lille som muligt.
- Der findes særlige algoritmer, der finder en optimal parring i disse såkaldt to-delte grafer.
- Man er også interesseret i at finde en optimal parring i generelle grafer.

Projekterne

- Matematik-økonomi studerende skal vælge et projektemne inden for optimering, som giver mulighed for at se på anvendelser i økonomi.
- Matematik studerende kan enten vælge et projektemne inden for optimering eller et emne som er et teoretisk studie af grafer og deres struktur.

Projekterne:

- Eulerkredse og det kinesiske postbuds problem
- Hamiltonkredse og den handelsrejsendes problem
- Strømning i netværk
- Farvelægning: firefarve problemet
- Parring
- Udspændende træer