Modelado 3D basado en Imagen y Rango

Javier Finat

28 de octubre de 2022

Índice general

0.1. Introducción al modelado básico

El *modelado ideal de objetos* usa primitivas geométricas (Ecuaciones Algebraicas o Analítica) o funcionales simples (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias o en Derivadas Parciales) para describir *objetos* o, alternativamente, *comportamientos de sistemas*, respectivamente. El marco para las primeras está dado por elementos básicos de GAGA (Geometría Algebraica Geometría Analítica), mientras que para las segundas está dado por Sistemas Dinámicos. Los campos (escalares, vectoriales, co-vectoriales) proporcionan un elemento unificador para aspectos geométricos y radiométricos. Los retos más avanzados están relacionados con la estimación y la incorporaciónd e herramientas AI para reconocimiento y gestión.

En este módulo B_{41} se presta mayor atención a los aspectos geométricos y funcionales. En ejemplos sencillos se presenta un solapamiento de ambos aspectos que responde a la jerarquía natural (Geometría, Cinemática, Dinámica) que se presenta en Mecánica. Un ejemplo básico está dado por el movimiento de un péndulo simple $\ddot{\theta}(t) = - - m\theta(t)$ cuyas soluciones están localmente parametrizadas por arcos de circunferencia cuya cinemática se describe por un campo vectorial con velocidad variable en el espacio de las fases $P = TM$. Este ejemplo ilustra la interacción no sólo entre los enfoques geométrico y funcional, sino entre diferentes áreas de la Mecánica.

Los fundamentos para aspectos computaciones se han desarrollado en el marco de la Geometría Computacional B_{11}. En este marco las primitivas geométricas están dadas por figuras elementales que mediante operaciones aritméticas (lógica Booleana) permiten construir otras PL o PS-figuras más complejas acotadas (polígonos ó poliedros, p.e.) o no (regiones del espacio, p.e.). Las primitivas funcionales están dadas por funciones o ecuaciones diferenciales ordinarias cuyos conjuntos de nivel o soluciones permiten explicar la evolución espacio-temporal de objetos o de escenas.

El *modelado de objetos del mundo real* parte de una simplificación de los fenómenos observables que se obtiene a partir de una abstracción de las "apariencias" de objetos $2D$ ó $3D$ obtenidas por la observación/imitación ó detectadas a partir de la utilización de diferentes tipos de sensores ó dispositivos. Los dispositivos más frecuentes son de imagen (incluyendo video) o de rango (incluyendo infrarrojos y láser 3D); en este módulo no utilizaremos los de tipo acústico (frecuentes en Imágenes Biomédicas, Geología, p.e.) ó de tipo táctil (frecuentes en Robótica, p.e.). Todos ellos proporcionan información dispersa y contaminada por diferentes factores (ruido, distorsiones, p.e.) que es necesario pre-procesar y agrupar en torno a primitivas geométricas o funcionales.

La *conexión entre aspectos discretos y continuos* se lleva a cabo mediante procedimientos de estimación basados en Probabilidad y Estadística. La interrelación entre ambos ha sido un tópico común que ha alcanzado un gran desarrollo en el último tercio del siglo XX en relación con estimación de la forma o de comportamientos a partir de las "apariencias" (datos sobre la parte visible que sean medibles). A la vista de la enorme cantidad de datos proporcionada por los sensores su carácter desordenado y la presencia de "ruido", es necesario desarrollar estrategias de muestreo y de agrupamiento. Una vez realizado el agrupamiento e identificadas las relaciones entre clusters, la gestión usa *grafos*.

Las *estrategias de muestreo y agrupamiento* pueden operar de forma "ciega" (en ausencia de modelos previos) o de acuerdo con esquemas correspondientes a modelos básicos para objetos o comportamientos . La realimentación inicial entre ambas formas de operar se lleva a cabo en un marco Bayesiano que proporciona una realimentación entre probabilidades a priori y a posteriori; la estimación basada en máxima verosimilitud (MLE) proporciona una estrategia inicial para realizar una predicción. Esta estrategia se complementa con la utilización de L^1- y L^2-distancias para suprimir outliers y mejorar la distribución de datos numéricos en torno a modelos esperados.

El desarrollo de herramientas computacionales ha permitido avanzar en la *automatización* de los procedimientos (geométricos, funcionales, estadísticos) esbozados más arriba. Los fundamentos proceden de la Mecánica Computacional de Medios Continuos B_1. La adaptación de estrategias desarrolladas en Computer Vision B_2 permite incorporar herramientas para el Procesamiento y Análisis de la información de imagen y de rango B_{21}, reconstrucción 3D de objetos B_{22} y evaluación de comportamientos a partir de Análisis del Movimiento B_{23}. De forma complementaria, la Navegación Automática B_{32} y los aspectos dinámicos de la Robótica (desarrollados a lo largo de varios módulos de B_3), proporcionan modelos básicos para la interacción entre agentes inteligentes.

Machine Learning proporciona el paradigma para integrar todas las áreas anteriores en un esquema conceptual capaz de aprender por sí mismo. El paradigma central desarrollado inicialmente a lo largo de los ochenta está dado por las Redes Neuronales Artificiales (ANN) y sus estructuras superpuestas. La idea básica consiste en dos capas extremas (entrada y salida), y una colección de capas intermedias ocultas cuyas unidades básicas (neuronas) tienen pesos adaptables a las características de la propagación y su corrección dependiendo de los resultados obtenidos. El aprendizaje puede ser supervisado (en presencia de modelos previos) vs no-supervisado (en ausencia de modelos que "emergen" a partir del análisis de datos).

A lo largo de los noventa se desarrollan diferentes estructuras superpuestas (Algoritmos Genéticos, Programación Evolutiva, Mapas Auto-Organizantes) que aceleran el proceso de aprendizaje. La paralelización a gran escala (para datos y arquitecturas) y los avances en simulación facilitan el desarrollo de estrategias *Deep Learning* con un elevado número de capas (Deep Neural Networks). El desarrollo de estrategias basadas en Redes Neuronales Convolucionales y Recurrentes (CNN y RNN) es la extensión natural de de los procedimientos geométricos y funcionales descritos al principio, pues permiten capturar y generar nuevos contenidos a partir de los ya aprendidos.

El propósito de este capítulo es mostrar algunas "instantáneas" que ilustren las ideas esbozadas más arriba y que animen al lector a leer los capítulos siguientes donde se muestran detalles complementarios.

0.1.1. Una taxonomía básica

Las taxonomías son conjuntos de reglas lógicas que afectan a la captura, las apariencias generadas mediante agrupamiento, y los modelos a utilizar. Empezamos con las relativas a la captura de datos:

- La *captura de datos geométricos* considerada en este módulo se lleva a cabo mediante dispositivos de imagen (cámaras ordinarias o de video, p.e.) o de rango (infrarrojos ó láser 3D, p.e.). Las imágenes digitales proporcionan datos (regiones $2D$ con sus bordes, p.e.) que consideramos inicialmente como continuos y densos en el plano de imagen, mientras que los dispositivos de rango proporcionan información discreta y dispersa en una porción acotada del espacio Cartesiano $3D$. Se obtienen usando análisis diferencial local.

- La *captura de datos funcionales* se lleva a cabo mediante dispositivos ópticos (luz estructurada para curvas de nivel, p.e.), electromagnéticos más específicos (rayos X, tomografías, resonancia magnética, p.e.) ó acústicos (para evaluar características de la propagación de un frente de ondas, p.e.). Para todos ellos hay dispositivos y métodos que proporcionan información parcial para la elaboración de modelos. Se obtiene usando análisis integral global

El agrupamiento de características locales vs globales da lugar a una representación basada en las “apariencias” pues dependen de la localización (posición y orientación) del observador y de las condiciones de iluminación:

- Las *apariencias geométricas* (poligonales y regiones acotadas por poligonales, p.e.) están vinculadas a la representación de la porción del objeto o de la escena capturada por los sensores de imagen (parte visible con envolvente extraíble como borde sobre un soporte continuo) o de rango (partes no-ocluidas con envolvente a calcular sobre un soporte discontinuo).

- Las *apariencias radiométricas* (intensidad, color, reflectancia, p.e.) están vinculadas al comportamiento de la luz y dependen estrechamente de la iluminación; presentan características más complicadas debidas a la doble naturaleza de la luz como onda y como corpúsculo. Algunas propiedades básicas del enfoque radiométrico se han introducido en el módulo B_{21} (Image Processing and Analysis) de la materia B_2. Un tratamiento más sistemático se desarrolla en el módulo B_{43} (Rendering) de esta materia.

El agrupamiento de las apariencias debe proporcionar modelos. Los dos *enfoques tradicionales para modelado* se etiquetan como top-down (basada en modelos previamente conocidos) y bottom-up (basada en datos a agrupar). Frecuentemente, es necesario usar una realimentación entre ambos enfoques para resolver problemas prácticos. En el primer capítulo de este módulo B_{41} se privilegia el enfoque top-down, mientras que en el segundo se pone más énfasis en el modelado bottom-up.

- El *modelado top-down* parte de primitivas geométricas (1D, 2D y 3D) ya conocidas y trata de ajustar los datos a características de dichas primitivas. Para ello, utiliza métodos procedentes de diferentes Geometrías (Lineal, Algebraica, Diferencial, Analítica) ó Topologías (Algebraica o Geométrica) y trata de ajustar las observaciones a los modelos previos. Este enfoque se desarrolla en el capítulo 1.

- El *modelado bottom-up* utiliza estructuras de datos para diferentes tipos de *datos discretos* procedente de imágenes en profundidad (cámaras RGB-D, p.e.), pares de vistas (visión estéreo) o dispositivos de rango (IR, sensores acústicos, láser, LiDAR). A partir de estos datos se obtienen nubes de puntos que proporcionan el input para la generación automática de mallas 2D o redes volumétricas 3D. Ejemplos típicos están dados por mallas triangulares o cuadrangulares que se gestionan en términos de "complejos" simpliciales o cuboidales. La descripción de estructuras de datos para los modelos continuos vs discretos (asociados a nubes de puntos) se lleva a cabo en el capítulo 2.

En el capítulo 3 se presentan los algoritmos básicos para la generación automática de modelos continuos de escenas procedentes de datos y la comparación con modelos teóricos previos para escenas (procedentes de diferentes representaciones en perspectiva, inicialmente). A priori, la información no tiene es completa, ni tampoco presenta una distribución regular. Por ello, los procesos de regularización y compleción de información juegan un papel importante. Las herramientas computacionales correspondientes a fenómenos de propagación y compleción de información deben ser de tipo interactivo, para que el usuario pueda tomar la decisión sobre la estrategia a seguir.

Algunos problemas a resolver

El enfoque tradicional del modelado top-down utiliza herramientas software específicas para operar con primitivas básicas y testar los modelos resultantes de dichas operaciones para validar los resultados obtenidos utilizando técnicas de simulación. Este enfoque se ha desarrollado de los años 1980s utilizando inicialmente herramientas tipo CAD/CAM que, desde entonces, incorporan prestaciones cada vez más avanzadas (ver [Fio92] para un estado del arte a principios de los noventa).

A pesar de compartir principios comunes con la Geometría Computacional B_{11}, el mayor problema inicial del modelado top-down fue la falta interoperabilidad inicial con herramientas basadas el paradigma de Programación Orientada a Objetos. El desarrollo de bibliotecas (como OpenCascade, p.e.) ha proporcionado una solución con prestaciones crecientes en el entorno OOP.

Desde principios de los 1990s el modelado bottom-up utiliza herramientas de Data Analytics para el procesamiento y análisis basadas procedentes de imágenes, secuencias de vídeo o nubes de puntos 3D para generar y clasificar formas planares y volumétricas. La utilización intensiva de histogramas y sus extensiones (variogramas, espaciogramas) proporciona las herramientas básicas para un agrupamiento automático de propiedades radiométricas y geométricas en el Procesamiento de Imagen y de Video digital.

Algunos de los problemas más importantes en el modelado bottom-up conciernen a la segmentación de (descomposición en regiones o subnubes con propiedades “más homogéneas), el agrupamiento (atendiendo a diferentes tipos de distancia estadística como la distancia Wasserstein, p.e.), el alineamiento de subregiones (atendiendo a criterios geométricos o radiométricos), la estimación de la POSE (Position, Orientation, Size and Eccentricity) del objeto para calcular su envolvente cuadrática, la Reconstrucción 3D (para aspectos más avanzados en relación con la Visión Computacional), ó la síntesis de objetos planares o volumétricos en movimiento.

En las fases más avanzadas del modelado cinemático (objetos móviles) o dinámico (interacción entre objetos) es necesario extender el enfoque estático introduciendo herramientas de seguimiento y de evaluación de posibles deformaciones. Así, p.e. para objetos en movimiento real ó aparente (asociado a movimientos de cámara) es preciso simplificar la cinemática (tasas de variación de primer y segundo orden, habitualmente) utilizando algún tipo de envolvente (convexa ó visual, p.e.). La estimación de la dinámica (análisis de fuerzas y momentos que actúan sobre puntos de control) de objetos con geometría rígida ó articulada presenta una mayor dificultad. En este caso, se requiere una evaluación de comportamientos en la escena y posibles deformaciones en los objetos como resultado de la interacción.

La síntesis de propiedades dinámicas presenta una elevada dificultad sobre todo en el caso de medios continuos (como líquidos, gases, plasma, p.e.) cuyos fundamentos físicos se han introducido en el módullo B_{15} (Computational Dynamics). Por ello, en los primeros módulos sólo se consideran aspectos geométricos o cinemáticos. En el caso móvil, es necesario además detectar elementos significativos a diferentes niveles de detalle (LoD) que puedan facilitar la detección, seguimiento y predicción de objetos móviles usando una simplificación de datos continuos (siluetas, p.e.) o discretos (envolventes de nubes de puntos, p.e.).

El análisis de nubes móviles se aborda en los tres últimos módulos de esta materia y utiliza herramientas más avanzadas de Visión Computacional (Estimación del movimiento B_{23} y Vídeo 3D B_{26}, sobre todo) y de Robótica (Navegación Automática B_{32} y Cinemática de robots B_{33}, en particular). Por ello, en este módulo sólo se consideran nubes de puntos fijas procedentes de láser 3D o bien de dispositivos estéreo estáticos.

Las consideraciones anteriores no excluyen el análisis de las deformaciones que sólo se aborda en el caso estático, es decir, como el resultado de fuerzas que han actuado previamente o que mantienen el objeto en una configuración que suponemos fija. Las deformaciones juegan un papel crucial en cuestiones como control de calidad, esculpido de formas o bien recuperación de la forma original en Restauración de Formas. La sobrecarga, la generación de tensiones adicionales o factores externos ocasionales en la interacción con el entorno, pueden producir deformaciones que disminuyen el rendimiento o la operatividad de los dispositivos.

Por consiguiente, es preciso identificar las deformaciones que se producen como resultado de efectos dinámicos sobre la superficie ó el interior de los objetos permiten relacionar aspectos cinemáticos con dinámicos. En este módulo sólo se consideran deformaciones de objetos inicialmente rígidos para evaluar defectos estructurales sobre piezas industriales, ignorando las causas que han producido dichas deformaciones. En módulos más avanzados B_{4i} de esta materia se consideran objetos flexibles y estrategias más complejas de interacción entre diferentes volúmenes generados a partir de información de vídeo y de rango.

Una estrategia incremental

Los modelos presentados en este módulo B_{41} siguen una complejidad creciente. El objetivo de estas notas es proporcionar una presentación lo más ordenada posible de los métodos y herramientas más comunes utilizadas en Informática Gráfica y sus aplicaciones al modelado tanto de objetos como de escenas. Las aplicaciones más significativas que proporcionan la motivación para los métodos y herramientas presentadas están relacionadas con el diseño industrial, la generación realista de escenarios, la simulación de procesos, la animación de caracteres y la interacción en diferentes tipos de entornos.

Este módulo está enfocado hacia los aspectos estáticos, que conciernen sobre todo a objetos rígidas o a escenas estructuradas donde puede haber un número pequeño de objetos a analizar. Ejemplos típicos están relacionados con piezas industriales (donde CAD/CAM es el entorno dominante) o bien escenarios en entornos AEC (Architecture, Engineering, Construction) con la necesaria interacción vinculada a SIG[1] No se pretende ser exhaustivo, ni tampoco dar los detalles para los que se remite a la literatura especializa. Tan sólo se pretende desarrollar o ilustrar las aplicaciones más comunes relacionadas con diferentes áreas de la Ingeniería.

El desarrollo de los contenidos sigue un esquema similar al presentado en los primeros capítulos de otros módulos. Contiene capítulos específicos dedicados a los métodos, datos y algoritmos (por este orden), introduciendo a continuación otros capítulos dedicados a diferentes aplicaciones. En este módulo se prioriza la información geométrica (relaciones entre primitivas lineales o curvadas) con respecto a la radiométrica (dependiente de la iluminación) que se desarrolla a partir del módulo B_{43}. Como es habitual, los problemas de Ingeniería inversa (recuperación de la forma a partir de datos) son los más relevantes.

Asimismo, debido a una mayor facilidad conceptual, se empieza con modelos en los que los objetos, las transformaciones y las funciones son continuas. La mayor parte de los datos capturados por sensores tienen un carácter discreto (mapas densos de píxeles y mapas dispersos de vóxeles). El tratamiento

[1] Para detalles y referencias ver capítulo 7 del módulo A_{41} (Geometría Computacional) de la materia A_1 (Mecánica Computacional de Medios Continuos).

computacional para obtener modelos continuos presenta dificultades notables que requieren herramientas de Data Aanlytics (capítulo 2). Por ello, es necesario desarrollar modelos y algoritmos que permitan relacionar enfoques discretos y continuos, con diferentes tipos de densidad para la información. En particular, los procedimientos de discretización o, de forma complementaria, el muestreo de datos (muchas veces hiper-redundantes) juegan un papel importante.

La utilización de un lenguaje vectorial (en lugar de sistemas de coordenadas) facilita una presentación compacta y una formulación intrínseca. El lenguaje vectorial (típico de la Geometría Afín) proporciona la conexión entre el enfoque cartesiano de la Geometría Euclídea y el enfoque sintético de la Geometría Proyectiva (típico en formulaciones modernas de CAD como la que aparece en [Fio92], p.e.). La formulación vectorial es especialmente apropiada para describir una aproximación multilineal basada en tensores (productos formales de vectores y covectores).

Para modelos no-lineales (que requieren elementos de contacto de orden superior), la adaptación a objetos con geometría curvada se beneficia frecuentemente de la utilización de sistemas de coordenadas adaptados a la geometría de los objetos. Estos sistemas son especialmente útiles en el modelado de piezas industriales donde el uso de coordenadas esféricas, cilíndricas o cónicas simplifica la descripción tanto de objetos como de algunos movimientos rígidos.

Los *grupos de transformaciones* facilitan la visualización de objetos o su evolución en el espacio-tiempo. El grupo más utilizado inicialmente es el grupo Euclídeo $SE(3)$ generado por las rotaciones $SO(3;\mathbb{R})$ y las traslaciones del espacio ordinario $\mathbb{R}^3$. Dichas transformaciones se pueden describir en términos vectoriales, siguiendo una estrategia similar a la presentada en Geometría Diferencial de Curvas y Superficies (módulo A_{10}).

De forma complementaria, los grupos afín y proyectivo (de uso común en Visión Computacional y en Robótica)son importantes para la visualización de objetos en escenas que se lleva a cabo a partir del capítulo 3. El grupo conforme (conserva los ángulos) y grupo especial lineal (conserva el elemento de volumen) son asimismo importantes para una visualización que incluye tipos de interacción más realistas.

Un ejemplo típico es la parametrización de curvas por la longitud de arco s proporciona una caracterización intrínseca de las curvas (planas o alabeadas). Las ecuaciones estructurales (Frenete-Serret) son invariantes con respecto a la acción del grupo Euclídeo $SE(2)$ para curvas planas o $SE(3)$ para curvas alabeadas. La extensión a variedades de dimensión superior se formula en términos de geodésicas [2]

En particular, la parametrización por la longitud de arco permite recorrer la curva con velocidad constante, lo cual faclita la programación de Máquinas de Control Numérico (NCM). Algunos ejemplos en CAM están relacionados con la máquina cortadora de fresado en función de un máximo de seis parámetros

[2]En el capítulo 3 de A_{10} (Geometría Diferencial de Curvas y Superficies) se muestran ocho caracterizaciones equivalentes de geodésicas.

en el espacio ordinario. Hasta algunas curvas simples, un problema no trivial es encontrar una parametrización de longitud de arco para curvas planas o espaciale

En este módulo de Modelado B_{41} se da una mayor importancia a las *propiedades geométricas*, primando aquellas que son invariantes por los correspondientes grupos de transformaciones asociados a cada Geometría. La condición de invariancia con respecto a un grupo de transformaaciones es útil porque permite describir objetos de forma independiente con respecto a la localización (posición y orientación) del observador. La invariancia de objetos con respecto a un grupo se extiende a funciones definidas sobre el objeto.

Las *propiedades radiométricas* (color, texturas, mapas de reflectancia) no son invariantes con respecto a grupos de transformaciones geométricas. No obstante, en Informática Gráfica son muy importantes para una visualización realista de objetos y de escenas. En particular, las propiedades radiométricas facilitan la segmentación de imagen (atendiendo al color, las texturas o a mapas de reflectancia, p.e.) en términos de Procesamiento Global de Imagen [3]

La deformación de patrones usando *luz estructurada* (proyección de un patrón regular conocido sobre una superficie) combina propiedades geométricas y radiométricas para la obtención de propiedades de la superficie. Esta técnica es de gran utilidad para estimar defectos vinculados a deformaciones de piezas industriales. Utiliza estrategias de alineamiento que son aplicables tanto a nubes de puntos como a estructuras superpuestas.

Captura de información y sistemas de representación

La captura de la información se lleva a cabo usando dispositivos de imagen o de rango, procedentes de dispositivos cuya calibración interna es conocida. En el caso de imágenes digitales, los parámetros intrínsecos (como p.e. el punto principal o los parámetros de sesgo de una cámara) son conocidos. Es preciso descontar su efecto para obtener una medida precisa [4]

La utilización de la Visión Estéreo o, con más precisión, la Geometría Epipolar y su extensión a múltiples vistas, proporciona nubes de puntos 3D con una precisión cercana a los dispositivos láser. Como output se obtiene una *nube de puntos 3D* que se gestiona usando estructuras superpuestas (ver el capítulo 2 de este módulo) que pueden ser de tipo tetraedral o cuboidal. La Geometría Discreta proporciona el soporte para generar *modelos para objetos o escenas*; estos modelos pueden ser lineales a trozos o suaves a trozos (abreviadamente, PL vs PS modelos). El cálculo de las PL o PS-envolventes de objetos proporciona asimismo el input para el análisis más avanzado de propiedades cinemáticas o dinámicas para objetos móviles.v

Las herramientas de modelado geométrico para representar objetos y sus

[3]Para detalles ver capítulo 1 del módulo B_{21} (Procesamiento y Análisis de Imagen) de la materia B_2 (Visión Computacional).

[4]Para detalles y referencias relativas a calibración de cámaras, ver el capítulo 2 del módulo §2,2 (Reconstrucción 3D) de la materia A_2 (Visión Computacional).

transformaciones se basan en

- *mallas* (triangulares o cuadrangulares) verificando "buenas" condiciones de incidencia para sus elementos constitutos (vértices, aristas, caras); su extensión a complejos simpliciales o cuboidales se detalla en el módulo B_{12} (Computational Algebraic Topology).

- *pegado topológico de abiertos* parametrizados por las imágenes de cartas (U, φ) donde $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^2$ son C^r-equivalencias verificando propiedades de compatibilidad sobre $U_i \cap U_j$; un tratamiento computacional se desarrolla en el módulo B_{13} (Computational Differential Topology).

La introducción de una descomposición cúbica del espacio facilita familias tri-paramétricas (llamadas "webs") de planos mutuamente ortogonales sobre los que proyectar las superficies que delimitan el objeto para facilitar una parametrización local. La gestión computacional de las descomposiciones cúbicas del espacio se lleva a cabo mediante octrees. En la subdivisión recursiva de cada célula del espacio en ocho (mediante un sistema triplemente ortogonal de planos centrado en un punto medio), sólo se almacena la información correspondiente a células llenas; aún así, la gestión computacional presenta problemas importantes. La adaptación a las superficies que delimitan un objeto se lleva a cabo usando el algoritmos de Marching Cubes.

La técnica basada en ternas de planos dos a dos ortogonales es la más usada en Ingeniería. Esta estrategia fue introducida por G.Monge a principios del siglo XIX junto con las proyecciones sobre planos coordenados a las que se llama *cartas de Monge*. La estrategia basada en ternas de planos dos a dos ortogonales se extiende de forma natural a ternas de superficies ortogonales en $\mathbb{R}^3$, aunque la descripción explícita de las superficies presenta cierta dificultad para superficies de grado mayor o igual que tres.

La formulación más abstracta en términos de cartas coordenadas se debe a K.F.Gauss, quien da una formulación intrínseca (independiente dle sistema de coordenadas para superficies (junto con Christoffel) y es la más utilizada en Geometría Diferencial, incluyendo el uso de funciones multivaloradas (B.Riemann). La descripción intrínseca hace uso de sistemas de *geodésicas* como "parametrización natural" para superficies o variedades (localmente simétricas) de dimensión superior. A pesar de las múltiples caracterizaciones de las geodésicas[5], la descripción explícita de geodésicas para superficies arbitrarias presenta cierta dificultad. Por ello, frecuentemente se adopta una parametrización local basada en líneas de curvatura tipo $[x, y, \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) + o(x^2 + y^2)]$ donde κ_i son las curvaturas principales.

Desde un punto de vista topológico, las representaciones simpliciales son simples y flexibles, facilitando la visualización de geometrías localmente muy complicadas. Sin embargo, la cantidad de datos que se requiere es bastante

[5]Detalles en el capítulo 3 del módulo A_{10} (Differential Geometry of Curves and Surfaces) de la materia A_1 (Differential Geometry)

mayor que las basadas en representaciones paramétricas como las cuboidales [6]. Además, debido a su elevada complejidad $O(N^2 log\ N)$ (donde N es el número de vértices) la actualización (inserción vs borrado) de un único vértice en una descomposición simplicial puede modificar todo el entorno de los vértices más próximos de la malla, dando lugar a un fenómeno en cascada, difícil de controlar. Ello da lugar a un incremento de la complejidad computacional que ralentiza el funcionamiento de la aplicación. Para controlar la variación suave de la forma, se introduce una versión discreta de la energía de Wilmore.

Por el contrario, los pegados paramétricos utilizan sobre todo técnicas basadas en splines (como extensión natural de snakes [7]), que son asimismo aplicables a las NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines)[Fau79][8] , [Ger92] [9]. Los NURBS ofrecen representaciones para los datos qje son "suaves" (de clase infinito) y compactas. Las correspondientes herramientas computacionales están incorporadas a programas usuales de Diseño Computacional.

Modelos continuos vs discretos

Para fijar ideas, a continuación se presenta una *taxonomía básica* desde el punto de vista matemático que permite organizar la información relacionada con el modelado:

- *Modelos discretos* procedentes de
  - *Información de imagen* $2D$: La imagen como bitmap (bmp) con píxeles como unidades básicas. Se pretende agrupar datos discretos en regiones casi homogéneas 2D (variación radiométrica por debajo de un umbral) con sus correspondientes bordes
  - *Información de rango* $3D$: Una nube de puntos con información geométrica (posición $3D$) y radiométrica (intensidad en escala de grises ó color). Se pretend acotar datos en regiones espaciales acotadas por PL-estructuras.
- *Modelos continuos*
  - *Combinatorios*: PL-aproximaciones dadas por politopos (polígonos, poliedros)o con PL-estructuras de tipo simplicial o cuboidal.
    - *Representaciones topológicas:* Conexividad, compacidad, representaciones basadas en el borde, complejos (simpliciales, singulares, celulares), etc

[6] Un cuboide es la imagen de un cubo por una aplicación continua.

[7] Una snake es un trozo de curva racional con pesos para los puntos de control.

[8] I. D. Faux and M. J. Pratt: ´Computational Geometry for Design and Manufacture, Halsted Press, 1979

[9] F. Gerald: "From Conics to NURBS: A Tutorial and Survey", *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol.12, pp. 78-86, 1992.

- ◦ *Representaciones simbólicas:* Árboles regulares (binarios, quadtrees, octrees, etc), equilibrados, etc, ó con más generalidad, grafos orientados.

- *Funcionales* basadas en representaciones
  - ◦ *Paramétricas:* representaciones (Bézier/Bernstein, splines, B-splines)basadas en una aplicación local $\varphi : U \to M$ donde $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un abierto.
  - ◦ *Implícitas:* Conjuntos algebraicos definidos por polinomios de grado bajo en cualquiera de los marcos geométricos, con sus correspondientes herramientas de "pegado" para los datos locales $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$

Las reglas básicas para "componer" objetos y aplicaciones son las características de cada uno de los los marcos teóricos o, con más precisión, de las C^r-categorías que están caracterizadas por objetos y morfismos entre objetos. Las mas usuales corresponden a

- *Topológica* para $r = 0$ donde los objetos son espacios topológicos X y los morfismos son aplicaciones continuas $f : X \to Y$ entre espacios topológicos. Las C^0-equivalencias son los homeomorfismos.

- *Diferenciables o suave* para $r = \infty$ donde los objetos son variedades suaves M y los morfismos son aplicaciones diferenciables $f : N \to P$ entre variedades suaves. Las C^∞-equivalencias son difeomorfismos, es decir, homeomorfismos diferenciables con inversa diferenciable.

- *Analíticas* para $r = \omega$ donde los objetos son variedades analíticas X (cada rama está dada por un desarrollo en serie localmente convergente) y los morfismos son aplicaciones analíticas $f : X \to Y$ entre variedades analíticas. Las C^ω-equivalencias son transformaciones bianalíticas, es decir, homeomorfismos analíticas con inversa analítica.

- *Algebraicas* para $r = alg$ donde los objetos son variedades algebraicas X (dadas localmente por funciones racionales, es decir, cocientes de polinomios) y los morfismos son aplicaciones birracionales $f : X \to Y$ entre variedades algebraicas. Las C^{alg}-equivalencias son transformaciones birracionales, es decir, morfismos racionales con inversa racional (no definidas en el lugar de anulación del denominador)

De cara a las aplicaciones a Informática Gráfica, todos los tipos anteriores se aproximan mediante PL-estructuras (complejos graduados) que describimos en términos de mallas generalizadas de tipo simplicial o cuboidal. Los fundamentos teóricos se han desarrollado en el módulo A_{22} (Homología y Cohomología) de la materia A_2 (Topología Algebraica y Geométrica). Un enfoque computacional se ha desarrollado en el módulo B_{12} (Computational Algebraic Topology) de la materia B_1 (Computational Mechanics of Continuous Media).

0.1.2. Herramientas

La metodología general desarrollada en este módulo utiliza una realimentación entre las herramientas para el modelado matemático y las herramientas de tipo computacional. En particular, *todos* los modelos matemáticos deben disponer de algoritmos computacionalmente implementable para facilitar la generación semi-automática de primitivas (junto con sus operaciones morfológicas asociadas al cálculo booleano, p.e.), las estrategias heurísticas procedentes de diferentes criterios de agrupamiento (utilizando diferentes tipos de muestreo, p.e.) y la validación mediante diferentes procedimientos (tests, simulación, p.e.).

La formalización de todos estos procesos sigue estrategias similares a las expuestas en las materias anteriores. La automatización de procesos requiere diferentes tipos de herramientas que van desde la Geometría y Topología Computacional (Automated Proof of Theorems, e.g.) hasta aspectos avanzados de Inteligencia Artificial en el marco Deep Learning. Un objetivo de la interacción entre los enfoques basados en modelos y en datos consiste en asegurarse el rango de validez y las limitaciones de los enfoques desarrollados. En los apartados siguientes se enumeran las más significativas.

Herramientas para el modelado matemático

El tratamiento matemático de la información se lleva a cabo a diferentes niveles:

1. *Nivel básico* que incluye elementos de Álgebra Lineal (cálculo vectorial, matricial y aplicaciones lineales), Análisis (Funciones de Una Variable Real) y Teoría de Probabilidad (inferencia Bayesiana, distribuciones de Poisson y de Gauss, p.e.).

2. *Nivel intermedio* que incluye Geometrías Lineales Clásicas (Euclídea, Afín, Proyectiva), Análisis de Varias Variables Reales, Geometría Diferencial de Curvas y Superficies, Modelado basado en elementos racionales (snakes, B-splines, NURBS), y técnicas de muestreo e inferencia.

3. *Nivel superior* que incluye elementos de Geometría Algebraica de Curvas y Superficies, modelos básicos de propagación (ODE y PDE), FEM (Finite Element Methods), y Teoría de Información Geométrica.

Suponemos que el lector ya está familiarizado con las herramientas del nivel básico. A lo largo de los capítulos se introducen los elementos necesarios correspondientes a los otros dos niveles. Las herramientas predominantes en el *nivel intermedio* proceden de la Geometría Proyectiva y de la Geometría Diferencial de Curvas y Superficies A_{10}, basada en parametrizaciones locales. Las aplicaciones de la Geometría Proyectiva al Modelado han sido descritas en el módulo B_{22} (Reconstrucción 3D) de la materia B_2 (Computer Vision).

Las dos operaciones básicas de la Geometría Proyectiva utilizan secciones y proyecciones; las ilustraciones más simples para le caso no-lineal corresponden a las secciones de cuádricas sencillas (conos, cilindros, esferas, p.e.) que se suponen conocidas. La utilización de secciones y proyecciones proporciona invariantes proyectivos y permite visualizar objetos con geometría complicada. La extensión al marco de la Geometría Diferencial se lleva a cabo en términos de inmersiones y submersiones, es decir, aplicaciones no-lineales cuya diferencial (representada localmente por la matriz Jacobiana) tiene rango máximo.

Una aplicación de las parametrizaciones locales a entornos industriales está relacionada con el control numérico de máquinas en operaciones de manufactura usando la parametrización por la longitud de arco para curvas sencillas. Dos inconvenientes de enfoque´basado en Geometría Diferencial están relacionados con las dificultades para describir la "parametrización natural" en curvas complicadas y para gestionar descripciones globales.

El *nivel superior* utiliza herramientas GAGA (Geometría Algebraica y Analítica) que facilitan el intercambio entre propiedades globales y locales. Las variedades están caracterizados por el "ideal" de funciones (y recíprocamente) dadas habitualmente de forma *implícita*. El enfoque analítico es la clave para incorporar singularidades (confluencia entre varias ramas) en un marco común que es habitualmente ignorado en aplicaciones a Ingeniería.

El nivel superior presenta ventajas teóricas en relación con la manipulación formal de objetos y morfismos entre objetos (no siempre definidos), aunque la implementación computacional presenta una mayor dificultad (Maple o Mathematica). Desde un punto de vista experimental en ausencia de información previa, la descripción implícita presenta dificultades para la caracterización de primitivas geométricas no-lineales.

Algunos ejemplos básicos aparecen con la elipse o la hipérbola que requieren expresiones racionales sobre funciones trasncendentes (elípticas o hiperbólicas) para su descripción. Con más generalidad, dos importantes cuellos de botella están ligados al cálculo de intersecciones (y su evolución en "familias" dependientes de parámetros como las que aparecen en deformaciones) y a la caracterización de primitivas en términos paramétricos que sean computacionalmente implementables.

A la vista de estas dificultades, al mismo tiempo que se desarrolla una abstracción cada vez más general en GAGA (ver A_3 para más detalles y referencias), surge por el lado contrario la recuperación de variedades (curvas, superficies threefolds) racionales en relación con sus aplicaciones a Ingeniería. Las propiedades métricas (ignoradas en GAGA) se recuperan en el contexto de la Polaridad que aparece como una extensión del estudio de polos y polares de la Geometría Analítica del siglo XIX (Salmon, Cayley) inspirada inicialmente por la dualidad para las cónicas del plano.

En el contexto CAE los primeros ejemplos de esta descripción paramétrica están vinculados a las curvas de Bézier, las superficies B-splines o las NURBS (Non-uniform Rational B-splines) que aparecen a lo largo e este módulo. Los polinomios de Bernstein proporcionan la conexión con el enfoque GAGA [Far93]. La imposibilidad de obtener variedades racionales que verifiquen de forma exacta las condiciones requeridas da lugar al desarrollo de modelos aproximados deformables que se desarrollan en el capítulo 6.

En este módulo se insiste sobre todo en la generación de los aspectos (geo)métricos para las propiedades relativas a la forma. Las propiedades radiométricas se explotan sobre todo en el módulo B_{43} (Rendering). La extracción semi-automática de características geométrica sy radiométricas a partir de imágenes digitales se lleva a cabo en el módulo B_{21} (Image Processing and Analysis).

Las *primitivas geométricas básicas* proporcionadas por los programas habituales son de grado bajo; es decir, 1 (líneas, polilíneas, planos), grado 2 (cónicas, esferas, cilindros, conos), grado 3 (Bézier: splines, Beta-Splines) y en algunos casos grado arbitrario (polinomios de Bernstein). Desde un punto de vista geométrico, las representaciones más comunes se pueden describir en términos de dos (resp. tres) productos de curvas racionales a las que se llama B-splines (resp. T-splines).

Las transformaciones y operaciones juegan un papel fundamental para la manipulación de objetos:

- Las *transformaciones* son las propias del marco geométrico elegido: euclídeo, afín y proyectivo; las utilizadas más frecuentemente en los programas de Diseño Asistido son las del grupo euclídeo, es decir, transformaciones rígidas (rotaciones y traslaciones) ó su extensión al grupo de semejanzas (incluyendo homotecias además de las transformaciones rígidas) para los efectos de zoom-in ó zoom-out. En el caso de aplicaciones $f : X \to Y$ pueden actuar sobre los espacios de partida y llegada (producto directo), o bien sobre el grafo de la aplicación (producto semidirecto) para evaluar propiedades del contacto (fricción, p.e.).

- Las *operaciones básicas* para la representación topológica son las típicas del Álgebra Booleana, mientras que para las representaciones vectoriales (y sus generalizaciones) son las típicas del Cálculo Vectorial o, con más generalidad, de la Geometría Proyectiva: cortar y proyectar. Ambas conservan el grado y son compatibles con las operaciones de incidencia y tangencia que se utilizan para construir snakes, B-splines y NURBS, entre otras.

Las deformaciones proporcionan transformaciones regulares más generales que actúan como un subgrupo de los homeomorfismos (aplicaciones biyectivas y bicontinuas). Permiten caracterizar a los objetos módulo deformaciones y facilitan "modelos canónicos), tanto para los "objetos" como para las aplicaciones eventualmente singulares entre objetos. En el caso diferenciable o el analítico la diferencial de un difeomorfismo o de una transformación bi-analítica en el origen es un elemento del Grupo Lineal General; es decir, la linealización proporciona las transformaciones regulares de los marcos geométricos clásicos.

De forma complementaria, las operaciones básicas incluyen las típicas en Geometría Proyectiva (secciones y proyecciones)que inicialmente supondremos regulares, es decir, cuya diferencial tiene rango máximo (inmersiones vs submersiones [10] o el módulo B_{13} (Computational Differential Topology) para en enfoque computacional.). A pesar de la posible aparición de singularidades, las secciones y proyecciones genéricas de una variedad racional son racionales y ello permite aplicar argumentos de reducción de la dimensionalidad muy útiles también en AI.

Herramientas computacionales

Las *herramientas computacionales típicas en Matemáticas* son de cálculo simbólico (MAPLE V, p.e.) ó numérico (Mathematica, MathLab, p.e.). Los correspondientes interfaces gráficos permiten generar y manipular primitivas de grado bajo, incluyendo superficies de grado 2 (elipsoides, paraboloides, hiperboloides, p.e.) ó superior (basadas en diferentes tipos de splines, p.e.). Asimismo, disponen de herramientas para todas las transformaciones y operaciones descritas más arriba, incluyendo métodos y herramientas software para su manipulación local basada inicialmente en matrices o análisis numérico.

De cara a la interoperabilidad con el software en el marco OOP, es importante que las herramientas de diseño asistido permitan manipular los ficheros de forma compatible con herramientas de muestreo, reproyección y operaciones básicas geométricas y radiométricas. El carácter propietario que presentaban los formatos inicialmente utilizados en aplicaciones profesionales relacionadas con CAD hacía casi imposible la interoperabilidad en los años noventa.

El desarrollo de OpenGL a lo largo de los noventa, proporcionó un entorno gráfico compatible con bibliotecas diseñadas dentro de la Programación Orientada a Objetos. Los desarrollos iniciales permitieron incorporar herramientas básicas de Procesamiento y Análisis de la Información Geométrica y Radiométrica contenida en imágenes estáticas. Una presentación más detallada se puede ver en Procesamiento y Análisis de Imagen B_{21} y de Reconstrucción Tridimensional B_{22} dentro de la materia Computer Vision B_2

A principios de siglo, se desarrollaron herramientas para mejorar la interacción en entornos gráficos más avanzados (incluyendo aplicaciones web relacionadas con bases de datos visuales) usando formatos asociados a la descripción de contenidos (XML, X3D, entre otros). Actualmente, se están desarrollando herramientas para incorporar contenidos basados en nubes de puntos 3D o en vídeo están actualmente en desarrollo.

Para facilitar la interoperabilidad, la introducción del formato libre *.dwf proporcionó un soporte inicial que permite la exportación a *.dwg, uno de los formatos típicos de AutoCAD. Existen diferentes programas comerciales avanzados (3DStudio, Maya, p.e.) que proporcionan una gestión de primitivas geométricas básicas con operaciones avanzadas de edición y post-producción controladas por puntos, poligonales ó mallas.

[10] Ver capítulo 1 de A_{41} (Topología Diferencial Básica

Más recientemente, la incorporación del marco OOP al diseño (como en OpenCascade, p.e.) facilita la interoperabilidad entre diferentes aproximaciones. No obstante, aún queda un largo camino por recorrer vinculado a aplicaciones más avanzadas procedentes de los marcos diferencial y GAGA. Otras librerías software se comentan al final de la última sección de este capítulo.

Una conexión estructural entre herramientas

La clave para conectar las herramientas matemáticas con las computacionales en el marco de la Programación Orientada a Objetos (OOP) en el marco estático está dada por la Geometría Computacional B_{11} y sus extensiones a la Topología Algebraica Computacional B_{12} y la Topología Diferencial Computacional B_{13} que denotamos como GC, CAT y CDT, respectivamente. En todos los casos se sigue el mismo esquema básico que consiste en descripción matemática del modelo (incluyendo resolución teórica implementable), las estrategias para gestionar las estructuras de datos asociadas y el diseño-implementación de algoritmos capaces de gestionar las estructuras de datos en relación con los modelos matemáticos.

La clave para conectar los diferentes aspectos estáticos y móviles en el caso multivariable consiste en introducir diferentes tipos de campos (escalares, vectoriales, covectoriales) sobre los paquetes de datos. Su consideración como secciones locales de fibrados vectoriales facilita el paso del enfoque local al enfoque global. Su estimación se lleva a cabo en el marco de la Estadística multivariante. Todos estos campos son casos particulares de "campos tensoriales" que aparecen en un gran número de áreas de Física e Ingeniería, como la generalización natural de las aplicaciones multilineales que aproximan fenómenos no-lineales de gran complejidad.

Recordemos que un *campo tensorial* de tipo (r, s) se define como un producto formal de campos escalares (funciones correspondientes a atributos o detectores en AI), s campos vectoriales (trayectorias multivariables o descriptores en AI, p.e.) y r campos covectoriales (restricciones cambiantes, p.e.). El paradigma TensorFlow (incorporado a Pytorch) dentro de Deep Learning proporciona el marco para un tratamiento unificado para facilitar la automatización de la generación de contenidos en Informática Gráfica.

La suma formal de campos tensoriales de cualquier tipo sobre una variedad M o un espacio funcional o probabilístico X forman un álgebra tensorial. En el marco discreto los campos vectoriales se describen en cada punto en términos de diferencias finitas de primer orden; análogamente, los campos co-vectoriales se definen como funcionales lineales sobre los campos vectoriales. Además de las transformaciones lineales usuales (y sus transpuestas para los covectores) que conservan el tipo (r, s) del tensor, los operadores de contracción y expansión de índices permiten modificar el tipo (r, s). Las transformaciones permiten relacionar datos locales en diferentes abiertos; los operadores permiten relacionar datos y estructuras en diferentes dimensiones.

En presencia de movimiento, la Cinemática Computacional permite identificar las relaciones entre clusters que presentan una evolución espacio-temporal similar. La estimación de la evolución se realiza usando diferencias finitas de primer y segundo orden. El enfoque teórico en Mecánica Clásica usa los fibrados tangente τ_M y cotangente τ_M^* sobre una variedad suave M como soporte para la Cinemática

En términos de estructuras de datos, la incorporación de datos móviles debe traducirse en términos de "certificados móviles" para los clusters como extensión de los datos y modelos utilizados en el caso estático. Las KDS proporcionan una solución clásica B_{14} para gesitonar certificados móviles y estructuras sencillas (envolventes convexas móviles, p.e.). El conocimiento previo de patrones cambiantes asociados al movimiento de los diferentes agentes (incluyendo ecuaciones ideales del movimiento, p.e.) y su discretización actúan como "organizadores" para la Cinemática de escenas cambiantes en el espacio de las fases P (correspondiente a TM en el caso más simple)

La segmentación móvil (descomposición en subregiones que presentan características similares) de mini-secuencias de video se ha desarrollado en el módulo B_{23} (Motion Analysis) de la materia B_2 (Computer Vision). Su extensión al caso volumétrico presenta una mayor dificultad debido a la aparición adicional de deformaciones (reales o aparentes) que pueden afectar a la estructura del model.

Los aspectos Cinemáticos se abordan sobre todo a partir del módulo B_{44} (Animation and Simulation). La Geometría Diferencial A_1 y los Sistemas Dinámicos A_{46} proporcionan el marco teórico; su versión computacional se ha desarrollado en B_{14} (Computational Kinematics) y sus aplicaciones al análisis del movimiento B_{23} en Visión Computacional o a partir del módulo B_{32} (Automatic Navigation) en Robótica.

Diseño de algoritmos para búsqueda y clustering

El diseño de procedimientos de búsqueda es un problema difícil debido al ruido en la señal y oclusiones parciales en la escena. Su resolución requiere una gestión eficiente de los diferentes tipos de memoria para las estructuras de datos. En la mayor parte de los casos, la representación simbólica de las bases de datos geométricas se realiza mediante listas ó bien mediante árboles. En ambos casos es conveniente diseñar procedimientos de *búsqueda transversal* que eviten tener que recorrer todo el árbol en el peor de los casos.

El diseño de algoritmos de búsqueda transversal debe proporcionar criterios de contracción/expansión de un soporte jerarquizado cuyo cierre/despliegue dependa de la identificación de elementos críticos (eventos) en el grafo. Una base de datos convencional no proporciona la necesaria flexibilidad, pues la búsqueda transversal debe permitir el rechazo/selección de "paquetes" ó bloques de información.

Para resolver este problemas hay varias *estrategias complementarias*:

- *Agrupamiento según tamaño*, es decir, suprimiendo todos los hechos relativos a la forma que tengan un tamaño más pequeño que un umbral prefijado. Este método puede ser implementado en memoria externa con un bajo coste temporal, pero a costa de suprimir información que puede ser significativa. Por ello, es conveniente aplicar el criterio a diferentes escalas y seleccionar el que proporcione mejores resultados.

- *Agrupamiento según densidad*, es decir, suprimiendo la "información redundante" relativa a puntos próximos con información similar relativos a propiedades geométricas (la forma del objeto cuando es regular) ó bien radiométricas (similar intensidad en objetos de alta reflectancia). Utiliza modelos básicos de propagación sobre regiones con características "similares" (modulo un umbral de tolerancia).

- *Agrupamiento según concavidad y convexidad* Interesa identificar el signo de la segunda derivada para una función $z = f(x, y)$ que representa localmente la ecuación implícita de la superficie S (generlización inmediata a dimensión arbitraria). Habitualmente, no se conoce la forma explícita de f. Los triángulos de la malla triangular superpuesta a la superficie S se agrupan según el valor del signo de los vectores normales unitarios a cada triángulo (es preciso resolver situaciones de conflicto) introduciendo hipótesis adicionales para suavizar la variación del campo gradiente. Facilita el agrupamiento de vóxeles con características similares en $3D$.

- *Agrupamiento según variación de la curvatura:* es el agrupamiento más fino y sólo está disponible en algunas aplicaciones del software de programas comerciales. RapidForm permite procesar los archivos de nubes de puntos $3D$ procedentes del escaneo con el láser Minolta 910 generando mapas de diferentes tipos de curvatura. La curvatura total ó de Gauss $K_t = \kappa_1\kappa_2$ se define como el producto de las curvaturas principales κ_i que son los autovalores de la matriz de curvatura. Hay tres tipos de puntos:

  1. elípticos si $K_t(\mathbf{P}) > 0$
  2. hiperbólicos si $K_t(\mathbf{P}) < 0$
  3. parabólicos si $K_t(\mathbf{P}) = 0$

  En este caso, se puede utilizar un filtro de medianas para el agrupamiento de píxeles en torno a los valores más frecuentes para cada uno de los tipos de curvatura utilizados. El tensor de Ricci (contracción del tensor de curvatura de Riemann) proporciona una aproximación adaptable a la evolución de un elemento de superficie sobre el objeto.

- *Simbólica:* Grafos cuyas aristas representan funcionales relativos al tipo de propiedades que verifican las primitivas geométricas y no a las primitivas propiamente dichas. Por tanto, estos funcionales son componentes de alto nivel y afectan a propiedades asociadas a posibles acciones, más que a las primitivas geométricas ó radiométricas propiamente dichas. Un ejemplo típico viene dado por un *funcional de energía total* (distancia sobre el espacio de las fases) que puede asociarse a una "suma pesada" de funcionales de energía

$$E_{total}(\mathcal{N}) = \alpha E(\mathcal{N}, K_T) + \beta E(\mathcal{N}, K_C) + \gamma E(\mathcal{N}, K_S) \ \mid \ \alpha + \beta + \gamma = 1$$

definidos sobre estructuras superpuestas a una nube $\mathcal{N}$ de puntos. La nube representa los datos raw a partir de los cuales se construye una malla triangular K_T (complejo triangular de tipo simplicial), los mapas de concavidad/convexidad K_C (complejo celular evaluable mediante Teoría de Morse), los mapas de isoenergía, o los mapas de curvatura K_S (complejo cuboidal) del modelo liso.

En la práctica, es frecuente utilizar varias de las estrategias mencionadas, teniendo en cuenta las aproximaciones discretas para facilitar su implementación computacional vinculada a datos experimentales. Es conveniente disponer de una batería de algoritmos que puedan ser aplicados de forma secuencial o paralela, e identificar los que proporcionan mejores resultados.

0.1.3. Generación sintética de modelos

Los dos paradigmas más importantes en el modelado de sólidos están dados por CSG (Constructive Solid Geometry) y BRep (Boundary Representations). Las primeras implementaciones computacionales se llevan a cabo en los años 1970. Responden a la descripción de un sólido ó threefold T como un objeto tridimensional o bien a la descripción de la superficie S que le acota como borde $S = \partial T$ de T.

En el marco BRep los objetos iniciales (primitivas) presentan inicialmente una geometría muy sencilla de tipo lineal (paralelepípedos etiquetados como blocks), cuadrático (inicialmente esferas, cilindros y conos) o superficies rotacionales básicas (incluyendo toros, además de las cuadráticas anteriores). Si se añade el interior (desigualdades eventualmente estrictas) de las regiones acotadas por dichas superficies se obtienen las correspondientes descripciones en el marco CSG.

En cualquier caso, las operaciones básicas entre primitivas que afectan a la PL- o la PS-estructura subyacente se describen en términos de lógica Booleana, para facilitar la compatibilidad con los operadores morfológicos introducidos en el capítulo 3 del módulo B_{21} (Image Processing and Analysis) de B_2 (Computer Vision). Ejemplos típicos de operadores morfológicos son la dilatación y la erosión (se definen usando la suma y la diferencia de Minkowski). Su composición da los operadores de cierre y apertura que proporcionan los modelos más toscos de restauración (capítulo 5).

Los resultados de operaciones morfológicas deben ser independientes del marco elegido para describir los objetos (ecuaciones implícitas o paramétricas, típicamente) y deben ser compatibles con procedimientos de recursión que afectan a las componentes de los objetos (caras, aristas, vértices). Por ello, el lenguaje topológico resulta especialmente apropiado. El diseño de las operaciones a llevar a cabo con las primitivas geométricas básicas tiene varios niveles de descripción que se introduce en el primer parágrafo.

El marco computacional de tipo simbólico para el modelado debe ser compatible con la captura de datos realizada por dispositivos de imagen o de rango. Para construir dicha compatibilidad, recordemos que los dos procesos básicos de modelado conciernen a la generación-pegado y a la manipulación de primitivas geométricas mediante herramientas sofware específicas. El abaratamiento de los dispositivos de captura para generar nubes de puntos 3D basados en imagen (pares de cámaras or RGB-D cámaras) y de rango (escaneres 3D o Lidar, p.e.) han dado lugar a una difusión cada vez más amplia de dispositivos tanto estáticos como dinámicos.

La disponibilidad de información 3D requiere herramientas más eficientes para el procesamiento y análisis de información tanto en el caso estático como dinámico. En este módulo se presta atención sobre todo al caso estático, aunque la mayor parte de los desarrollos se extienden de forma natural al caso dinámico.El objetivo fundamental es mejorar la comprensión del entorno y de los objetos presentes en el entorno. En el caso de aplicaciones industriales se requiere una elevada precisión que pueda facilitar la identificación de características específicas relativas a la forma que no se requieren en aplicaciones de navegación automática (para vehículos o aplicaciones biomédicas, p.e.), donde el énfasis se pone en una respuesta en tiempo real.

Semántica del modelado

En el marco computacional, la semántica afecta a una representación del conocimiento que contiene un léxico (palabras clave), thesauri (significados) y taxonomías (reglas lógicas para gestionar el conocimiento). En Informática Gráfica, se adopta un enfoque similar al de la gramática generative en el que las "palabras clave" son las primitivas geométricas admisibles, los thesauri van asociados a diferentes tipos de ensamblado para construir objetos, y las taxonomías a las reglas usadas para la (des)composición de objetos. El desarrollo de una gramática formal (o de una generativa) proporciona elementos constructivos para la síntesis y gestión de modelos de objetos (assembly in CAM, e.g.) ó escenas estructuradas (CAD, e.g.); algunas aplicaciones a generación de escenas, incluyendo el marco AEC (Architecture, Engineering, Construction) se desarrollan en el módulo B_{42}.

El tratamiento de las primitivas básicas se lleva a cabo en términos de ecuaciones locales (implícitas o paramétricas). Las operaciones elementales son de tipo booleano (unión, intersección, diferencia, p.e.) y deben traducirse a las correspondientes operaciones internas dependiendo de la C^r-categoría ambiente, y de la conversión entre diferentes representaciones correspondientes a cambios de coordenadas en la C^r-categoría ambiente. Un problema no-trivial es la conversión entre representaciones en implícitas vs paramétricas que requiere Teoría de la Eliminación. La resolución de estos problemas se describe en el marco de la *interoperabilidad*.

La compatibilidad entre diferentes semánticas es un problema de "alineamiento" que no está completamente resuelto a nivel teórico, ni tampoco de las aplicaciones a modelado. De una forma puramente teórica, el alineamiento (registering) entre dos semánticas (correspondientes a dos librerías diferentes) se puede hacer fácilmente en términos de léxico para contenidos previamente etiquetados. Los dos niveles siguientes presentan una mayor dificultad pues las descripciones analíticas no coinciden necesariamente, y mucho menos las reglas para su manipulación. Para facilitar el alineamiento, es conveniente adoptar enfoque topológico.

La Topología proporciona un soporte para facilitar el alineamiento entre primitivas u objetos más complicados (entendidos como "complejos celulares") y las reglas encargadas de su gestión (entendidas como funciones a definir sobre los complejos). La interacción entre aspectos geométricos y topológicos es el núcleo de la Topología Geométrica A_{24}. Las herramientas computacionales se empiezan a desarrollar en los 1990s, aunque aún no se dispone de una "gramática formal" para formas ni para operaciones a realizar en entornos de manufactura industrial.

Para comprender la dificultad del problema del modelado es necesario tener en cuenta que tanto los objetos como las operaciones plantean restricciones importantes prácticas para las máquinas herramienta que llevan a cabo las operaciones industriales u otras aplicaciones. Ni siquiera es posible llevar a cabo una adaptación automática a formas cuadráticas arbitrarias con curvatura variable (como p.e. un paraboloide hiperbólico o los hiperboloides). Las máquinas herramienta pueden describir movimientos básicos de tipo lineal (a lo largo de una línea o un plano), cilíndrico o esférico (el caso más complicado: intentar escribir sobre una esfera).

Una composición de estos movimientos da lugar a un movimiento helicoidal sobre un cilindro (típico de los tornillos sin fin, p.e.). Estos movimientos forman parte de las transformaciones rígidas del espacio que son composición de traslaciones y rotaciones. La descripción vectorial de estos movimientos se lleva a cabo en términos de screws, cuya cinemática (resp. dinámica) se describe en términos de twists (resp. wrenches). Para una presentación moderna en el lenguaje del Álgebra Geométrica básica ver [Sel96] [11].

La descripción analítica (crucial para una programación que requiere posibles re-parametrizaciones) utiliza herramientas básicas de la Geometría Diferencial de Superficies en relación con las *Superficies de Rotación y de Traslación* que se describen en el capítulo 2 del módulo A_{10} (Differential Geometry of Curves and Surfaces).

[11] J.M.Selig: *Geometric Methods in Robotics*, Springer-Verlag, 1996.

Realizando operaciones complejas

a realización por parte de una máquina herramienta de algunas operaciones puede presentar una elevada complejidad dependiendo de la superficie, los materiales y loas trayectorias a realizar. La implementación se traslada a máquinas CNC de Control Numérico. Algunos ejemplos típicos afectan a redondeo, pulido, ó esculpido, entre otras. Es necesairo evitar singularidades (frecuentes en offset) y manatener la variación de la velocidad en una banda estrecha (idealmente, la velocidad del dispositivo debería ser fija)

La recuperación de la forma original de una pieza deformada puede presentar asimismo una elevada complejidad. El diseño de mecanismos de control de máquinas herramienta para la realización de estas operaciones presenta una complejidad aún mayor, debido al carácter curvado de las superficies, la deposición de material o una interacción no-lineal para adaptar el guiado de la máquina a la curvatura variable de la pieza.

Además, es necesario tener en cuenta el mecanismo de propagación sobre la geometría de la superficie, cuya descripción intrínseca requiere el uso del flujo de la curvatura media, que presenta fenómenos de inestabilidad para la segunda iteración. Por si fuera poco, en la realidad pueden aparecer vibraciones no-lineales o variaciones en características físicas (temperatura, presión, p.e.) que es necesario modelar para minimizar los efectos adversos.

En los seis primeros capítulos de este módulo no se consideran efectos dinámicos relativos a la propagación del calor o las vibraciones como resultado de operaciones complejas. En otras palabras, nos limitamos al estudio de propiedades geométricas. Aún así, se presentan problemas no-triviales en relación con el contacto de superficies a lo largo de curvas que se etiqueta como *blending*.

La *Geometría de Contacto* proporciona un marco general para el modelado del blending en el marco de la Mecánica Analítica. El desarrollo inicial de la Mecáni ca Analítica se debe a Lagrange (Geometría Simpléctica) y Legendre (Geometría de Contacto) a principios del siglo XIX [12]. En este módulo se adopta un enfoque más pedestre basado en una descripción analítica de las superficies de contacto (blending) teniendo en cuenta las diferentes posibilidades de control incluyendo (adaptaciones a) deformaciones.

Debe tenerse en cuenta que la resolución de problemas para superficies de contacto o, con más generalidad, equidistantes de una superficie dada, presenta una complejidad mayor que la de los diagramas de Voronoi típicos en Geometría Computacional, incluso para figuras sencillas. Así, p.e. la superficie equidistante de dos planos paralelos es, trivialmente, un plano paralelo intermedio. Sin embargo, la superficie equidistante con respecto a una esfera y un plano exterior es un paraboloide de revolución.

Aún peor, la superficie equidistante de los cilindros que no se intersecan de igual radio y ejes oblicuos es un paraboloide hiperbólico, que presenta cierta

[12] Para detalles y referencias ver el módulo B_{14} (Computational Kinematics) de la materia B_1 (Computational Mechanics of Continuous Media)

complejidad para su parametrización local. El estudio geométrico de estas situaciones corresponde a las superficies focales que surgen inicialmente en relación con problemas de Óptica Geométrica y de la Geometría de Mecanismos a finales del siglo XVIII. Estas cuestiones se abordan en el capítulo 5 (Restoration) de este módulo B_{41}.

Conectando el modelado discreto y continuo

Los modelos discretos responden a la naturaleza de la información capturada por dispositivos de rango ó generada en las primeras fases de procesamiento. Para unificar el tratamiento, facilitar la transferencia y la visualización de la información es conveniente adoptar una estrategia común para los modelos discretos y continuos (inspirada en estos últimos), con una articulación entre modelos, estructuras de datos y diseño-implementación de algoritmos. La solución clásica consiste en utilizar mallas triangulares generadas a partir de nubes de puntos (refinamientos de la triangulación de Delaunay, p.e.).

Los avances de las técnicas de prototipado rápido para modelos sólidos a lo largo de los noventa propiciaron el desarrollo de formatos con sus correspondientes lenguajes como STL (Stereolithography Tessellation Language) para facilitar la transferencia de información contenida en los mapas de triángulos y sus normales. Una ventaja vinculada a STL consiste en la posibilidad de fijar por el usuario una tolerancia (desviación con respecto al modelo CAD). Sin embargo, la PL-aproximación a superficies suaves complicadas (como las mencionadas en el apartado anterior) puede presentar dificultades que requieren el uso de modelos curvados aproximados.

A lo largo de los noventa se desarrolla el formato IGES (Initial Graphics Exchange Specification (IGES) que permite representar formas curvadas asociadas a las representaciones más usuales basadas en superficies racionales, como B-Splines y NURBS. Las versiones iniciales están asociadas al diseño mecánico en CAM. Un tratamiento más sistemático en el contexto de la Geometría Algebraica A_3 usando polinomios de Bernstein se puede ver en [Fio92] [13]. Una vez identificados elementos de control (puntos y planos tangentes) y ajustadas las superficies, un problema no-trivial consiste en el cálculo de intersecciones de superficies y la distinción entre agujeros reales vs generados por la aplicación.

La metodología introducida por Bézier/Bernstein utilizada para las representaciones paramétricas en términos de una colección “pesada” de puntos (representación discreta) y la interpolación (basada en polinomios de grado bajo) para formas que se ajustan de forma aproximada dichos puntos de control. Los aspectos básicos relativos a soluciones exactas (pero eventualmente incorrectas) se presentan en el capítulo 1 usando herramientas de Geometría Computacional para el caso continuo. La aplicabilidad a datos discretos se desarrolla en el capítulo 3 en relación con el modelado basado en láser 3D. La adaptación de mo-

[13] J.C.Fiorot and P.Jeannin: *Rational Curves and Surfaces. Applications to CAD*, J.Wiley and Sons, 1992.

delos discretos a continuos, incluyendo posibles deformaciones con respec ideal requiere una realimentación con métodos aproximados cuyos fundamentos teóricos se presentan en el capítulo 6; las aplicaciones a CAD/CAM se desarrollan en el capítulo 7.

La interrelación entre los modelos discreto y continuo se basaba clásicamente en modelos procedentes de la Geometría Descriptiva que difícilmente podían incluir la sofisticación de superficies utilizadas en la práctica. Ejemplos típicos aparecen no sólo con el diseño de las carrocerías, sino incluso con el diseño del fuselaje de los aviones. El diseño debe tener una sólida representación matemática para testar su comportamiento en condiciones adversas. El enfoque basado en modelos continuos se desarrolla sobre todo en la segunda mitad del siglo XX.

La introducción de curvas algebraicas controladas por un polígono de puntos fue llevada a cabo a mediados del siglo XX por Casteljau (1959) y Bezier (1962). La introducción de los curvas splines por Forrest (1972). La implementación computacional general por DeBoor (1972) y Riesenfeld (1973). La extensión a productos tensoriales usando polinomios de Bernstein por Sabin (1977), Farin (1979) y Sablonniere (1979). La adopción del marco proyectivo permite unificar todas estas aproximaciones en el marco de productos de curvas racionales con pesos [Fio92], cuya versión clásica (sin pesos) corresponde a las variedades de Segre de multigrado $(d_1, d_2, \ldots)$. Su estimación a partir de datos contenidos en vistas se puede ver en [Bla96].

La extensión de los modelos basados en nubes de puntos se ha acelerado por el abaratamiento de los dispositivos de escaneo láser y por la proliferación de programas que son capaces de generar nubes de puntos 3D a partir de colecciones de imágenes con "suficiente solapamiento" por una cámara cuya calibración se supone conocida (en caso contrario, hay que calibrarla previamente; ver B_{22} para detalles). Sin embargo, aún no se dispone de herramientas para la generación automática de PS-modelos a partir de nubes de puntos 3D. Un objetivo fundamental de este módulo es proporcionar los fundamentos para avanzar en este problema.

Problemas iniciales a resolver

A lo largo de este módulo se presentan diferentes estrategias para resolver los problemas siguientes:

- caracterizar las primitivas básicas a utilizar, así como los procedimientos de "pegado" ó de agrupamiento de datos con características similares;
- definir las posibles transformaciones de los modelos en cada uno de los marcos geométricos; transformaciones rígidas (rotaciones y traslaciones) ó escalables (homotecias) en el caso Euclídeo, p.e.;
- incorporar efectos relativos a distorsiones aparentes correspondientes a transformaciones proyectivas definidas sobre diferentes modelos de pers-

pectiva (frontal, angular, oblicua) para compatibilizar la percepción que de una misma escena pueden tener varios agentes.

La densidad en los elementos característicos del modelo es una cuestión crucial para optimizar el tratamiento de la información. Así por ejemplo, es bien conocido que objetos con variaciones bruscas en las curvaturas ó en las propiedades radiométricas necesitan un mayor número de elementos de control y, por tanto, procedimientos de muestreo adaptativo para la selección y gestión de la información significativa. Esta simple observación motiva el estudio de las propiedades de los flujos de curvatura (media y total) que se lleva a cabo en términos de las curvaturas principales (valores máximo y mínimo de curvaturas secciones). Esta cuestión se resuelve mediante estrategias locales tipo SVD para la determinación de los valores propios de la matriz de curvatura (PCA en el caso estadístico asociado a nubes de puntos con "suficiente densidad").

En las aplicaciones más básicas a Informática Gráfica sólo se utilizan PL-aproximaciones a los objetos, pues los datos (geométricos y radiométricos) adquiridos ó generados en la primera fase de procesamiento son discretos y presentan discontinuidades. De ahí, la necesidad de introducir el marco combinatorio (modelos lineales a trozos y sus correspondientes jerarquías) para el tratamiento de la información. La Optimización Combinatoria proporciona un método general para la selección óptima de soluciones de acuerdo con las restricciones especificadas.

Para evitar problemas de sobre-estimación y el ruido resultante, es necesario muestrear la información de forma inteligente. Una vez descartada la solución de fuerza bruta (muestreo aleatorio) es necesario realizar una selección significativa de puntos a la que etiquetamos como el remuestreo (incluyendo posible inserción de elemento adicionales) es una de las herramientas fundamentales de modelado. El muestreo inteligente sigue estrategias que son variantes de los métodos tipo RanSaC (Random Sampling Consensus) expuesto en el capitulo 2 del módulo B_{22} (3D Reconstructions) de la materia B_2 (Computer Vision). En lugar de privilegiar la estimación de la matriz fundamental (un tensor que representa las correspondencias entre puntos homólogos), es necesario fijar funciones de importancia, máxima verosimilitud (MLE) o tensores de estructura de la superficie (como los relativos a la curvatura media, p.e.). Estas cuestiones se abordan en el capítulo 2.

0.1.4. Mallas poligonales

Asociada a cada nube de puntos 2D, la triangulación de Delaunay (descrita en el capítulo 5 de B_{11}) proporciona de forma automática una malla triangular que maximiza el ángulo mínimo para evitar distorsiones. la elevación de esta malla a superficies desarrollables es trivial. Algo más complicada es la elevación a superficies no-desarrollables como la esfera o el elipsoide, p.e. ERn cualquier caso, la re-proyección asociada a la inversa de las proyecciones de Monge sobre planos coordenados proporciona una aproximación con buenas propiedades. En el capítulo 4 se presenta un refinamiento de esta construcción de utilidad para piezas industriales que admiten una PS-estructura (PS: Piecewise Smooth).

Los tipos de mallas que se consideran en este módulo son de tipo triangular o bien cuadrangular; las mallas de tipo hexagonal son útiles para describir fenómenos de propagación del calor, p.e. que inicialmente no se consideran en este módulo. Ambos tipos de mallas son casos particulares de complejos simpliciales o bien cuboidales. Por ello, se introducen algunos elementos básicos de Topología Algebraica que facilitan la gestión de la información. En el módulo B_{12} (Computational Algebraic Topology: CAT) se describe una solución computacional muy flexible basada en las α-formas introducidas inicialmente por H.Edelsbrunner a finales de los noventa.

Utilidad de las mallas poligonales

Las mallas proporcionan un modelo continuo superpuesto a la nube de puntos sobre el cual se pueden llevar a cabo procedimientos de optimización. Los más comunes están vinculadas a problemas de Optimización Combinatoria. En presencia de una PL-estructura que aproxime una parametrización suave local, se pueden utilizar métodos más robustos de Programación Dinámica. El caso más favorable corresponde a un soporte convexo, donde se pueden utilizar técnicas de Programación Lineal [14]

Para mejorar las mallas en casos más generales es conveniente introducir técnicas de Optimización basadas en minimizar (o maximizar) un funcional de acuerdo con varias funciones objetivo a valores reales. Dependiendo del número de funciones objetivo y del tipo de restricciones, se obtienen varios tipos de optimización:

- *Objetivo simple* dado por una única función que puede ser lineal, cuadrática, convexa, non-lineal o entera (cada una con sus correspondientes modelos de programación).
- *Multiobjetivo* en los que aparecen k funciones a optimizar de forma simultánea. En este caso, no se puede esperar una única solución óptima; en su lugar se tienen los óptimos de Pareto que garantizan que ninguna otra solución es mejor que la asociada a dicho óptimo.

El enfoque clásico permite aplicar el Cálculo Diferencial Exterior para resolver este tipo de problemas. Una presentación más reciente en el marco de la Geopmetría Diferencial Discreta se puede ver en [Bob08] [15]. Desde un punto de vista histórico, la introducción de de métodos de Programación Dinámica a partir de los años cincuenta (por R.Bellman), motivó el desarrollo de técnicas de

[14] ver capítulo 3 del módulo B_{11} (Computational Geometry) de la materia B_1 (Computational Mechanics of Continuous Media)

[15] A.Bobenko, P.Schroeder, J.M.Sullivan and G.M.Ziegler: *Discrete Differential Geometry*, Birkhauser, 2008.

tipo estadístico que actualmente se engloban dentro de la Investigación Operativa. Este tipo de técnicas son especialmente indicadas en situaciones cambiantes donde no se dispone de información estructural previa para el problema y es necesario generarla mediante estrategias avanzadas de simulación. Algunas de las más importantes en relación con cuestiones de Optimización Dinámica se basan en

- *Programación Estocástica*
- *Flujos en redes*

Estas últimas técnicas se incorporan a partir del módulo B_{43} donde es necesario desarrollar herramientas más flexibles para adaptarse a situaciones cambiantes sobre una estructura simbólica representada por un graof o una red. Por ello, en este módulo y el siguiente nos restringimos a los modelos de una o varias funciones objetivo, junto con sus perturbaciones estadísticas más sencillas basadas en los algoritmos de Monte Carlo (dudosa convergencia) y de las Vegas (más estructurado). Ambos son de uso común en la versión aleatorizada de Geometría Computational B_{11}.

Refinamiento de mallas

En ocasiones los triángulos no presentan características óptimas o bien hay regiones que, debido a factores radiométricos (reflectancia inapropiada, p.e.) ó geométricos (incidencia con ángulo inferior a un umbral, p.e.) no tienen la densidad requerida. Este inconveniente es especialmente grave en procesos de zoom-in que deben ser renderizados en tiempo real. En este caso, es necesario desarrollar procedimientos que permitan detectar y corregir los errores en la distribución de datos. En el capítulo 2 se presentan las estrategias de refinamiento más comunes.

En las soluciones desarrolladas a lo largo de los noventa, las mallas se almacenaban en la CPU, por lo que su actualización en tiempo real presentaba serios problemas. La incorporación de prestaciones cada vez más avanzadas en tarjetas gráfica aceleradoras permitió el desarrollo de soluciones mucho más eficientes implementadas sobre GPU. Asimismo, el desarrollo de lenguajes específicos para el tratamiento en GPU permite actualmente refinar y renderizar cientos de miles de polígonos en tiempo real. Las unidades básicas a almacenar están dadas por el triángulo y la normal al triángulo (que proporciona el soporte para incorporar información radiométrica). El control de la variación de ambos es crucial para el desarrollo de soluciones eficientes para objetos y escenas.

El refinamiento baricéntrico (subdivisiones baricéntricas sucesivas) proporciona una de los primeras estrategias para el refinamiento. Las mallas triangulares pueden ser reemplazadas por otras asociadas a teselaciones regulares (las irregulares tipo Voronoi, p.e., presentan problemas para procedimientos de subdivisión recursiva). En escenas complejas los algoritmos depth–first proporcionan un método para el refinamiento que opera a diferentes niveles de detalle

(LoD) dependiendo de la profundidad relativa en la línea de visión. Este método es especialmente apropiado para el renderizado de escenas y se detalla en el módulo B_{42} (Scene Modelling).

Si nos restringimos a superficies con mallas cuadrangulares, los algoritmos basados en la estimación de curvaturas proporcionan una estrategia eficiente capaz de incorporar efectos de suavizado inexistentes en otras aproximaciones. Una superficie está unívocamente determinada en cada punto por la curvatura media κ_m y la curvatura de Gauss o total κ_t que son la media aritmética y geométrica de las curvaturas principales (valores extremos de curvatures seccionales o valores propios de la matriz de curvatura). Grosso modo, la curvatura total se evalúa en los vértices de la malla y se propaga "circularmente" (Laplace) en pequeños entornos; análogamente, la curvatura media se calcula a lo largo de las aristas de la malla y se propaga en la dirección normal a la arista (campo gradiente). La energía de Wilmore proporciona un funcional a minimizar que combina ambas curvaturas (más detalles en el capítulo 5).

Reducción de mallas

En ocasiones la excesiva densidad de puntos (hiper-redundancia) o el solapamiento de nubes en el proceso de pegado da lugar a un excesivo número de puntos que ralentiza la extracción y actualización de la información. Para resolver este problems, es necesario aplicar estrategias de optimización que se describen en el capítulo 2.

Una técnica similar se puede aplicar para evaluar la posible redundancia en la distribución de vectores normales (modulo un umbral de tolerancia) asociada a los triángulos de una malla para facilitar su simplificación. La evaluación de la redundancia en distribuciones vectoriales y su gestión computacional se evalúa en términos de redes de Petri; estas técnicas tienen la ventaja de disponer de herramientas para interpretar las transiciones tanto en el caso estático, como en el dinámico.

Conversion between meshes

The most difficult problem is the conversion of triangular meshes into quadrangular ones. Triangular meshes (and their generalization to simplicial complexes) are very useful for visualizing small details of complicated objects, identifying defects, or for real-time rendering. However, triangular meshes do not contain global information about the object, which makes its characterization and, therefore, recognition difficult.

Quadrangular meshes (and their generalization to cuboidal complexes) are necessary to adapt parametric models to objects such as those that appear in industrial applications (CAD/CAM environments). Quadrangular meshes can be re-parameterized (subdivision vs clustering), allow easier identification of edge components, are easy to "glue" (using a discrete version of card swapping) to get global objects, deformations follow parametric models dependent on two variables (u, v) and its projection onto the coordinate planes is easily visualized (using Monge charts, e.g.). In more advanced applications related to Partial Differential Equations (PDE) quadrangular meshes provide support for an efficient discretization.

The previous arguments justify the preference in the use of quadrangular meshes (or complex cuboidal) in all kinds of multimedia applications. For this reason, it is interesting to have semi-automatic procedures for converting triangular meshes (from scans, for example) into quadrangular meshes. This conversion is the first problem to solve for simplicial complex relationships with cuboidal complexes in a constructive way [16]

No existe un procedimiento universal para esta operación. Por ello, en el capítulo 2 se introducen estrategias adaptativas dependientes de un umbral de tolerancia para el error que se pueda asumir. A basic classification of quadrilateral meshing gives three types of algorithms labelled as (following [Pan15] [17]):

- *Local methods* adapt simplification strategies developed for triangular meshes to quads. Although they tend to introduce a large number of singularities, their efficiency, simplicity, and stability make them ideal for processing large and noisy datasets.
- *Global methods* use global optimization strategies to optimize directly the number and placement of the singularities. They generate high-quality results, at the expense of efficiency and controllability.
- *Interactive methods* integrate local optimization algorithms with smart user interfaces, providing semiautomatic tools that are both efficient and highly controllable.

The above methods must be completed with estimation procedures involving intrinsic and extrinsic information linked ot the surfaces to be recovered. Intrinsic geometry involves the evolving tangent space at each point, whereas extrinsic geometry adds the information linked to the unit normal map. The "control" of variation for parameters is performed in terms of flows corresponding to curvature maps going from mean vs total curvatures (Gauss), till Ricci flow (contraction of the Riemann curvature). More detials will be given in the chapter 3 of this module.

[16] In the module A_{22} (Homology and Cohomology) of the subject A_2 (Algebraic and Geometric Topology) it has been It has been shown that both give rise to the same invariants, but this is not enough for an explicit treatment of the combinatorial information associated with the corresponding complexes.

[17] D.Panozzo: "Demystyfying Quadrilateral Remeshing", IEEE Computer Society, 2015.

0.2. Advanced Modelling

El *modelado matemático* presenta una enorme diversidad de aplicaciones que han impulsado el desarrollo de técnicas específicas procedentes de Física y Matemáticas para abordar cada uno de los problemas presentados. Por ello, no es fácil abordar en las notas de un módulo introductorio todos los aspectos relativos a fundamentos y estrategias, incluso aunque nos restrinjamos a *modelado geométrico* y sus extensiones naturales relativas a aspectos cinemáticos y dinámicos.

Incluso si nos restringimos a un enfoque matemático es conocido y comúnmente admitido que *el enfoque puramente geométrico es insuficiente para el modelado*, pues no puede explicar aspectos relacionados con extracción de la información(muestreo y agrupamiento de datos discretos) ó cambios de forma, entre otros aspectos. Por ello, el enfoque geométrico se completa con resultados procedentes de otras áreas como

- la *Teoría de Deformaciones* descritas inicialmente como $F+\varepsilon G$, para facilitar la transición entre apariencias próximas, utilizando campos definidos sobre mallas superpuestas.
- la *Topología Diferencial* para el modelado de transiciones o cambios bruscos en la topología de las formas. Algunas estrategias (ya comentadas en B_{13})utilizan superficies de nivel asociadas a diferentes funciones ó funcionales. o bien operadores diferenciales más sofisticados como los correspondientes a los diferentes tipos de curvatura.
- el *Análisis Variacional* para identificar soluciones óptimas con respecto a funcionales cuadráticos (distancia, área, volumen) variables a lo largo de la variedad soporte, o bien prolongaciones sucesivas de primer orden (funcionales de energía para suavizado, p.e.) sobre el espacio de las fases $P = TM$, o de segundo orden (comportamientos críticos para flujos de curvatura, p.e.)
- las *Ecuaciones en Derivadas Parciales* para representar y resolver procesos de propagación), incluyendo sus versiones discretas dadas sobre mallas cuadrangulares

Para modelado avanzado (como el requerido en CAM) hay que incorporar una representación explícita de los diferentes tipos de fuerzas y momentos que actúan sobre los objetos (calculando y representando sus efectos a diferentes resoluciones). Asimismo, es necesario diseñar procedimientos de *estimación* para los parámetros de las redes y los efectos producidos sobre los modelos que permitan realimentar on-line los procesos relacionados con el modelado dinámico.

La discretización de modelos continuos o, inversamente, el suavizado de modelos discretos se desarrolla con más detalle en el módulo B_{13} (Computational Differential Topology). Para describir comportamientos no-lineales en objetos curvados que relacionen aspectos discretos y continuos se requieren herramientas adicionales de Elementos Finitos. Un tratamiento computacional con aplicaciones a Ingeniería se puede ver en [Log92] [18]

0.2.1. Diferentes enfoques

Para fijar ideas y facilitar la aplicabilidad de los resultados expuestos, en este módulo nos restringimos a técnicas de modelado relacionadas con la Geometría Computacional B_{11} y la Topología Computacional (módulos B_{12} para CAT y B_{13} para CDT). Ambas juegan un papel privilegiado debido al desarrollo de un gran número de modelos y herramientas computacionales para resolver los problemas planteados en modelado semi-automático.

Aún así y a la vista del crecimiento explosivo de las aplicaciones desarrolladas a partir de los años noventa, el enfoque computacional ha dejado de ser una restricción para convertirse en un pre-requisito. A ello se une la diversidad de enfoques procedentes de *diferentes taxonomías para el modelado* que afectan a

- la *forma de representación* del modelo: paramétrica ó implícita, y sus relaciones;
- los *tipos de primitivas utilizados*: Geometría Sólida Constructiva, Representaciones basadas en el borde, etc;
- las *metodologías procedentes de diferentes áreas físico-matemáticas* incluyendo las dicotomías relativos a modelos continuos vs discreto, deterministas vs probabilistas, p.e.;
- el *tipo de operaciones* (booleanas automáticas o cirugía topológica interactiva) ó *de transformaciones permitidas* (secciones y proyecciones, trasformaciones lineales vs no-lineales),
- la posibilidad de *realimentación en función de la captura* asociada a diferentes tipos de sensores de imagen ó de rango;
- la *estimación "al vuelo" de características* que da entrada a modelos probabilísticos eventualmente relacionados con medidas superpuestas a objetos;
- los *tipos de datos* (continuos o discretos) utilizados como inputs para el modelado;
- el *marco de herramientas computacionales* (simbólico, numérico, procedural, orientado a objetos) utilizadas para su manipulación.

[18] D.L.Logan: *A first course in the Finite Element Method (2nd ed)*, PWS Kent, 1992

Como se mostrará a lo largo de estas notas, es necesario tener un conocimiento de las taxonomías mencionadas y recombinarlas apropiadamente. Esta observación justifica la utilización de metodologías híbridas en la parte II (capítulos 4 a 6) de estas notas. No obstante, en los apartados siguientes se enumeran algunas de las herramientas básicas a combinar.

Debido a limitaciones de espacio y de conocimiento por mi parte, es imposible dar cuenta de todas las extensions de la Geometría Computacional que se han desarrollado desde los años noventa y de sus aplicaciones. Un extenso catálogo clásico se puede encontrar en los links que permanezcan activos de la Web *Geometry in Action* de D.Eppstein [19]; esta web contiene diez apartados relacionados con Diseño y Manufactura que es el tópico central de este módulo. En esta introducción adoptamos un enfoque algo más estructurado para tratar de transmitir la profunda unidad subyacente a la diversidad de métodos y herramientas.

Diferentes geometrías lineales

Cada Geometría está caracterizada por su grupo de transformaciones ó grupo estructural y recíprocamente (F.Klein, 1873). Las más utilizadas en este módulo son:

- *Geometría Euclídea:* Caracterizada por la conservación de la métrica. Su grupo estructural es el grupo Euclídeo $SE(3) = SO(3;\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^3$ generado por el grupo Especial Ortogonal $SO(3;\mathbb{R})$ (rotaciones en los casos 2D y 3D) y el grupo de las traslaciones $\mathbb{R}^3$. Presenta la mayor precisión con respecto a una base prefijada, pero al mismo tiempo la mayor dificultad para su estimación.

- *Geometría Afín:* Deja invariante la ratio entre cantidades. Su grupo estructural es el grupo Afin $A(3) = GL(3;\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^3$ generado por el grupo Lineal General $GL(3;\mathbb{R})$ (transformaciones regulares, es decir con determinante no-nulo) y el grupo de las traslaciones $\mathbb{R}^3$. Permite manejar los puntos como entidades sin referencia a una base canónica. Más flexible que el grupo Euclídeo, pero con menor precisión.

- *Geometría Proyectiva:* Caracterizada por la conservación de la razón doble. Su grupo estructural es el grupo Proyectivo $\mathbb{P}GL(4;\mathbb{R})$ correspondiente a las 4×4-matrices regulares salvo factor de proporcionalidad (escala). Presenta mayor margen de error, pero permite relacionar todas las geometrías lineales.

Demostrar la invariancia de la distancia Euclídea, la ratio o la cross-ratio para las Geometrías Euclídea, Afín o Proyectiva, es elemental. Cuando recurrimos a "cantidades" más complicadas como la Energía o los diferentes tipos

[19]https://www.ics.uci.edu/ eppstein/geom.html

de curvatura, la demostración deja de ser elemental; en particular, la demostración de la invariancia por el grupo Euclídeo de las curvaturas para curvas o superficies está dada por los Teoremas de Frenet-Serret y Egregio de Gauss, respectivamente.

Demostrar la invariancia de otras "cantidades" puede requerir el uso de otras Geometrías. Por ello, además de estas Geometrías, también resulta de utilidad considerar las transformaciones regulares que dejan invariante los ángulos entre líneas (Geometría Conforme) y la que deja invariante las áreas de regiones acotadas (Geometría del Grupo especial Lineal) para modelos de propagación. La deformación aparente de un objeto procedente de algún tipo de proyección asociada a la cámara se evalúa en términos de alguna de las Geometrías descritas.

Marcos curvados

Todas las Geometrías consideradas en el apartado precedente tienen un grupo estructural finito-dimensional. En presencia de deformaciones reales (no aparentes) es necesario utilizar Geometrías no-lineales más sofisticadas con un grupo infinito-dimensional. El grupo estructural de cualquiera de ellas es un subgrupo del grupo de los homeomorfismos de un espacio topológico X que dejan invariante un punto $x \in X$.

La invariancia de cantidades soportadas por la geometría del objeto es clave para relacionar aspectos infinitesimales, locales y globales. Un ejemplo típico es la energía de Wilmore E_W dada como la integral del cuadrado de la diferencia $k_1 - k_2$ de las curvaturas princiaples en una superficie, cuya no-anulación mide el "defecto de esfericidad" de un objeto curvado [20].

Este tipo de "ejemplos" muestra la necesidad de analizar la invariancia no sólo sobre el espacio base, sino sobre sus prolongaciones al espacio de las fases $P = TM$ o a TP. El cambio de punto base en la variedad original M induce una "traslación infinitesimal" sobre el espacio soporte X.

Más formalmente, hay que introducir una "conexión" ∇ (dada por un operador llamado derivada covariante) que permite "trasladar objetos" (tensores) a lo largo de caminos de forma efectiva incluyendo cambios en la fibra (expresados como funciones de transición). La matriz de curvatura $\mathbf{K}$ se puede interpretar como una "derivada intrínseca" de la conexión. En el caso de superficies, el determinante $det(\mathbf{K})$ es la curvatura total κ_T de Gauss, mientras que la traza $tr(\mathbf{K}$ es el doble de la curvatura media $\kappa_m)$. Una aproximación discreta se ha desarrollado en el módulo B_{13} (Computational Differential Topology).

Los objetos geométricos no-lineales en Computer Graphics se describen en términos de diferentes geoemtrías. Las C^r-Geometrías más utilizadas para el modelado avanzado son:

- *Geometría Algebraica* cuyo grupo estructural es el grupo de las trans-

[20]La demostración de que E_W es un invariante por la acción del grupo Conforme es no. trivial.

formaciones birracionales, es decir, racionales con inversa racional. Los modelos iniciales no-lineales considerados en Diseño Geométrico son racionales [Fio92]. Su estimación se lleva a cabo usando contornos activos [Bla98].

- *Geometría Diferencial* cuyo grupo estructural es el grupo de los difeomorfismos que conservan un punto. Proporcionan la categoría más fácil para manejar deformaciones (debido al carácter suave, es decir, no-singular) de objetos, aplicaciones y transformaciones. La conversión al marco algebraico se lleva a cabo en los espacios de k-jets que pueden considerarse como polinomios de Taylor truncados.

- *Geometría Analítica* cuyo grupo estructural es el grupo de las transformaciones bi-analíticas (es decir, analíticas con inversa analítica), para incluir un tratamiento compatible con la presencia de singularidades mecánicas que permitan gestionar operaciones en entornos industriales.

La *estrategia general* que seguimos en este módulo consiste en pensar en términos diferenciales, aproximar mediante expresiones polinomiales (para cálculos efectivos), incluir el enfoque analítico (en presencia de singularidades que pueden aparecer a nivel cinemático o dinámico, aunque los objetos sean suaves) y expresarlo en términos estadísticos (para incorporar la incertidumbre y conectar con el enfoque discreto).

Mallas para objetos suaves a trozos

Todas las piezas industriales y las que aparecen en entornos modernos de AEC son objetos suaves a trozos. Dejan de ser suaves en aristas que separan dos trozos de superficie o en vértices donde confluyen varias aristas. Una ventaja de objetos suaves a trozos consiste en que es posible aplicar técnicas estándar de optimización. Un inconveniente consiste en que, teóricamente, requieren un número infinito de términos para su especificación.

Por ello, la estrategia obvia consiste en truncar series infinitas para convertirlas en polinomios y operar sobre el álgebra polinomial y sus transformaciones correspondientes. En nuestro caso, sólo consideramos formas polinomiales de grado bajo ≤ 4 para permitir una alternancia entre a lo sumo dos zonas cóncavas vs convexas. Desde un punto de vista gráfico los objetos resultantes de esta truncación se gestionan en términos de Geometría Proyectiva de Curvas y Superficies; una aproximación computacional se puede ver en []Fio92

La captura de información mediante dispositivos de imagen o de rango (o de ambos, como ocurre con la luz estructurada) siempre proporciona datos discretos, es decir, nubes de puntos. La Estadística proporciona técnicas de muestreo para seleccionar sub-nubes de acuerdo con diferentes criterios que sean más fáciles de procesar y minimicen la información redundante. La Geometría Computacional proporciona métodos para superponer PL-estructuras (PL: Piecewise

Linear) basadas en mallas triangulares "exactas" o cuadrangulares "aproximadas".

La generación automática de mallas planares de ha presentado en el capítulo 5 (Diagramas de Voronoi y Triangulaciones de Delaunay) del módulo B_{11} (Geometría Computacional). Diferentes extensiones al caso de superficies y 3D se han mostrado en el módulo B_{12} (Computational Algebraic Topology), donde se presta especial atención a las α-shapes (desarrollado inicialmente en el National Center for Supercomputing de la Univ. de Illinois).

La Visualización Avanzada B_{16} proporciona un PL y un PS-soporte para objetos sobre el cual se pueden aplicar diferentes tipos de herramientas. Las más comunes permiten editar, aplicar transformaciones de semejanza (rotar, trasladar, escalar), adquirir información métrica (distancia, ángulos, áreas, volúmenes, p.e.), modificar localización de elementos o componentes, realizar cálculos de acuerdo con las estructuras de datos subyacentes (de tipo relacional, habitualmente), aplicar diferentes tipos de campos, y visualizar gráficamente los resultados. Una de las plataformas clásicas de Visualización Avanzada es VTK; para más detalles y referencias ver [Sch04] [21]

La utilización de diferentes tipos de campos (escalares, vectoriales, covectoriales) es un tópico recurrente en todas las materias B_i incluidas en estas notas para representar la evolución espacio-temporal de "cantidades". En el caso geométrico se pueden interpretar como secciones de fibrados. El lenguaje del Álgebra Tensorial permite unificar todos estos campos, pues un tensor es formalmente un producto tensorial de campos escalares, vectoriales y covectoriales; este enfoque se extiende de forma natural al caso discreto, al marco estadístico (dentro de la Teoría Geométrica de la Información [Ama16]) y a Deep Learning dentro de AI. El desarrollo de TensorFlow dentro de Pytorch proporciona el marco computacional para gestionar campos tensoriales.

Extracción semi-automática de CAD/CAM

La industria CAE (Computer Aided Engineering) genera una cantidad ingente de datos que requiere un esfuerzo constante para facilitar su organización de cara a une reutilización que mejore el rendimiento de las aplicaciones en entornos más específicos CAD/CAM, p.e. El carácter propietario y la metodología seguida para la programación en entornos CAD/CAM hace difícil la identificación de componentes inmersas en ficheros, incluso aunque sea posible exportarlos a formatos abiertos más convencionales.

Desde los años noventa, la *interoperabilidad entre diferentes formatos* se ha convertido en un tema recurrente para facilitar la reutilización de componentes, la identificación de elementos ocultos en formatos gráficos (fotos antiguas, p.e.) y la generación de modelos más completos en entornos OOP que puedan ser compatibles con las estructuras de datos relacionales. La introducción de herra-

[21] W.Schroeder, K.Martin and B.Lorensen: *Visualization Toolkit. An Object-Oriented Approach to 3D Graphics (3rd ed)* , Kitware, 2004.

mientas de AI proporciona el soporte para la extracción, etiquetado, compleción y almacenamiento de las primitivas geométricas más simples en el contexto Deep Learning (Yolo2 resulta especialmente útil). Sin embargo, la presencia de relaciones de incidencia ó tangencia entre diferentes componentes adyacentes plantea retos para los que aún no se dispone de soluciones semi-automáticas.

Para resolver el problema de la "segmentación" de piezas compuestas, es necesario desarrollar una gramática formal de tipo generativo que afecte a las formas geométricas que aparecen en entornos AEC Architecture, Engineering Construction) en el contexto CAD o piezas industriales en el contexto CAM. La Visión Computacional proporciona una primera aproximación al problema *Geometry Shape Control* a partir de la detección de esquinas, aristas y caras; las relaciones de incidencia entre ellas proporciona los inputs para un reconocimiento parcial (usando isomorfismos entre subgrafos, p.e.). Estos tópicos se abordan en el módulo B_{24} (Recognition) de la materia B_2 (Computer Vision).

la comparación entre diferentes componentes (generadas a partir de imagen y rango) y la simulación de su ensamblaje son operaciones complejas que requieren una re-interpretación de los datos más significativos. La automatización en la evaluación de posibles deformaciones (de interés para control de calidad o restauración de piezas, p.e.) requiere implementar estrategias de

1. muestreo inteligente en al fase de procesamiento:
2. agrupamiento de datos de acuerdo con modelos de estadística geométrica;
3. generación de superficies en la fase de análisis; y
4. cálculo booleano para intersecciones de superficies e interpretación de los resultados.

En la subsección §3,4 se comentan los avances recientes para la automatización de este esquema en el marco Deep Learning de AI. Este enfoque se desarrolla con más detalle en el capítulo 8 de este módulo. No obstante, en la mayor parte de este módulo se adopta un enfoque más clásico en el que se prima las estrategias híbridas (continuas vs discretas) que combinan modelos matemáticos procedentes de diferentes áreas, junto con su implementación computacional (estructuras de datos y algoritmos).

0.2.2. Muestreo para la generación de modelos

Habitualmente, la captura de datos mediante dispositivos de imagen o de rango presenta problemas tales como información incompleta (debida a oclusiones parciales), desigual distribución (redundancia vs escasez, p.e.), contaminada (por defectos de iluminación, p.e.) ó diferentes tipos de ruido. Para resolver estos problemas se aplican diferentes tipos de técnicas de muestreo y agrupamiento que afectan a propiedades geométricas y radiométricas.

Muestreo aleatorio

La ingente cantidad de datos procedente de un escaneo a lata resolución o de la comparación de imágenes da lugar a nubes de grandes cantidades de puntos (varias decenas de miles) que no resultan fáciles de manejar desde un punto de vista computacional. No sólo contienen información redundante, sino que además presentan defierentes tipos de ruido en las proximidades de los elementos geométricos más significativos como vértices y aristas.

Una primera aproximación consiste en aplicar algoritmos de fuerza bruta asociados a un muestreo aleatorio o bien a una decimaciones sucesivas en la lista de datos procedentes de la captura de información. Esta estrategia sólo es recomendable en las fases iniciales del proceso. En fases más avanzadas de reconocimiento automático de la forma basadas en diferentes variantes de ANN (Artificial Neural Networks) es frecuente utilizar HMM (Hidden Markov Models) para entrenar las redes que faciliten el reconocimiento de modelos o, en fases más sofisticadas, de defectos en los modelos. Por la misma razón y a pesar de su uso ubicuo en AI, nuestro enfoque sólo utiliza HMM en las fases iniciales de aprendizaje.

Inferencia bayesiana y más allá

La realimentación entre la información disponible a priori y la resultante de los primeros análisis se lleva a cabo en términos de inferencia Bayesiana. De una forma muy simplificada, el Teorema de Bayes proporciona una realimentación entre las propiedades a priori y a posteriori que permite acelerar el reconocimiento de propiedades estructurales de la forma. Además de su aplicabilidad "universal" (lo cual explica su ubicuidad), una ventaja práctica importante consiste en que proporciona una sola regla de decisión con respecto a la aceptación o el rechazo de una función aplicada a las muestras consideradas.

La estimación de cantidades multi-vectoriales complicadas (como las asociadas a características de una superficie o un volumen en modelos complejos), la estrategia Bayesiana puede resultar insuficiente. En estos casos se require introducir "paquetes" de propiedades que describan posibles variaciones de cantidades interrelacionadas entre sí. Las estrategias tradicionales se basan en el uso de múltiples correlaciones que se manejan en términos de matrices de covarianza. En este último caso, se reemplaza la distancia Euclídea habitual (u otras más generales en espacios de funciones o pdf) por la distancia de Mahalonobis, p.e.

Covarianza y Correlación

Los métodos basados en momentos centrales pueden resultar insuficientes para la estimación de cantidades conjuntas variables (representadas por multivectores) como las que aparecen asociadas a objetos complejos. Por ello resulta conveniente incorporar modelos estadísticos que dén cuenta de posibles relaciones entre cantidades

El *residuo de una variable aleatoria Z* se define como la diferencia con respecto a la media. El producto promediado de los residuos es la *covarianza*. La estimación del signo y la magnitud de la covarianza permite evaluar comportamientos semejantes ó no entre dos variables aleatorias. La semejanza puede evaluarse en términos de un umbral fijado por el usuario usando un módulo orientado asociado a una representación polar que se asocia a la covarianza. En el capítulo 2 se desarrolla una aproximación basada en el procesamiento y análsiis de imagen. Un reto es la extensión de esta metodología al caso de nubes de puntos.

Cuando deseamos comparar el comportamiento de variables cuyas unidades no son comparables, conviene utilizar *variables estandarizadas* donde la *desviación estándar σ* es la raíz cuadrada de la varianza. Nótese que una variable estandarizada tiene una varianza igual a 1. La correclación se estima a partir de la covarianza entre variables estandarizadas.

Para evaluar la proximidad entre las distribuciones teórica o esperado y la obtenida a partir de muestras una primera solución consiste en utilizar la distancia de Mahalonobis, basada en la matriz de covarianza. La adaptación de este enfoque a imágenes estáticas de objetos se aborda en el capítulo 2, donde se requieren estrategias más avanzadas de muestreo.

RanSaC y sus variantes

Frecuentemente, las cantidades mixtas a analizar pueden presentar una elevada variabilidad e interrelaciones más complicadas que las correspondientes a los modelos descritos en el apartado anterior. En estos casos, es necesario representar las "cantidades variables" y sus restricciones en términos de campos vectoriales y formas diferenciales (duales de los campos que, por ello, en ocasiones se etiquetan como co-campos). El producto formal de un número finito r de restricciones y un número finito s de campos es un tensor $\mathbf{T}_s^r$ de tipo (r, s) que se transforma de acuerdo con las reglas usuales de cálculo vectorial para un espacio vectorial (el espacio tangente) y su dual (el espacio cotangente).

Los tensores más sencillos están dados por matrices; ejemplos típicos están dados por las métricas que son tensores de tipo $(2, 0)$ o por formas bilineales que son tensores de tipo $(1, 1)$. Tensores de orden superior se pueden visualizar como "hiper-matrices". En el módulo B_{22} (Reconstrucción 3D) se ha introducido el método RanSaC (Random Sampling Consensus) como el procedimiento más robusto para estimar la matrix fundamental y la matrix esencial asociadas para la Reconstrucción 3D a partir de dos vistas.

La estimación de tensores se lleva a cabo mediante procedimientos de voto. Habitualmente, se supone que que las transformaciones que afectan a los tensores son regulares, es decir, de rango máximo. Una extensión que incluye casos degenerados correspondientes a endomorfismos de un espacio vectorial se pude ver en [Fin20] [22], donde la clave para controlar posibles degeneraciones asociadas al rango de la matrix está dada por el estudio de la topología analítica local para las potencias exteriores de la matriz que representa el endomorfismo. La extensión a álgebras graduadas más generales es casi obvia y se desarrolla en un trabajo conjunto con Z.Hou (Technological Univ. of Guangzhou, 2021).

Los métodos tipo RanSaC se extienden de forma natural para la estimación de otras “cantidades” vinculadas no sólo a la Reconstrucción 3D, sino al tensor de estructura del movimiento o del reconocimiento de la forma. Algunas de las variantes más significativas para el modelado 3D se basan en la introducción de funciones de importancia (ImpSac) o la Maximización de la Verosimilitud (MLESaC) como extensión de los métodos Bayesianos. Estos métodos se detallen en el cpaítulo 2 de este módulo. Los métodos introducidos en [Fin20] se pueden aplicar asimismo al contexto en el que los endomorfismos actúan no sobre un espacio vectorial, sino sobre espacios de distribuciones parametrizadas dentro dle contexto de la Teoría Geométrica de la Información [Ama16] [23]

0.2.3. A fields-based approach

La mejora en la calidad de la información proporcionada por los sensores y la primera fase de muestreo requiere la aplicación de técnicas de Optimización. Hay diferentes estrategias para Optimización. Así, p.e. la Optimización Geométrica resulta útil para el alineamiento (registering) de nubes de puntos capturadas desde diferentes localizaciones:

- Los campos escalares son funciones $f : B \to \mathbb{R}$ definidas sobre un espacio base B (una variedad suave M o algebraica X, un espacio de funciones, p.e.) y admiten formulaciones analíticas o probabilísticas.

- Los campos vectoriales asignan a cada punto $b \in B$ un vector variable $\mathbf{v}_b$ que se puede interpretat como un vector tangente a una trayectoria γ descrita por $b \in B$.

- Los campos co-vectoriales asignan a cada punto base una forma lineal cuya evaluación en $b \in B$ se puede interpretar como una “restricción variable”.

El *pegado de datos locales* dados por campos, se lleva a cabo usando *funciones de transición* $f : U_i \cap U_j \to G$ donde G es un grupo. El caso clásico en Física corresponde a grupos clásicos (subgrupos del grupo lineal general que conservan ujn tensor). En Ingeniería es necesario extender este enfoque a grupos infinito-dimensionales que puedan incluir C^r-equivalencias. Ambos tipos de transformaciones se denotan genéricamente como transformaciones gauge. Cuando $r = \infty$ o $r = \omega$, la linealización del grupo de difeomorfismos o de transformaciones bianalíticas en el elemento neutro da el Grupo Lineal General. Por

[22] J.Finat and J.Delgrado -del-Hoyo: “Complete Endomorphisms in Computer Vision”, ArKiv, February, 2020.

[23] S.Amari: *Geometric Information Theory*, Springer-Verlag, 2016.

ello, el enfoque topológico en términos de C^r-transformaciones es la extensión natural del caso clásico.

Aunque están definidos localmente, la existencia de una C^r-estructura sobre B permite pegar los datos locales y obtener una descripción global. La gestión conjunta de los datos locales se lleva a cabo mediante operadores integrales. La estimación de los campos más significativos para un problema se formula en términos de Optimización que proporciona un marco común para el enfoque "determinista" y el "probabilista". Frecuentemente, los procesos de Optimización están vinculados a la minimización de funcionales integrales asociados a diferentes tipos de campos. fundamental en aplicaciones de Diseño a Ingeniería.

La conexión entre los enfoques geométrico y analítico corresponde a la interpretación de los campos como secciones de fibrados vectoriales o, con más generalidad, fibraciones topológicas. Esta interpretación proporciona el nexo entre los aspectos locales y globales tanto en el contexto geométrico-funcional (enfoque top-down) como en el de Estadística multivariante (enfoque bottom-up). Los fibrados tangente y cotangente (cuyas secciones son campos vectoriales y co-vectoriales, respectivamente) proporcionan un soporte para la linealización de estructuras cuyo estudio se lleva a cab en el espacio total TM del fibrado tangente τ_M (o su dual) al que se llama Espacio de las Fases y se denota mediante P (Poincare).

lamentablemente, en las aplicaciones a Ingenierías hay multitud de fenómenos cuya linealización no explica de forma satisfactoria la evolución del sistema. Desde el punto de vista analítico, hay que considerar "derivadas de orden superior"; un lenguaje más intrínseco se ha desarrollado enb el capítulo 2 del módulo A_{41} (Topología Diferencial Básica) en términos de espacios de jets. Desde el punto de vista geométrico, una estrategia más sencilla consiste en analizar la "evolución" espacio-temporal de las curvaturas que se desarrolla en el capítulo 3.

La estimación de los diferentes tipos de curvatura (media y total para superficies, p.e.) y sus correspondientes flujos presenta irregularidades que es necesario modelar usando "flujos de curvatura" (el flujo de Ricci es especialmente apropiado en Geometría Conforme, p.e.). La estimación de los flujos y la gestión computacional de las irregularidades presenta problemas no elementales en relación con fenómenos de propagación y restauración (capitulo 5) para la reconstrucción de modelos realistas (capítulo 6). La utilización de técnicas de Análisis Numérico proporciona métodos efectivos para la resolución aproximada de funcionales de Optimización; en particular, los métodos basados en Elementos Finitos (FEM) juegan un papel importante.

Métodos basados en campos escalares

En el contexto suave, un campo escalar real es la versión local de una función $f : M \to \mathbb{R}$ sobre una variedad suave M (o sobre una variedad o espacio X más general). El pegado de datos locales se lleva a cabo usando cartas (U_i, ϕ_i) asociadas a un recubrimiento $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ del espacio base. La minimización de un funcional integral se puede considerar como un problema de optimizaicón sobre un espacio de funciones; ejemplos significativos aparecen asociados a la minimización de funcionales tipo distancia, energía o curvatura para la Geometría, la Cinemática y la Dinámica, respectivamente.

El caso más favorable corresponde a funciones de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ sobre una variedad compacta M. Las propiedades de las funciones de Morse se han descrito en A_{41} (Topología Diferencial Básica) y B_{13} (Computational Differential Topology). Especialmente significativas son las que corresponden a la recuperación de la topología de M a partir de las hipersuperficies de nivel $f^{-1}(r)$ y su modificación al atravesar los puntos críticos. Ejemplos significativos de funciones (o con más generalidad funcionales integrales) corresponden a la altura, la profundidad o la distancia orientada en Geometría, la Energía en Cinemática o las Curvaturas en Dinámica.

La detección de puntos críticos se puede ver como un problema de Optimización. Interesa desarrollar una versión computacional. Los casos lineal y convexo se han desarrollado en B_{11}(Geometría Computacional). Recordemos que la idea básica para estimar una función objetivo $f : X \to \mathbb{R}$ sobre un espacio de búsqueda X consiste en diseñar una estrategia que permita minimizar el "número de llamadas" (procedimientos recursivos) a la función f para un ajuste por debajo de un umbral. El espacio de búsqueda puede ser discreto vs continuo, finito vs infinito, geométrico vs funcional, etc.

El enfoque geométrico está ligado a la invariancia de la función f con respecto a la acción de un grupo G. En la aproximación algebraica al problema, dicha función es un polinomio de grado bajo verificando condiciones de incidencia o de proximidad con respecto a un número bajo de puntos de control (en la versión dual se reemplazan las condiciones de incidencia por condiciones de tangencia). Los casos diferencial o analítico se abordan mediante técnicas de aproximación. En el capítulo 4 se muestra la utlidad de los splines para aproximar funciones más complicadas; esta idea proporciona una motivación para el desarrollo de versiones G-equivariantes de splines.

La elección del grupo estructural condiciona el marco geométrico y recíprocamente (Programa de Erlangen de F.Klein, 1873). Las estrategias básicas de diseño basadas en puntos de control tienen una limitación importante en relación con las transformaciones birracionales. Esta limitación impide un tratamiento correcto de figuras tan simples como un semicírculo o una esfera, p.e. [24]. La anulación del denominador da lugar a la aparición de excepciones por todas partes que sólo se pueden resolver "añadiendo un punto apropiado" en el infinito. Para evitar la casuística inherente a estos argumentos, resulta más razonable formular el diseño en el marco proyectivo desde el principio. La aportación de [Fio92] consiste en reemplazar puntos de control en el infinito por vectores en el

[24]Una solución geométrica consiste en incorporar las transformaciones conformes, pero el contexto moderno para este enfoqu3e viene dado por el Álgebra Geométrica que requiere prerrequisitos adicionales.

Por ello, aquí se desarrolla un enfoque más convencional.

infinito. algo que es completamente natural en el marco proyectivo (ver capítulo 6).

Un ejemplo típico está dado por la identificación de características de la forma con respecto a la localización (posición y orientación) del observador (cámara ó dispositivo láser, p.e.) o el factor de escala; en este caso G es el grupo de semejanza. Una condición menos estricta está dada por la invariancia con respecto a la traslación; en el marco conservativo (conocimiento de la expresión local de la función), el problema se resuelve utilizando campos tipo gradiente a lo largo de la dirección (eventualmente variable) de la traslación. En contextos más generales, se reemplaza la invariancia con respecto a la traslación por la invariación con respecto a un grupo G (el grupo estructural de un fibrado principal en Física de Partículas o en Robótica, p.e.).

En el caso más simple, la adaptación de la condición de invariancia (la solución óptima como elemento fijo por la acción de un grupo) a la geometría del soporte se lleva a cabo en términos del campo gradiente que representa el campo de normales a la hipersuperficie $f = 0$. Los algoritmos de back-propagation vinculados a caminos de descenso más rápido (con respecto al campo gradiente) resuelven el problema en el caso convexo. El caso no-convexo requiere estrategias alternativas (tipo min-max p.e. para facilitar aprendizaje semi-automático) que se describen en el capítulo 6.

Cuando la función de optimización (o la del control asociado) presenta comportamientos variables (diferentes funciones para cada abierto), es necesario introducir hipótesis simplificadoras descomponiendo el espacio en el que toma valores en fases que pueden presentar un (de-)crecimiento monótono controlado por funciones de grado bajo. Si el grado es ≥ 3, aparecen regiones no-convexas en las que los métodos tradicionales no funcionan. Las técnicas tipo min-max extienden el enfoque tradicional para el caso convexo.

La optimización simultánea con respecto a varias funciones presenta una complejidad bastante mayor. De entrada, hay que reemplazar el campo gradiente por la diferencial de la aplicación que está representada localmente por la matriz jacobiana. En este caso, no se puede esperar una solución única. En el mejor de los casos se tienen diferentes soluciones locales tales que ninguna es mejor que las otras. En algunos casos es necesario recurrir a la heurística, la experiencia del usuario o una extrapolación basada en la aplicación de criterios de AI a la simulación de comportamientos.

Una alternativa que se explora en las fases de modelado avanzado corresponde a la introducción de criterios de optimización min-max que pueden ser aprendidos por sistemas inteligentes. Estas estrategias etiquetadas como black-box son de uso frecuente en AI. Los avances más recientes (Glyde, NeRF) en el marco Deep Learning permiten no sólo aprender, sino generar nuevos contenidos gráficos a partir de los ya aprendidos que incluyen aspectos geométricos y radiométricos. Una presentación de los aspectos básicos de AI relevantes para el caso planar estático se introduce en el capítulo 8 de este módulo.

Los próximos pasos afectan a una extensión de estos métodos al caso volumétrico y a mini-secuencias de video con un contenido similar, actualmente en desarrollo. En el futuro se espera integrar todos estos desarrollos para la producción de Video 3D introducidos en el módulo B_{26} de la materia B_2 (Computer Vision). La extensión a video 3D abarataría los costes de producción multimedia con aplicaciones insospechadas para la industria de entretenimiento. La estrategia que se propone en estas notas se basa en el uso de campos tensoriales más generales para representar cantidades cambiantes y sus restricciones de manera simultánea. Los desarrollos recientes de TensorFlow con implementación eficiente en Pytorch facilitan el soporte computacional.

Métodos basados en campos co-vectoriales

Las restricciones cambiantes se representan mediante campos co-vectoriales; en el marco diferencial están representados por formas diferenciales, cuyos productos permiten controlar la variación espacio-temporal de "cantidades" k-dimensionales. Son de uso común en Matemáticas y en Física Teórica desde mediados del siglo XX tanto en sus aspectos locales (los campos como "secciones del fibrado cotangente") como globales (integración de formas en el marco diferenciable o de distribuciones en el marco estadístico, p.e.).

La unificación de aspectos locales y globales de Análisis Multivariante se lleva a cabo en el marco del Análisis Global A_4, con su correspondiente versión en Probabilidad Geométrica o, más recientemente, en el marco de la Teoría Geométrica de la Información (GIT). Un objetivo consiste en extender esta teoría al marco Topológico (TIT) y al Cinemático (KIT). En estas notas se introducen algunos elementos básicos para su aplicación a las diferentes áreas de Ingeniería presentadas en las materias B_i para $1 \leq i \leq 4$.

Frecuentemente, en el marco CAM se requiere que la pieza pueda soportar diferentes tipos de esfuerzos mecánicos (tracción ó compresión, p.e.) o que verifique ciertas ecuaciones del movimiento (debido a su uso en dispositivos con una dinámica compleja). El grupo estructural G está asociado a la invariancia de las restricciones asociadas a elementos volumétricos (eventualmente de grado superior) ó bien a la invariancia gauge asociada a comportamientos controlados por difeomorfismos (correspondientes a direcciones actuando de forma simultánea). Las restricciones se representa mediante formas diferenciales, mientras que las posibles trayectorias simultáneas se representan mediante campos vectoriales (en el marco suave ideal ambas son duales entre sí).

Ello motiva que la Optimización basada en el campo gradiente de una función deba ser reemplazada por el soporte de (la parte integrable) de una distribución $\mathcal{D}$ de campos vectoriales o de un sistema $\mathcal{S}$ de formas diferenciales. La dificultad radica en que, habitualmente, se desconoce la expresión explícita tanto de $\mathcal{D}$ como de $\mathcal{S}$. Por ello, ambas deben ser "inferidas" a partir de la información estadística contenida en el muestreo realizado. Una estrategia razonable consiste en realizar una inferencia del soporte (usando máxima verosimilitud, p.e.) a partir del muestreo.

Desde un punto de vista estadístico, el método RanSaC (Random Sampling Consensus) proporciona el punto de partida para le estimación de "cantidades invariantes". Este método se ha introducido en el módulo B_{22} para la estimación de la Matriz Fundamental y la Matriz Esencial en Reconstrucción 3D a partir de pares de vistas. La extensión del método RanSaC a funciones (cuyo gradiente es la solución apropiada para el campo gradiente) da lugar a procedimientos ImpSaC. La extensión a variedades más generales que las hipersuperficies (correspondientes a los lugares de ceros de una función) dan lugar a procedimientos MLESaC. Ambas variantes para las estrategias muestreo se desarrollan en el capítulo 2 de este módulo.

A pesar de las mejores propuestas por las variantes escritas de RanSaC, ninguno de ellos proporciona información métrica sobre las posibles funciones de densidad que se pueden asociar a los datos. Para obtener dicha información, es necesario recurrir a la Teoría Geométrica de la Información [Ama16]. En este contexto, se dispone de una métricads_F^2 (Fisher-Rao) que dota de una estructura de variedad Riemanniana al conjunto de pdf (proabiblity density functions). Ello hace posible una comparación local en términos métricos para distribuciones de datos, así como la construcción de conexiones (para trasladar propiedades entre diferentes "puntos" del soporte).

Finte Element Methods (FEM)

In practical Engineering problems it is not easy to find compact analytic expressions to express the shape or eventually deformed materials w.r.t. different kinds of mechanical stress, strain stiffness, heat transfer or mass transport. The evaluation of deformations is necessary to recover the original shape (by using deposition, injection, welding tasks) in restoration strategies to correct the observed damages in mechanical pieces (see chap0ter 5 for more details). To solve these problems the introduction of FEM (Finite Element methods) from the 1940s provide the best known solution to incorporate non-linear dynamic effects.

According to the geometric decomposition in tangential and normal components to a manifold or, more generally, to a variety, one has similar notions in Mechanics of Materials:

- *Stress* is the intensity of force per unit are. *Normal stress* is the intensity of force perpendicular to or normal to the section at a point. *Shear stress* is the intensity of force parallel to the plane of the elementary area.

- *Strain* is the deformation per unit length. *Normal or extensional strain* is the change in length per unit of initial gage length. *Shear strain* is the change in in initial right angle between two imaginary planes in a body.

The relationship between stress and strain is called *Constitutive Relation*. The most favorable case corresponds to Linear Elasticity where stress is directly proportional to strain, and one can apply the Hooke's law, Fore inelastic or plastic materials, there can appear permanent deformations to be estimated and modelled. The *transformation of stress in strain* by using deformations whose linearization is expressed in matrix terms corresponding to groups of transformations.

Most interesting problems in Engineering of Materials involve to non-linear deformations. Usula approaches in Geometry and Topology suppose that structures are at least of class C^1 (continuous derivatives). From a experimental viewpoint, one has only a finite collection of PL-elements to be connected between them. Integrability of finite infinitesimal deformations becomes a non-trivial problem. Relation between continuous and discrete aspects are not elementary. In particular, integrability issues must be reformulated in discrete terms. There is no a unique mathematical expression, because it depends on manterials. Thus, it must be estimated by using FEM

Typical *structural aspects* where the FEM is meaningful are:

- *Stress analysis* including strain, constitutive relation and transformations for the non-linear analysis. Some eventually complex situations involve to truss and frame analysis and stress concentration problems at potentially critical elements.
- *Buckling*, i.e. the sudden change in shape (deformation) of a structural component under load.
- *vibration analysis* with the corresponding analysis for stability vs resonance issues. [Sch86]

Typical *non-structural aspects* where the FEM is meaningful are:

- *Heat transfer* including generation, use, conversion, and exchange of thermal energy (heat) between physical systems. The Heat Equation plays a fundamental role.
- *Fluid flow* including seepage through porous media. Foundations have been developed in the module B_{15}
- Distribution of *electrical or magnetic potential* having in account Maxwell laws and basic properties of *curl* operator.

All of them require more advanced knowledge of mathematical-physics. The most basic aspects are developed in the Chapter 5.

To ease the computer implementation and in view of the larger complexity of tensor maps, to start with one adopts a matrix notation for controlling small variations of "quantities" at control points of a quadrangular deformable mesh. One inserts a small displacement function with each finite element (corresponding to a quadrangular cell, e.g.) representing the data distribution according to the chosen sampling.

The small displacements are interpreted in terms of a local system of forces which are the responsible of observed deformations. In particular, the "aggregated work" performed by the system allows a re-interpretation in terms of more manageable energy functions. In this way, one can apply standard minimization principles to the corresponding variational problems.

In absence of previous information about the energy functionals (or other more general Hamiltonian functions $H : P \to \mathbb{R}$, where $P = TM$ is the Phase space), one can apply weighted residual methods (Galerkin, e.g.) to any PDE. From the geometric viewpoint, one must paid attention to the behavior of meaningful curves (corresponding to boundaries or alternately sections) and their geometric characteristics appearing in Differential Geometry.

In a complementary way, the analysis of invariant data for pieces of surfaces (total and mean curvatures, typically) provide the for controlling propagation models on surfaces for boundary-based representations. Inversely, the lack of invariance shows the presence of surface irregularities or defects in materials. Again, the inverse problems are the most interesting in Engineering.

A tensor field based approach

A general principle of these notes consists of all the above issues can be described in tensor terms. Roughly speaking, a tensor is a linear combination of elements which are given as a product of scalar, vector and covector fields corresponding to "variable weights", trajectories and constraints, respectively. All componentes are transformed according to usual rules of differential calculus (Inverse Function Theorem, Jacobian matrix and its transposed). One must have in account that all components of tensors must be estimated in a probabilistic framework (in a Bayesian or more structured pdf framework for parameterized statistics, e.g.)

For simplicity, we assume that the components of the tensor are uncoupled; in other words, one can perform a separate estimation for each component. Once done, its formal product gives rise to a tensor in a probabilistic space that extends the GIT (Geometric Information Theory) framework. The general strategy that is adopted for the estimation of a tensor is given by voting procedures, similar to those described in various modules of B_2 (Computer Vision). The largest advantage of decoupling strategies consists of "separating" procedures for the estimation of scalar, vector and co-vector components, even if some of them display a non-linear behaviour which can require Independent Component Analysis instead of Principal Component Analysis.

Unfortunately, the decoupling principle is not fulfilled in complex situations, which can requier fines strategies. Typical examples have appeared in the precedent paragraph in regard to inelastic or plastic materials, e.g. In these cases, it is necesary to combine a FEM based approach with a topological analysis of deformations (going from stability to critical situations) focused to achieve stability situation under extreme conditions. Even so, the interaction can be represente din terms of interactions between information blocks (represented by block diagonal matricies). Interactions are represented by rectangular matrices away from the diagonal, by following the same reasoning scheme than in generalized tangent spaces to Flag Manifolds-

As a provisory conclusion, the mechanical stresses supported by mechanism parts and the propagation properties (thermal to prevent heating or acoustic to evaluate vibrations, e.g.) can be described in tensor terms, also. For this reason, the estimation of the corresponding tensor is crucial to evaluate the "good behavior" in the medium or long term of the produced or restored parts. The information on the expected geometry of the support not only facilitates visual navigation (through the corresponding graphical interface), but also the "transfer" of mixed quantities through a connection defined in this case on the space of the pdf (probability density function).

0.2.4. Interactive tools

Modelling tools in Computer Graphics have iun account a very small portion of the above considerations. Thos module provides the foundations for developing some extensions to include more advanced functionalities in regard to design, with a view to more general approaches to Computer Graphics. In some aspects, they can be understood as dynamic tools, because very often, one introduces initial and boundary conditions, and one complete results by adding elements corresponding to both of them. Typical examples are given by Bezier curves or more general splines (products of Bézier curves), where one starts with initial and end points, and one inserts additional elements in an interactive way.

The above geometric principles are extended to production environments in Manufacture, where one needs a previous evaluation and estimation of mechanical effects linked to theoretical mechanical models and the Mechanics of Materials. Theoretical Mechanics has been introduced in several modules of Differential Geometry A_1 and Computational Mechanics of Continuous Media B_1. Mechanics of Materials can be considered as a branch of applied mechanics that deals with the behavior of various ´load-carrying components. It involves analytical methods for determining strength, stiffness and stability.

The design of components for mechanical devices requires a careful previous analysis including structural mechanical aspects which involve Mechanics of Materials, Structural Analysis and Reliability; furthermore, characteristics of materials (steel and concrete are some of the most relevant ones in Civil Engineering) pose very specific constraints to have in account. Much more details can be found in Chapter 44 and ff. of [Che95] [25].

In view of the orientation towards Computer Graphics of this matter, along these notes we will restrict ourselves to some basic mechanical aspects in regard to the production of "toy models" for CAM design. The irruption of 3D printing tools opens the door for advanced prototyping of pieces. Currently, there

[25] W.F.Chen (ed): *Handbook of Civil Engineering*, CRC Press, 1995.

are some limitations which are related with characteristics of materials and to reproduce complex variation of curvatures in surfaces. Even so, they provide 3D representations which are very useful as preliminary prototypes of industrial pieces. In this subsection, one displays some applications which require still the use of high interactive by the side of the designer.

Sculpting

Digital sculpting, also known as sculpt modeling or 3D sculpting, is the use of software that offers tools to push, pull, smooth, grab, pinch or otherwise manipulate a digital object as if it were made of a real-life substance such as clay. The main applications are linked to the multimedia industry and biomechanics, but they anticipate possible industrial applications to be developed in the next future [26]

Our approach is an extension to the 3D case of morphological operators which are commonly used in Image Processing. Recordemos que el objetivo de la morfología matemática consiste en extraer una "forma" a partir de datos discretos en $\mathbb{R}^d$ usando diferentes *operadores* (conjuntistas, funcionales, vectoriales. Una estrategia básica consiste en

1. Reformular operaciones básicas (Boole) usando la representación *conjuntista* de RoI en la *imagen binarizada.*

2. Modificar el dominio en una *imagen en grises* usando operadores morfológicos definidos mediante *funciones* .

3. Prolongar el enfoque estático del punto anterior a (distribuciones de) *campos vectoriales* como p.e. el campo gradiente ∇f.

Details and algorithms for the 2D case are developed in the Chapter 3 of the module B_{21} (Image Processing and Analysis) of the matter B_2 (Computer Vision). Basic morphological operators are given by Erosion and Dilatation. Their composition uses algorithms such as

- *Minkowski sum* for aggregation of an "structuring element" by generating "parallel boundaries" to the original ones, e.g. One must be careful with the generation of cuspidal singularities to be removed or smoothed. It provides the support to define the dilation operator.

- *Minkowski difference* for thinning objects by using a structuring element, also; one must be careful with the generation of self-intersections to be removed or smoothed. Furthermore, the Minkowski difference is not the opposite of the Minkowski sum. It provides the support to define the erosion operator.

[26] https://en.wikipedia.org/wiki/Digital sculpting

- *Symmetric difference* to manage visible zones in partial occlusions, e.g. One must careful with the management of disconnected pieces making part of the original objects or scenes.
- *Complementary* of a subset w.r.t. to other which can be described in terms of the symmetric difference.

In the smooth category, Minkowski sums and differences are the discrete versions of some particular cases of outer and inner tubular neighborhoods; both of them can acquire "singularities" in the discrete domain. A simple classical well known example for the continuous case is given by "translations" of the cycloid (locus described by the extreme of a radius for a circle) giving epicylcoids and hypocyloids (both have singularities). Erosion and dilation are associative; furthermore each one is distributive w.r..t the other one. In more formal terms, one says that the collection of subsets in the ordinary plane or spaces in a distributive lattice w.r.t. erosion and dilation.

The composition of basic dilation and erosion operators gives the Opening and Closure operators. They have been introduced in the in the chapter 3 of B_{21}, and an adaptation to Computer Graphics will be developed in the first chapter. More complex morphological operators (such as the watershed, e.g.) are very useful for sculpting folds linked to clothes or sculptures, e.g.

Dynamic tessellation

Static tessellations are commonly used from the Antiquity to represent complex coverings of figures by means different kinds of polygons or polyhedra. The most complete classical theoretical reference is [Gru89] [27]. Propagation phenomena can give irregular patterns, for which usual triangular or quadrangular lattices can not be appropriate. Thus, one needs more flexible representations from a topological viewpoint, able of incorporating irregularities in tessellations.

A related problem is their computational management. Following Nvidia developers "the easiest way to leverage GPU-based tessellation is computing dynamic LODs for your geometry on the fly. For the most part this is pretty straightforward to implement (once you learn the API). However there are a few tricks that are worth discussing such as the best way to determine " tessellation factors"

UV texture painting

The Computer Analysis of paintings poses several problems to avoid damages in the support. Ultraviolet devices provide a classical approach which is often used for Restoration or to identify characteristics of the support. An extension of this approahc is used also for detecting non-visible elmeents or

[27] B.Grunbaum and G.C.Shephard: *Tilings and Patterns*, W,h,Freeman and Co, 1989.

structures underlying the visible support. These techniques are very useful for 3D Reconstruction and view synthesis.

However, in this paragraph we use UV in a quite different sense, which is nearer to the use of (u, v) coordinates giving local parameterization of a Monge surface as the image of a local map $(u, v) \mapsto X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$. A basic strategy consists of generating cuboidal representations on which one remaps a planar texture according to the geometry of surface and the ambient lightening information. Some steps for a typical pipeline are the following ones:

1. Introduce an oriented cube as a reference for localization in $\mathbb{R}^3$.
2. Generate a plane texture and wrap the texture on the standard cube.
3. Construct a voxel map by adapting the cloud of 3D points.
4. Lift the texture by applying the second step to the inverse of the Monge map.
5. Smooth the enveloping surface (Marching Cubes algorithm, e.g.) if necessary
6. Modify the texture by following increasing complexity patterns (affine vs conformal transformations, e.g.) for correcting perspective vs curvature distortions.

Usual approaches to texture maps are described in terms of radiometric patterns [28]. A classical approach was developed in the eighties by Gabor by using a very casuistic methodology. A more structured approach by using stochastic tensor fields to describe textures is developed in the chapter 8 of the module B_{21} (Image Processing and Analysis) of the matter B_2 (Computer Vision). An advantage of tensor fields approach is the adapatability to any surface by using a “connection” for translating the texture along surfaces or volumes.

Cavity painting

The alternance between convex and concave zones gives partially occluded regiones which is necessary to complete by adding information. Very often 3D laser devices are not enough flexible to capture information between parabollic curves (spearating elliptic from hyperbolic regions), or crests curves as singular loci for algebraic surfaces, e.g. Both of them appear as the discriminant loci corresponding to projections from a point representing the emitter or the camera’s center $\mathbf{C}$ for range or image-based capture devices.

Our strategy (implemented in UvaCad) consists of the following steps:

[28] See links at https://cgifurniture.com/3d-texturing-tools-top-10/ for a catalogue to synthesis of textures.

1. Laser scanning of the 3D object from a small network of localizations around the object (standard rules of Photogrammetry are appropriate for the experimental set-up).
2. Make a complete covering of the object by using calibrated cameras.
3. Align the cloud of points according to each image.
4. Generate a triangular mesh on the 3D cloud of points.
5. Project the triangulation on the image.
6. Capture radiometric information supported on the planar triangulation in the image.
7. Lift the radiometric information (color vs textures) to the space triangulation.
8. Match local data by extending the parser functionalities.

In the next future, we plan to complete the above scheme by automating the choice of the relative localization (position and orientation) of the cloud w.r.t. each one of the digital images covering the object.

0.3. Methodology

Along this module we develop a feedback between top-down and bottom-up approaches. The former ones are an atension of Linear Geometries to curved objects, which make use of some basic resources arising from Algebraic Geometry and Differential Geometry for the static case; in presence of motion, we use some rudiments of Analytical Mechanics in the Hamilton-Jacobi for differential properties, and Euler-Lagrange formulations for integral properties. In absence of external forces both are equivalente between them.

Interaction aspects are incorporated in a dynamical framework with several increasingly complex descriptions going from basic action-reaction Newtonian models to more sophisticated mechanical models with basic elements of Classical Analytical Mechanics and Quantum Mechanics. Some basic examples to have in mind arise from the waves-based and particle based models, which are dual between them in the quantum framework. A simplification of this "duality" can be applied to continuous vs discrete approaches in Engineering.

In a complementary way, the statistical approach plays a fundamental role providing the keys for organizing unstructured huge data. To achieve this goal one uses tools going from sampling to higher order Statistics. Structural connections between geometric and statistical approaches are developed in the Geometric Information Theory (GIT) on spaces of parametrized distributions [Ama16].

The extensions of GIT to Topological and Kinematic frameworks are labeled as TIT and KIT respectively, and will play an importante role for several aspects along this module. In the GIT framework the support is given by a collection of pdf which are the "points" of the ambient space. Clustering strategies for scans of real objects generate collections of pdf for the information obtained. The superposition of simplices (generated by nearest neighbors criteria, e.g.) on the discrete set of pdf generates a continuous simplicial structure, which supports propagationm interpolation and restoration models for lacking or incomplete information.

This reasoning scheme provides the starting point for Topological Information Theory (TIT). The time variation of this structure provides the foundation for Kinematic Information Theory (KIT) in Engineering. Next, we give some additional details which are related to simpler aspects of Computer Graphics.

0.3.1. A geometric approach

The basic scheme of Computational Geometry B_{11} is articulated around models, data treatment and algorithms. Similar schemes have been developed in Computational Algebraic Topology B_{12}, Computational Kinematics B_{14}, Computational Dynamics B_{15} and Advanced Visualization B_{16} in the matter B_1. An adaptation of this schemes is developed in ther matters B_2 (Computer

Vision) and B_3 (Robotics).

The adaptation of the above general scheme to the design in Computer Graphics is focused towards the shape control (top-down approach), an estimation of data and its relevance for different representations (involving interoperability), and an efficient design and implementation of algorithms for the management of realistic (eventually deformed) surfaces. Neither of these three problems is quite solved, currently.

Synthetic vs Analytical Approach

The modeling discussed in these notes concerns the development of tools that facilitate the production of static or moving *shapes nD* for low values ??of n; we will usually assume that $n = 2$ or $n = 3$, although in more advanced phases we will also consider the case $n = 4$ in relation to the animation of possibly deformable volumes. Leaving radiometric modeling and associated rendering effects aside, classically there were two main *types of modeling*: synthetic and analytical.

- The *synthetic approach* to modeling is vector or symbolic; uses Computer Graphics tools to generate geometric shapes interactively by the user. These shapes include a large number of geometric primitives related to rigid or articulated objects that are controlled by surfaces and, in a complementary way, transformations that allow the appearance of the components to be altered without modifying their relative arrangement, according to constraints (given by covectors).

- The *analytical approach* to modeling uses a description in terms of local equations. It is assumed that the inputs are initially discrete and come from image (graphics, images, video sequences) or range (point clouds, tomography, infrared) processing and analysis. Their clustering is done using semi-automatic fitting tools to geometric primitives of low degree ≤ 4. The assembly uses different types of constraints.

The approach developed in this module starts from the interrelation between the synthetic and analytical approaches, and tries to develop a feedback between them using (multi)vector calculus, adjustment and reprojection. The development of Computer Graphics since the end of the 1980s has made it possible to replace Descriptive Geometry and Industrial Design with tools based on the control of conditions of incidence and tangency with respect to points and lines that approximate the objects sought interactively.

The displacement of the control elements (points and lines, typically) translates into different types of rigid transformations (rotations and translations), of similarity (modification of the scale), affine or projective. The representation of transformations that affect figures as simple as semicircles or spheres requires the introduction of control points at infinity that only make sense in the projective framework. The transformation of lines into circles or vice versa was classically done in terms of inversions; Conformal Geometry provides a more natural frame. Its reformulation in terms of Geometric Algebra (or Clifford's) allows different approaches to be unified

The control of non-linear shapes must take into account the variation of the tangential information (which intrinsically characterizes the manifold in the non-singular case) and the normal information (which characterizes the propagation phenomena associated with eventually changing shapes). A curve with an inflection point (such as $y = x^3$) presents a smooth behavior for the variation of the tangent, but not for the variation of the normal that is annulled at the point of inflection (separating the concave zone from another convex).

Likewise, the envelope of the normals can present cusp-type singularities, even for the simplest non-degenerate conics of the plane. Therefore, control of the shape for the normal component is non-trivial. The study of normal envelopes in Geometrical Optics began with the works of Newton and Huygens at the end of the 17th century and the beginning of the 18th century [29]

Surface vs volumetric based representations

The boundary ∂T of a three-dimensional solid T is a surface S. To fix ideas, we will restricty ourselves to parameterized models given as a product of two or three rational curves. Most 3D models can be divided into two categories:

- *Solid modelling* which are focused towards three-dimensional representations as solids, such as T-splines given by products of three rational curves or more general curves defined by incidence and tangency conditions w.r.t. points and lines, respectively. Some advanced applications involve to the design of complex internal organs such as the abdominal cavity or the human heart, e.g.

- *Shell or boundary-based representations* (B-rep) involving a finite collections of surfaces bounding a solid, such as B-splines given as tensor products of two snakes or more general curves defined by incidence and tangency condiciones w.r.t. points and lines. They are commonly used in most applications for modeling industrial pieces or scenes, e.g.

Solid and shell modeling can create functionally identical objects. Differences between them are mostly variations in the way they are created and edited and conventions of use in various fields and differences in types of approximations between the model and reality.

Shell models have initially a structure as a simply connected manifold (having no holes or cracks in the shell) to be meaningful as a real object. In a shell model of a cube, the bottom and top surface of the cube must have a uniform

[29] For more details and references see the module A_{43} (singularities of functions) of the matter A_4 (Differential Topology).

thickness with no holes or cracks in the first and last layer printed. Polygonal meshes (and to a lesser extent subdivision surfaces) are by far the most common representation. Level sets are a useful representation for deforming surfaces which undergo many topological changes such as fluids.

The process of transforming representations of objects, such as the middle point coordinate of a sphere and a point on its circumference into a polygonal representation of a sphere, is called a spherical tessellation. This step is used in polygon-based rendering, where objects are broken down from simple geometric primitives (spheres, cones, cylinders, e.g.). Their extension to more general surfaces uses conformal representations for self-adaptation to variable curvatures.

Triangular meshes are the most popular ones, because they adapt bettern than quadruangular meshes and they have proven to be easy to rasterize (the surface described by each triangle is planar, so the projection is always convex). Unforunately, triangular meshes are not ordered nor can be parameterized, contrarily to quadrangular meshes. More general p1952olygon representations are not used in all rendering techniques, and in these cases the tessellation step is not included in the transition from abstract representation to rendered scene.

Modelling processes

There are three popular ways to represent a model:

- *Polygonal modeling:* Points in 3D space, called vertices, are connected by line segments to form a polygon mesh. The vast majority of 3D models today are built as textured polygonal models, because they are flexible, because computers can render them so quickly. However, polygons are planar and can only approximate curved surfaces using many polygons.

- *Curve modeling*:? Surfaces are defined as the interior regions bounded by curves, which are influenced by weighted control points. The curve follows (but does not necessarily interpolate) the points. Increasing the weight for a point will pull the curve closer to that point. Curve types include nonuniform rational B-spline (NURBS), splines, patches, and geometric primitives

- *Digital sculpting:* Still a fairly new method of modeling, 3D sculpting has become very popular in the few years it has been around.[13] There are currently three types of digital sculpting:

  - *Displacement*, which is the most widely used among applications at this moment, uses a dense model (often generated by subdivision surfaces of a polygon control mesh) and stores new locations for the vertex positions through use of an image map that stores the adjusted locations.

- *Volumetric*, loosely based on voxels, has similar capabilities as displacement but does not suffer from polygon stretching when there are not enough polygons in a region to achieve a deformation.
- *Dynamic tessellation*, which is similar to voxel, divides the surface using triangulation to maintain a smooth surface and allow finer details.

These methods allow for very artistic exploration as the model will have a new topology created over it once the models form and possibly details have been sculpted. The new mesh will usually have the original high resolution mesh information transferred into displacement data or normal map data if for a game engine.

The modeling stage consists of shaping individual objects that are later used in the scene. There are a number of modeling techniques, including:

- *Constructive solid geometry*
- *Implicit surfaces*
- *Subdivision surfaces*

Modeling can be performed by means of a dedicated program (e.g., Blender, Cinema 4D, LightWave, Maya, Modo, 3ds Max) or an application component (Shaper, Lofter in 3ds Max) or some scene description language (as in POV-Ray). In some cases, there is no strict distinction between these phases; in such cases modeling is just part of the scene creation process (this is the case, for example, with Caligari trueSpace and Realsoft 3D).

Three-dimensional models can also be created using the technique of Photogrammetry with dedicated programs such as RealityCapture, Metashape and 3DF Zephyr. Cleanup and further processing can be performed with applications such as MeshLab, the GigaMesh Software Framework, netfabb or MeshMixer. Photogrammetry creates models using algorithms to interpret the shape and texture of real-world objects and environments based on photographs taken from many angles of the subject.

Complex materials such as blowing sand, clouds, and liquid sprays are modeled with particle systems, and are a mass of 3D coordinates which have either points, polygons, texture splats, or sprites assigned to them. More details about these topics are developed from the module B_{43} (Rendering) for radiometric properties, and B_{44} (Simulation and Animation) of this matter.

Some typical examples

There are a lot of examples where the above ideas haven been applied from the last decades of the 20th century. Some of them are related with *Human models* which have appeared already in several modules of B_2 (Computer Vision) in regard to motion tracking B_{23} and recognition issues B_{24}, e.g.) and B_3

(Robotics) in regard to Human Biomechanics B_{35}. Both of them are applied to the generation of *Virtual Actors* as typical advanced example of "characters"

The first widely available commercial application of human virtual models appeared in 1998 on the Lands' End web site. The human virtual models were created by the company My Virtual Mode Inc. and enabled users to create a model of themselves and try on 3D clothing.[14] There are several modern programs that allow for the creation of virtual human models (Poser being one example).

The development of cloth simulation software such as Marvelous Designer, CLO3D and Optitex, has enabled artists and fashion designers to model dynamic 3D clothing on the computer.[15] Dynamic 3D clothing is used for virtual fashion catalogs, as well as for dressing 3D characters for video games, 3D animation movies, for digital doubles in movies as well as for making clothes for avatars in virtual worlds such as SecondLife.

0.3.2. Basic geometric representations

Rational curves can be easily parameterized. The simplest cases correspond to plane conics; it suffices to trace out a pencil of lines through a point belonging to the conic to obtain a natural parametrization in terms of the other intersection point for the pencil of lines. Unfortunately, this is not a "natural" parameterization in terms of the arc length. In other workds, it has not good properties to be implemented in CNC machines. Furthermore, most rational curves of degree ≥ 3 are singular; typical examples are given by

- the nodal curve $y^2 = x^2 + x^3$ which is parameterized by the pencil of lines $Y = tx$ through the origin) and
- the Bernouilli's lemniscata $(x^2) + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ whose rational parameterization is given by the intersection with the pencil of curves $x^2 + y^2 = t(x - y)$ with center along the diagonal of the first quadrant through the origin)

Nevertheless the singularities, they are rational curves, i.e. birrationally isomorphic to the projective line $\mathbb{P}^1$. Hence, strategies to be developed must have in account possible apparition of singularities and methods for avoiding them or, preferably, their incorporation to the models. The first option is the most commonly used in Engineering, but it gives some problems when one consider the topology of possible degenerations, and the corresponding "limits" of curves in some kind of "moduli space" whose points represent curves of prefixed characteristics.

A more "compact presentation" is performed in terms of Bexier curves or snakes (first paragraph) which are nothing else than weighted rational curves with prescribed incidence and tangency conditions about control points and lines, respectively. The product of two or three snakes gives a B-spline surface or a T-spline threefold which are very useful for modelling of higher dimensional varieties. Bernstein polynomials provide a unifying algebraic language for a joint management. Some difficult problems concern to their estimation, basic topological properties (density, e.g.) or analytic issues (their behaviour under deformation, e.g.), which are developed at the Chapter 4 of these notes. In this subsection, we limit ourselves to insert some basic notions about these objects. More details and properties will be developed in the Chapter 4.

Snakes and Bezier curves

A *projective rational curve* of degree d is the image of the projective line $\mathbb{P}^1$ by the Veronese map $V_{1,d} : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^d$ given by

$$[x_0 : x_1] \ \mapsto \ [x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \ldots : x_0 x_1^{d-1} : x_1^d]$$

where the brackets denot homogeneous coordinates, i.e. they are defined up to scale. In the open subset $D^+(x_0) :: \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1 \ \mid \ x_0 \neq 0\} = \{(1, x) \in \mathbb{A}^1 \mid x = x_1/x_0\}$, the affine version $V_{1,d}^a$ of the Veronese map $V_{1,d}$ can be written as

$$\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^d \quad \mid \quad (1, x) \mapsto (1, x, x^2, \ldots, x^d)$$

The interval $[0, 1] \subset \mathbb{A}^1$ is parameterized by the affine coordinates $(t, 1-t)$ (barycentric coordinates). The image by the affine version of the unit interval $[0, 1]$ by the affine version of the Veronese map $V_{1,d}$ of degree d can be parametrized by

$$\Sigma_{i=0}^d t^{d-i}(1-t)^i$$

By taking $t \leqslant 1$, the formula can be expressed explicitly as follows :

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(t) &= \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} (1-t)^{d-i} t^i \mathbf{P}_i \\
&= (1-t)^d \mathbf{P}_0 + \binom{d}{1}(1-t)^{d-1} t \mathbf{P}_1 + \cdots + \binom{d}{d-1}(1-t) t^{d-1} \mathbf{P}_{d-1} + t^d \mathbf{P}_d, \quad 0 \leqslant
\end{aligned}$$

A *recursive definition* for the Bézier curve of degree d expresses it as a point-to-point linear combination (linear interpolation) of a pair of corresponding points in two Bézier curves of degree $d \geq 1$:

Let $\mathbf{B}_{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1, \ldots \mathbf{P}k}$ denote the Bézier curve determined by any selection of $k+1$ points. Then to start,

$$\mathbf{B}_{\mathbf{P}_0}(t) = \mathbf{P}_0 \quad \text{and} \quad \mathbf{B}_{\mathbf{P}_0}(t) = \mathbf{P}_0$$

and

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_d}(t) = (1-t)\mathbf{B}_{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_{d-1}}(t) + t\mathbf{B}_{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_d}(t)$$

We have

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^{d} b_{i,d}(t)\mathbf{P}_i, \quad 0 \leq t \leq 1$$

where the polynomials

$$b_{i,d}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{d-i}, \quad i = 0, \ldots, d$$

are known as *Bernstein basis polynomials* of degree d. The points $\mathbf{P}_i$ are called *control points* for the Bézier curve. The polygon formed by connecting the Bézier points with segments, starting with $\mathbf{P}_0$ and finishing with $\mathbf{P}_d$, is called the *Bézier polygon* (or control polygon). The convex hull of the Bézier polygon contains the *Bézier curve.*

B-Splines

Roughly speaking, a B-spline of bidegree (d_1, d_2) is given as the product of two Bezier curves of degree d_1 and d_2. Hence, they are rational surfaces which are determined by $(d_1 + 1)(d_2 + 1)$ control points. This product determines a quadrilateral mesh on the surface which provides a parametrization linked to each one of the rational curves of degree d_i. The simplest non-trivial case corresponds to the so-called Segre embedding of bi-degree $(1, 1)$ which is given as the image of the map

$$S_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3 \quad ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \mapsto [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1]$$

given by all products of bidegree $(1, 1)$ in terms of homogeneous coordinates corresponding to projective lines (tensor or Kronecker product in algebraic terms). If one makes $z_{ij} = x_i y_j$, then the image of the Segre embedding $S_{1,1}$ is given by the one-sheet hyperboloid

$$z_{00}z_{11} - z_{01}z_{10} = 0$$

which is a doubly ruled surface with two projective lines through each point. If one composes any of the above lines with the Veronese embedding V_{1,d_1} for each copy of the projective line $\mathbb{P}^1$, one obtains a rational surface of bidegree (d_1, d_2) whcih is determined by $(d_1 + 1)(d_2 + 1)$.

T-splines

In the litterature (see https://en.wikipedia.org/wiki/T-spline, e.g.), T-splines are almost the same as B-splines, because they are defined as free-from surfaces, including B-splines and NURBS (Non-uniform Rational B-splines) as the main types. Additional contributions of this extension are minimal w.r.t. B-splines, and furthermore, there is no an appropriate notion for the three-dimensional case. By these reasons, we deserve the name of T-splines to three-dimensional rational surfaces.

Similarly to the case of B-splines, a T-spline of tridegree $(d_1, d_2.d_3)$ is given as the product of three Bezier curves of degree d_1, d_2 and d_3. Hence, they are rational threefolds which are determined by $\Pi_{i=1}^{3}(d_i + 1)$ control points. This product determines a cuboidal mesh on the threefold which provides a parametrization linked to each one of the rational curves of degree d_i.

Some device captures can penetrate the matter and provide data about the internal structure. Tpical examples appear in soft tissues, giving clouds of points which must be clustered according to radiometric characteristics. After their grouping, it is necessary to compare with previoustly available models to identify possible shape or functional pathologies. Level-set methods provide a general strategy which is based on (non-necessarily planar) slices. These topics are developed in the chapter 9 of this module.

Families of spline varieties (*)

The above descriptions motivate a more detailed study of families of spline varieties, where we can modify the degree or the dimension for a better understanding of the shape. From a formal viewpoint, they are given by maps $F : \mathcal{M} \times \Lambda \to \mathcal{M}$ depending on ℓ parameters. The classification up to C^r-equivalence for the usual differential, analytic and algebraic frameworks provides an abstract space whose elements represent equivalence classes up to diffeomorphism, bianalytic or birational transformations.

Unfortunately, we are still far of having a good understanding of the structure of moduli spaces for spline varieties, even for the most "simplest" cases corresponding to spline curves. One needs additional tools of Algebraic Geometry able of providing information about how superimposed structures (sheaves, usually) can be classified from a topological viewpoint; cohomological methods for classification have been developed in the module A_{33} (Sheaves, Cohomology, Schemes) of the matter A_3 (Algebraic and Analytic Geometry).

The classical approach developed in A_{33} is not constructive. Hence, it is difficult to achieve a computational approach. Furthermore, the discrete nature of data supporting combinatorial structures linked to incidence and tangency conditions motivates the use of non-standard tools such as sky-scrapper sheaves, whose topological invariants (linked to cohomology of sheaves) are not easy to compute.

Thus, along this module we develop a more pedestrian approach which is linked to analytic families of n-dimensional spline varieties which are parameterized by a rational manifold Λ also.

0.3.3. Representations for design

CAD formats were the standard along the last third of the 20th century. The most commonly used design formats in Mechanical and Electrical Engineering are given by CAD/CAM. The huge amount of information generated in both environments and format characteristics poses serious problems to store, manage and reuse contents from the main programming paradigms.

Computational Geometry provides the kernel for the management of geometric primitives. However, some formats do not follow an OOP based strategy, as the developed in the module B_{11}, giving serious problems for extracting information in an automatic way. The initial lack of interoperability between proprietary and open formats is a serious trouble. An initial strategy consists of treating CAD/CAM formats as they were digital images, and apply standard Image Processing and Analysis techniques. Some related issues are discussed in the second paragraph

Contents labeling requires some AI tools focused towards automatic recognition of Piecewise Liner and Quadratic (PL and PQ) geometric primitives appearing in CAD/CAM. Perspective distortions and partial occlusions motivate the development of tools for surface segmentation having in account perspective distortions.

The third paragraph of this section is devoted to remember some apparent distortions linked to projections, whereas the fourth paragraph is devoted to how an Expert System can recognize quadratic shapes in presence of uncertainty and noise.

CAD-CAM models

A basic distinction concerning to design concerns to

- *CAD (Computer Aided Design)* as a technology concerned to creation, modification and optimization of a 3D design. It is commonly used in AEC (Architecture, Engineering, Construction) environments. There are more than twenty CAD software libraries. Some of the most used are AutoCAD, Catia, Solidworks, OpenCascade, e.g.
- *CAM (Computer Aided Manufacturing)* involves systems for planning and control manufacturing processes. They use numerical control machines for industrial manufacturing. They depend on non-geometric parameters such as temperature, pressure, applied forces and dynamical interactions between components. Mathlab and Mathematica provide a support from te numerical analysis viewpoint. Their extensions to more advanced Finite Element Methods (FEM) will be introduced in last chapters of this module.

The above remarks show a much higher complexity of CAM modes than CAD models.Both of them are included in CAE (Computer Aided Engineering).

Along the first half of this module we will be focused towards CAD models in CAE, mainly. Nevertheless, we preserve the terminology CAD/CAM because geometric principles are the same.

Classical versions of CAD/CAM software were written in a proprietary format. they were originally developed from the early 1960s in the MIT (Boston, MA, USA) for the automotive (General Motors) and aerospace (Lockheed) industries. First versions were developed under UNIX; more advanced versions incorporated profiles arising from rational curves and surfaces (Bezier, Bernstein) appearing as B-splines in more modern literature [Fio92]. A related goal was the identification of surface characteristics from images, which was one of the early motivations for Computer Vision,

In view of developments under the OOP framework along nineties, there appear an increasing amount of libraries allowing an information exchange with libraries written in a more amenable geometric framework, i.e. with a geometric kernel written usually in C or C++ In this case, it is possible to adapt tools appearing along several modules of of the matters B_1 (Computational Mechanics of Continuous Media) and B_2. The most relevant for Computer Graphics have been described in B_{11}(CGAL, e.g.) and B_{16} (VTK for Advanced Visualization, e.g.) in B_1, by one side, and OpenCV in B_2.

Some of the most relevant non-proprietary integrated platforms are developed in OpenCascade (FOSS), CATIA, SolidWorks, e.g.. More details appear in the last subsection §4,4 of this chapter, with a special emphasis on OpenCascade. The use of any of the above libraries provides a front-end as support for developing the applications to be performed. A useful extension of OpenCascade in the Python framework is given by OCCPython.

Interoperability. A semantic approach

Two important interoperability issues involve to formats and task flows of experts working in this area.Open standards are key for an effective interoperability. The alignement of proprietary formats with open standards is very difficult. Even for open standards OOP, functional and symbolic programming display a lot of problems for interoperability. The first important standard for Computer Graphics was OpenGL which become a standard along the ninetiies. More recently, OpenCascade provided an open framework for the development of CAD/CAM functionalities in OOP paradigm.

CUDA is the "gold standard" for interoperability issues going from capture and preprocessing on graphic cards to advanced visualization issues B_{16}. CUDA provides a support for large scale management of simplest primitives (points and oriented segments, e.g.); in a complementary way, compatibility with OpenGL allows to import advanced effects involving radiometric properties and characteristics of materials on a discrete vs continuous support under CUDA. For management of large 3D point clouds see [DiM15] [30]

[30] B.DiMartino, G.Cretella and A.Esposito: *Cloud Portability and Interoperability*, Springer-

To minimize the adverse effect of this lack of interoperability, one adopts a semantic approach with the usual hierarchy involving lexicon, thesauri and taxonomies.

1. The syntactic level for interoperability involves an alignment of key words which must be previously identified. Following a generative grammar approach, the lexicon in Computer Graphics is made of geometric and radiometric primitives. The logic of classes plays a fundamental role to discriminate between key words in the underlying Information Systems. In Computer Graphics involves mainly to data.

2. The second step concerns to the alignement of thesauri, which corresponds to definitions or descriptions, which are interpreted as "meaningful paths" in a graph whose nodes are the key words. Most paths have no meaning, and one must introduce additional criteria which are based on propositional logic. From a symbolic viewpoint, Knowledge Graphs provide a support to relate different information packages. In Computer Graphics involves mainly to models at different levels.

3. The third step concerns to the alignement of taxonomies, i.e. set of logical rules. This stage is the most difficult one, because it involves to descriptive logic which must be learned by Expert Systems in some Machine Learning framework. Some of the most advanced contributions appearing in DNN are developed in the chapter 8. In Computer Graphics it will involve mainly to learning of structural relations involving maps between superimposed tensor structures to models.

Query strategies and generation of new contents are different for each level involving lexicon, thesauri and taxonomies, depending on the type of logic of classes, propositional, and descriptive, respectively. At an intermediate level they involve to Informaiton Systems, which is revisited in the chapter 3 asan extension of GIS developed in B_{11}. A reformulation of these aspects and their mutual interrelations requires to specify how extract and generate new contents and even knowledge by using advanced AI models and tools (chapter 8).

Automatic extraction of contents

Along the module B_{21} (Image Processing and Analysis) one develops local vs global strategies to extract information from digital images or video sequences. Let us remember that a basic hybrid strategy consists of extracting global information (relative locally homogeneous up to a threshold) of regions r_α, and local information (relative to discontinuities) supported at boundaries on polygonals bounding regions. Filtering and Image restoration give as rsult an "image segmentation" where $b_\alpha := \partial r_\alpha$. Discontinuities invovle to the behavior of first

Verlag, 2015.

and second order derivatives (tangential and curvature information in geometric terms) beyond a threshold and after removing outliers.

A goal of this module is the development of the above ideas to a usually discrete support to generate 3D contents. Inputs areise from laser scans and digital video. From these inputs one must obtain a decomposition of boundary representations of solids, connecting Constructive Solid Geometry (CSG) and Boundary-based representations (B-rep). The final output must be a decomposition in a union of eventually deformable solids or threefolds T_α with boundaries $S_\alpha = \partial T_\alpha$. Both of them are modelled in Computer Graphics in terms of three-dimensional T-splines and B-Splines, respectively.

The problem is not quite elementary because an estimation of optimal surfaces for a noisy cloud of points display irregularities. Last ones can arise from noisy or incomplete information, or contrarily they can reflect some imperfections, deformations or even fractures in the support. If a CAD/CAM model is available, then one has a local reference surface S_α bounding the three-dimensional object and consequently, a normal map for each component S_α.

The normal map is the key for reprojecting points along the normal map and evaluating irregularities in the distribution of distances along the normal map. If the distribution would be regular, then the displacement w.r.t. the expected distribution would be an offset with their corresponding singularities (as any evolute). Unfortunately, deformations are not homogeneous nor isotropic, and irregularities must be estimated on-line.

Incorporating the AI to symbolic representations (*)

An advantage of CAD files is the available vector graphics information. Geometric primitives and their mutual relations are coded in terms of a probabilistic version of the dual adjacency graph. Instead of considering a node as representing an ideal surface, one has some kind of "cluster" of pdf (probability density functions) which are associated to data captured by the scanning.

The pdf provide some kind of score w.r.t. the ideal distribution arising from the CAD/CAM model. First order differences are modelled in terms of Markov fields connecting the nearest elements which are represented by means an adjacency matrix for the boundary surface. AI techniques can adapted for learning irregularities in the distribution of vertices belonging to the deformed network. Additional details are developed in the chapter 7.

0.3.4. Towards a Topological Information Theory (*)

Huge amount of irregularly distributed data in parameterized models is described in terms of probability density functions (pdf). Last ones are considered as elements of a metric space w.r..t the Cramer-Rao metric. The resulting space is the support for the *Geometric Information Theory*. Some basic elements of

GIT are introduced in the first paragraph; a more extensive treatment can be found in [Ama16] [31], which supports in a natural way a Riemannian structure.

In view of irregularities of pdf arising from scans and their eventually sparse distribution, we superimpose a PL-structure by taking the pdf as some kind of weighted simplicial structure. This is the first step of a Topological Information Theory (TIT) to be superimposed as a PL-approach to GIT. Duality between complexes and their dual co-complex in basic Algebraic Topology A_{22}, is the motivation for a simultaneous management of vectors and co-vectors on *simplicial structures superimposed to GIT*. This viewpoint is introduced in the second paragraph.

Differential models provide a smoothing of "irregulairities" (given by discontinuities of derivatives or discrete differences, e.g.). The formalism of vectors and covectors is extended to fields-based approach. In this way, one recover the fields-based paradigm for a unifying approach connecting with other areas B_i of these notes. Tensor fields provide the technical unifying support; their computational implementation is developed with TensorFlow in the Deep Learning framework. A recent extension of interest for Computer Graphics is given by *Neural Modelling Fields* (NeMF) which are introduced int he third paragraph.

The need of providing more realistic representations for objects or scenes, and the creation of new contents, require advanced rendering techniques able of capturing, processing and re-generating new radiometric maps from previously labeled contents in repositories. The most important rendering techniques are focused towards radiance (and irradiance) fields. In our approach, they are considered as 2-forms which are evolving along surfaces bounding objects contained in a scene.

Semi-automatic learning of their properties is a non-trivial problem, where it is necessary to perform a fusion of geometric and radiometric properties. Some basic elements have been introduced in the module B_{22} (Three-Dimensional Reconstruction) in regard to Image-Based Rendering. Here, one adds semi-automatic learning in terms of *Neural Radiance Fields* (NeRF) which are introduces in the fourth paragraph.

Elements of GIT

Roughly speaking, Geometric Information Theory (GIT) is the superposition of a differential structure on spaces of pdf (probability density functions) in Parametric Statistics. The use of this structure is key to understand in a structured framework "small variations" and space-time evolution of pdf, including difficult aspects concerning to Statistical Mechanics, with the corresponding entropy functionals. Some good references for GIT are [Ama16] [32] and [Cal14] [33].

[31] S.T.Amari: *Information Theory and applications*, Springer-Verlag, 2016.

[32] S.I.Amari: *Information Geometry and Applications*, Springer-Verlag, 2016.

[33] O.Calin and C.Udriste: *Geometric Modeling in Probability and Statistics*, Springer.Verlag, 2014.

Typical "examples" of pdf correspond to exponential and mixture functions (including multlivariate normal distributions, e.g.). The introduction of the Cramer-Rao metric is the key to obtain a Riemannian structure on spaces of pdf. The Fisher's information approach allows the introduction of structural dual connections which paly a similar role to connections (covariant derivatives of any kind of fields) in the classical Riemannian Differential Geometry. In particular, it is possible compute geodesics to solve Optimization problems in the space of pdf.

Different kinds of flows can be introduced to control space-time evolution of pdf, and their joint effects appearing in Statistical Mechanics. Unordered distributions is initially analyzed in terms of entropy functions, and their corresponding fluctuation bands (between maxima and minima). After bounding possible variations one can identify some structural patterns involving Boltzmann-Gibbs submanifolds (relevant for statistical learning) and relevant adiabatic flows.

The comparison between distributions is realized in terms of the relative entropy (Kullback-Leibler divergence). From the geometric viewpoint, it can be understood as a "measure of volume transfer" which allows the recovery of the original Cramer-Rao metric. The informational energy plays a similar role to the kinetic energy in Physics, and plays a relevant role to "organize" the information in evolving frameworks. Initial motivations for most of these developments arise from Statistical Thermodynamics. However, they can be applied to other knowledge fields linked to the very fast development of graphical contents appearing from the last decade of the 20th century. Their classification and re-use is a challenge requiring more advanced modelling techniques.

PL-structures on GIT

In presence of sparse information about pdf one can take them as "points" of a parametrized space X. Furthermore geodesics w.r..t the Cramer-Rao metric (see the precedent paragraph), one can construct superimpsoed PL-structures from these collections of points. Resulting simplicial complexes provide the support for the Topological Information Theory (TIT). Let us suppose that the resulting simplicial complexes are realizable in a Cartesian space $\mathbb{R}^N$ of enough high dimension N; for an introduction to realizability see [Tim08] [34]

If the simplicial complex is realizable and bounded, then one can consider interpolation and optimization issues from a global viewpoint in the PL-framework. In this way, one can use Excision theorems to identify those parts which are not relevant for the underlying complexes, and remote them to lower the redundant information. This process can be understood as some kind of "skeletonization" of the structure (media axis provide a solutoin in the Computational Geometry framework B_{11}. Similarly, Mayer-Vietoris theorems allow match together local data from linear chains of pdf data contained in intersections

[34] D.Timmreck: "Necessary conditions for Geometric Realizability of Simplicial Complexes" in A.I.Bobenko et al (eds: *Discrete Differential Geometry*, Birkhauser, 2008.

$U_i \cap U_j$ of open subsets of a covering $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ of the base space X.

Co-vector representations for linear constraints involving linear operators on chains of pdf give the analogue to differential forms in the smooth case. A set-theoretical version in term of continuous functions given on (finite intersections of open sets) is given by the Čech cohomology which is developed in the module A_{42}; for a comparison with the smooth approach,see [Bot83]. Similarly to the case of q-chain complexes, one has Excision and Mayer-Vietoris theorems for cochain complexes to identify "relevant parts" (removing irrelevant ones) and for matching linear functionals from the behaviour on intersections.

The above topological results are relevant because they provide isomorphism criteria between (co)homological structures which can be re-interpreted as models containing "essentially the same information" (up to boundary chains). Furthermore, Mayer-Vietoris results provide criteria for going from local to global constructions in a purely topological framework. When one has additional smooth structures one can use basic propagation models; in a combinatorial framework they can be formulated in terms of a discrete version of Laplace-Beltrami operators.

For some more advanced issues, it is convenient to apply some kind of "smoothing" of the support, which allows the introduction of differential and integral calculus on the underlying manifold. In this way, one has a smooth model for multi-paths associated to a simultaneous deformations of models. The introduction of the corresponding constraints provides the support for a tensor-based approach which is ubiquitous in other matters of these notes.

The skew-symmetric counterpart of higher order momenta provide another version of constraints for parametrised statistics which is very useful for a tensor formulation covector fields in Statistics. Jointly with the Markov Random Fields (MRF) provide the basic pieces for tensor fields in a statistical framework.

Neural Modelling Fields for TIT

Neural fields have been used from the beginning of ANN for modeling activation-inhibition patterns; the accumulation and spatical distribution of finite impulse-response (FIR) signals provides the first patterns for connecting infinitesimal and local patterns. The first geometric approach is due to Pelionisz at the late 1980s and early 1990s who introduced basic ideas of vector and co-vector fields by suggesting that the brain is a "tensor machine" able of a simultaneous management of trajectories (integral curves of vector fields) and constraints (integral hypersurfaces of covector fields) with variable coefficients (scalar fields).

Clustering of vector fields give distributions $\mathcal{D}$, whereas clustering of co-vector fields give differential systems $\mathcal{S}$. A joint treatment in terms of evolving subspaces is performed in the SOM (Self-Organizing Maps) of Kohonen [Koh97], who provides a systematic approach for learning Adaptive Subspaces in the natural extension of SOM to multiple layers. Dimensionality reduction plays an important role in learning subspaces representing "meaningful" clusters. It can be reformulated in terms of a discrete version of submersions between manifolds which is commonly used in Basic Differential Topology A_{41}. Our contribution to classical SOM, developed in several modules of B_3 (robotics), is based on a feedback between (the discrete versions of) immersions for clustering and submersions (for dimensionality reduction) which is controlled by an intrinsic version of the second order differential.

A first issue consists of how implement an adaptation of the above scheme for learning complex objects or behaviors?. If we restrict ourselves to objects, one must give a functional approach to geometric shapes. For the 1D case, this can be performed in terms of classical 1D Fourier analysis, which can be extended to higher dimension; in particular, 2D Fourier analysis provides the functional approach to Image Processing and Analysis which is developed in the Chapter 6 of B_{21}. Instead of developing the general 3D Fourier analysis for volumetric shapes, we restrict ourselves to Harmonic Spherics, whose overlapping generates shapes arbitrarily complex. Their functional description in terms of infinite-dimensional Hilbert spaces is reduced by choosing a truncation linked to the "principal" eigenvectors.

From the AI viewpoint, the problem is how to estimate and learn the corresponding eigenvalues. Let us remember that auto-encoders provide a solution for dimensionality reduction which is based on incorporating the difference between outputs and goals to correct input data [35] . In this way, one obtains a self-supervised variant of SOM. As it is well known (for a recent presentation see [Mon22] [36] and references therein), autoencoders can be undercomplete or overcomplete. In our algebraic approach, these conditions correspond to the lack of surjectivity (non-vanishing Coker) or injectivity (non-vanishing kernel) for the differential map giving first order data variations.

Hence, in a PS-approach to AI the above problem becomes how lo learn the discrete version of the second-order differential in presence of noise and incomplete information. If we adopt a geometric viewpoint, the second-order differential map represents the curvature matrix of a connection. From a statistical viewpoint, the curvature matrix can be estimated in terms of a covariance matrix linked to different and independent stimuli [37]. When one has a only a set-theoretical information, the superimposed simplicial structure to sparse data provides a PL-approach to an ideal PS-framework.

Thus, all we need is develop an adaptation of coarse-to-fine strategies for estimating fields going from Maximum Likelihood methods to finer metric approaches. The semi-automatic management uses initially fuzzy logic which can be completed with more structured approaches (having in account Petri nets,

---

[35] The (dual version of the) intrinsic version of the second order differential $Hom[Ker(ker(d_x f), Coker(d_x f)]$ for a C^2-map provides the PS-model for a formal justification of auto-encoders.

[36] Y.L.Mong et al: "Self-Supervised Clustering on Image-Subtracted Data with Deep-Embedded Self-Organizing Map", MNRAS, 2022, available in arKiv from Sept 2022.

[37] A version corresponding to Shape Recognition has been developed in the module B_{24} in B_2 (Computer Vision)

e.g.). These topics make part of Neural Modelling Fields (NMF) theory which have been extended to more general knowledge areas by Perlovsky in [Per01] [38], one can find the foundations and

In a more general framework (going farther than Computer Graphics), NMF can be interpreted as a mathematical description of mind's mechanisms, including concepts, emotions, instincts, imagination, thinking, and understanding. NMF is a multi-level, hetero-hierarchical system. At each level in NMF there are concept-models encapsulating the knowledge; they generate so-called top-down signals, interacting with input, bottom-up signals. These interactions are governed by dynamic equations, which drive concept-model learning, adaptation, and formation of new concept-models for better correspondence to the input, bottom-up signals. Main problems to be solved concern to

- Develop techniques for adaptive sampling and clustering (see the §2,2 of this chcpater).
- Identify similarity vs metric criteria, in the probabilistic vs "deterministic" frameworks.
- Implement learning procedures using dynamic logic algorithms.
- Introduce hierarchies helping to organize information in an adaptive way.

The above issues are developed with more details in the chapter 8 of this module.

Neural Radiance Fields for TIT

The main purpose of NeRF (Neural Radiance Fields) is to provide a *continuous* model a 3D scene in terms of color and density fields; colro is a 3D vector field, whereas density is a a function which can be interpreted as the determinant of an evolving volume form. NeRF were introduced in [Mil20] [39] to overcome some troubles of precedent approaches in Computer Graphics involving the discrete or sparse character of information. Coordinate inputs for the ambient space are given by a $5D$ vector with $(X, Y, Z, \theta, \varphi)$ as coordinates corresponding to position and viewing direction.

From a topological viewpoint, the ambient space for the evolution of these data is globally described as the total space $\mathbb{S}^2T\mathbb{R}^3$ of the sphere bundle $\mathbb{S}_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}^3}}$ on the ordinary space [40]. Initially, one decouples color and density to generate

[38] L.I. Perlovsky: *Neural Networks and Intellect: using model based concepts*. Oxford University Press, New York, 2001

[39] B.Mildenhall, P.P.Srinivasan, M.Tancik, J.T. Barron, R.Ramamoorthi, and R.Ng: "Nerf: Representing scenes as neural radiance fields for view synthesis". In *Communications of the ACM*, Jan 2022, previously published in *European conference on computer vision*, pp. 405-421. Springer-Verlag, 2020.

[40] For more details and properties of this sphere bundle see the chapter 4 of A_{41} (Basic Differential Topology).

a radiometric vs geometric segmentation of the scene. Furthermore, instead of performing a ray casting as dense as possible, one takes a spare distribution of rays with well-defined "sections" of the color and density bundles. The original approach of [Mil20] describes the density as the differential of the transmittance distribution along each sampled ray (more details in the chapter 8 of this module).

Most extensions of NeRF (performed along 2021 and 2022) are based in using prior knowledge about objects or the scene, replacing sampled rays by sampled cones, regularization techniques along sampled cones, or stereo radiance fields. Most approaches take in account (a discretization of) waves-based models. Nevertheless the extended use of particles-based models, the presence of particles-based models is scarce, still. The intensive use of clouds arising from stereo vision and 3D scans along this module suggest a complementary approach based on clouds of points at different resolutions, and superimposed PL-structures.

The most difficult problems concern to self-learning extending propagation models (from rays to conical neighbor zones from the observer's localization), the development of collaborative frameworks (from spatial correlations, incorporation of previously labeled models, e.g.), volume rendering around sampled view directions and orthogonal diffusion models (till colliding in a competitive way, in a similar way to the envelopes of paraboloid fronts), the optimization of the photometric loss.

0.4. Outline of the module

The first three chapters develop the basic scheme based on models, data structures and algorithms involving objects (chapter 1) and scenes (chapter 2). The next three chapters deal with advanced modeling topics that include advanced radiometric properties (textures or reflectance maps, e.g.) or more advanced geometric tools for the study of complex shapes or scenarios. The latter contain advanced applications for the quasi-static case.

0.4.1. A short overview

From a theoretical point of view, most of Module B_{41} is focused on the Analytical approach (in its double geometric and functional aspects) and the exploitation of the similarities of mathematical tools on the object. This is intended to exploit the classical complementarity between the synthetic and analytical approaches. The course has nine chapters devoted to

1. Mathematical modelling. A hierarchised approach
2. Data Structures for modelling
3. 3D Laser based modelling
4. Deformations
5. Volumetric Restoration
6. Approximate modelling
7. The interplay with CAD/CAM
8. Artificial Intelligence for Modelling
9. Biomedical modelling

The first three are more basic in nature, while the next three use more advanced mathematical techniques. The last three are focused on the applications in which we are most interested. Along the following paragraphs one gives some additional details

Mathematical Modelling for objects

The initially most relevant mathematical aspects are dealt with in Chapter 1, emphasizing the geometric approach. The approach taken allows an extension to cinematic and dynamic aspects; the rest of the chapters have a more applied character. The most used software tools for mathematical modeling are MathLab and SciLab. A first introduction to Blender is carried out.

Data Structures for modeling

Chapter 2 introduces some basic notions from Computer Graphics related to the hierarchy developed in Chapter 1, giving priority to the geometric approach to facilitate feedback with the same general principles that are presented in the analytical approach. Special attention is paid to simplicial vs cuboidal complexes, and more specifically to the conversion of triangular in quadrangular meshes for surfaces. Information reduction (including sampling strategies), multiscale compatibility and management under uncertainty play an important role.

3D Laser based modelling

Chapter 3 develops a complementary approach of analytical type whose main objective is the extraction of characteristics of the form from the processing and analysis of discrete range information; This is intended to generate geometric primitives that can support functionalities corresponding to a more advanced modeling. Priority is given to the range information based approach, because image based modeling has been developed in the $3D$ Reconstruction Block of the Vision Specialist Course.

Deformations. A topological approach

Chapter 5 carries out a development of the deformations, prioritizing the computational aspects, including morphing techniques, simulation of facial gestures and movements of actors from the integration of information from different types of sensors.

Volumetric restoration

Range information is incomplete, irregularly distributed and there are often holes due to multiple factors, among which occlusions or "shadow zones" associated with capture procedures stand out. Currently, the information is completed manually, which requires a high degree of specialization. The purpose of chapter 3 is to facilitate a more systematic approach adapted to the needs of the user to facilitate the completion of the information through the use of specific tools. MeshLab and UvaCad are used as reference.

Approximate modelling

Chapter 6 is dedicated to explaining the basic Animation techniques with special attention to those based on particle filters that admit inputs from continuous information (optical flow associated with moving objects) or dispersed information (point clouds, for example) to facilitate the control of articulated objects.

The interplay with CAD/CAM

The simplest applications of 3D modeling are developed in chapter 7 in relation to AEC (Architecture, Engineering, Construction) environments. The facilities for the subdivision or grouping of parametric representations is key for an interactive visualization of complex scenes that support different types of scalar fields (depth or height, e.g.), vector (multiple trajectories, e.g.), co-vectorial (constraints associated with dominant planes in the scene, e.g.) or tensorial (changing mixed quantities).

Artificial Intelligence for modelling

The growing availability of tagged multimedia content and the advances made from the second decade of the 21st century in relation to the semi-automatic recognition of content in digital images provide initial keys for the generation of new content. In this chapter, a field-based approach (scalar, vector, tensor) is carried out in an increasing order of complexity.

The computational approach is based on Deep Learning and applies recent developments of Neural Modeling Fields (NMF) and Neural Radiance Fields (NeRF) for the semi-automatic generation of new graphic content.

Biomedical modelling

Along the the modules B_{35} (Humanoid Robots) and B_{36} (Animats) of the matteer B_3 (Robotics) we have developed a hirerarchical approach ta a bioiogically inspired modelling of shapes and tasks to be performed by lliving beings to an intermediate scale. Along this chapter we develop a complementary approach involving bones, internal organs and microscopical living beings.

The main purpose of modelling internal organs consists of evaluating possible deformations, and providing an assistance for detecting pathologies. The computation of envelopes for 3D clouds arising from scanning provides curvature maps which are very useful for orthopaedical prothesis. We illustrate these issues with hip bones which display a special complexity for curvature maps introduced in the Differential Geometry of Curves and Surfaces A_{10}.

From a quite different viewpoint, the use of Algebraic Geometry methods for modelling functional aspects of vascular systems and their whole internal structure, provide a deep insight of complementary aspects involving circulatory systems. The intrincate topology of the vascular system is supporte by some elements of Geometric Topology A_{24}, whose relations with Algebraic Geometry of Threefolds is not still well understood.

0.4.2. Some applications

The next items appear in the the entry devoted to 3D Modeling in Wikipedia:

- The *medical industry* uses detailed models of organs; these may be created with multiple 2-D image slices from an MRI or CT scan. The movie industry uses them as characters and objects for animated and real-life motion pictures.
- The *video game industry* uses them as assets for computer and video games.
- The *science sector* uses them as highly detailed models of chemical compoundfs
- The *architecture industry* uses them to demonstrate proposed buildings and landscapes in lieu of traditional, physical architectural models.
- The *archaeology community* is now creating 3D models of cultural heritage for research and visualization.
- The *engineering community* utilizes them as designs of new devices, vehicles and structures as well as a host of other uses.
- In recent decades the *Earth science community* has started to construct 3D geological models as a standard practice.
- *3D models* can also be the basis for physical devices that are built with 3D printers or CNC machines.

In terms of *video game development*, 3D modeling is one stage in a longer development process. Simply put, the source of the geometry for the shape of an object can be:

- A designer, industrial engineer or artist using a 3D-CAD system
- An existing object, reverse engineered or copied using a 3-D shape digitizer or scanner
- Mathematical data stored in memory based on a numerical description or calculation of the object

A wide number of 3D software are also used in constructing *digital representation of mechanical models* or parts before they are actually manufactured. CAD- and CAM-related software is used in such fields, and with this software, not only can you construct the parts, but also assemble them, and observe their functionality.

3D modeling is also used in the field of industrial design, wherein products are 3D modeled before representing them to the clients. In media and event industries, 3D modeling is used in stage and set design.

In the *Semantic framework* the OWL 2 (standard framework for Web Semantics Languages) translation of the vocabulary of X3D can be used to provide semantic descriptions for 3D models, which is suitable for indexing and retrieval of 3D models by features such as geometry, dimensions, material, texture, diffuse reflection, transmission spectra, transparency, reflectivity, opalescence, glazes, varnishes, and enamels (as opposed to unstructured textual descriptions or 2.5D virtual museums and exhibitions using Google Street View on Google Arts & Culture, for example).

The RDF representation of 3D models can be used in reasoning, which enables intelligent 3D applications which, for example, can automatically compare two 3D models by volume. Some applications of this approach to Cultural Heritage were developed by the MoBiVAP group between 2008 and 2014 in several RTD projects. Some contributions are icnorporated in several chapters of these notes.

3D Printing

The term 3D printing or three-dimensional printing is a form of additive manufacturing technology where a three-dimensional object is created from successive layers material.[17] Objects can be created without the need for complex expensive molds or assembly with multiple parts. 3D printing allows ideas to be prototyped and tested without having to go through a production process.

In recent years, there has been an upsurge in the number of companies offering personalized 3D printed models of objects that have been scanned, designed in CAD software, and then printed to the customer's requirements.[19] 3D models can be purchased from online marketplaces and printed by individuals or companies using commercially available 3D printers, enabling the home-production of objects such as spare parts and even medical equipment. Along these notes, we paid attention to the OpenCascade framework, by adapting some results and algorithms to this framework.

Testing 3D solid model

Three-dimensional solid models can be tested in different ways depending on what is needed by using simulation, mechanism design, and analysis. Some relevant problems correspond to assembly, pick-and-place, cutting, welding and painting in an adaptive way to the geometry of surfaces, o4r having in account solid characteristics. Models and tools for all of them haven been developed in the module B_{31} (Anchored Robots) of the matter B_3 (Robotics). Along these notes, we are focused towards simulation and quality control in terms of previously known CAD/CAM models.

To vis ideas, if a motor is designed and assembled correctly, using the mechanism tool the user should be able to tell if the motor or machine is assembled correctly by how it operates. Different design will need to be tested in different ways. For example; a pool pump would need a simulation ran of the water running through the pump to see how the water flows through the pump. These tests verify if a product is developed correctly or if it needs to be modified to meet its requirements. In Mechanical Engineering one must have in account dynamical effects linked to strain, torsion, bending, shear stresses and transformation between stress and strain. All of them are meaningful to warrant stability conditions in operations and to minimize the adverse effects of instabilities.

0.4.3. Some references for modeling

A lot of references have appeared from the seventies. Mathematical models are the usual ones (given by smooth curves and surface sin the A_{10} framework). From the computational viewpoint it is necessary to update them to become useful for applications in Engineering and, more specifically in Computer Graphics. The confluence between (Differential vs Algebraic) Geometry and Computer Science will allow the development of new software tools involving higher graphical performance in GPUs, more efficient algorithms and advances in AI (specially those connecting to Deep Learning framework).

General references

Only bibliographic references are included. The most relevant to understand applications is [Che95]. The other ones can be understood to provide foundations and algorithms for applications. More detailed references will appear along each chapter.

[Ber97] M.de Berg, M.Van Krevel,, M.Overmars and O.Schwarzkopf: *Computational Geometry. Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, 1997.

[Boi07] J.D.Boissonnat and M.Teilaud (eds): *Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces*, Springer-Verlag, 2007.

[Bos94] H.Bossel: *Modeling and Simulation*, A.K.Peters, 1994.

[Che95] W.F.Chen (ed): *Civil Engineering Handbook*, CRC Press, 1995.

[Cox92] D.A. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra (3rd ed)* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1992.

[DiM15] B.DiMartino, G.Cretella and A.Esposito: *Cloud Portability and Interoperability*, Springer-Verlag, 2015.

[Far88] G.Farin: *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design*, Academic Press, 1988.

[Fau79] J.D.Faux and M.J.Pratt: *Computational Geometry for Design and Manufacture*, E.Horwood, 1979.

[Koe93] J.J.Koenderink: *Solid Shape*, The MIT Press, 1993.

[Mar99] D.Marsh: *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, Springer-Verlag, 1999.

[O'R] J.O'Rourke: *Computational Geometry in C*, Cambridge Univ. Press, 1994.

[Zom05] A.J.Zomorodian: *Topology for Computing*, Cambridge Univ. Press, 2005.

Data structures, algorithms and statistics

In the same way as before, only textbooks are included. Very interesting articles can be found in the references of theses textbooks

[Ama16] S.I.Amari: *Information Geometry and Applications*, Springer-Verlag, 2016.

[Cal14] O.Calin and C.Udriste: *Geometric Modeling in Probability and Statistics*, Springer.Verlag, 2014.

[Goo16] I.Goodfellow, Y.Bengio and A.Courville: *Deep Learning*, The MIT Press,. 2016.

[Pas11] V.Pascucci, X.Tricoche, H.Hagen and J.Tierny (eds): *Topological Methods in Data Analysis and Visualization*, Springer-Verlag, 2011.

[Per01] L.I. Perlovsky: *Neural Networks and Intellect: using model based concepts*. Oxford University Press, New York, 2001

[She07] A.Sherrod: *Data Structures and Algorithms for Game Developers* C. River Media, Boston, MA, 2007.

In the web one can find a list of file formats used by computers, organized by type. Filename extension it is usually noted in parentheses if they differ from the file format name or abbreviation. Many operating systems do not limit filenames to one extension shorter than 4 characters, as was common with some operating systems that supported the File Allocation Table (FAT) file system.

Examples of operating systems that do not impose this limit include Unix-like systems, and Microsoft Windows NT, 95-98, and ME which have no three character limit on extensions for 32-bit or 64-bit applications on file systems other than pre-Windows 95 and Windows NT 3.5 versions of the FAT file system.

Some filenames are given extensions longer than three characters. While MS-DOS and NT always treat the suffix after the last period in a file's name as its extension, in UNIX-like systems, the final period does not necessarily mean that the text after the last period is the file's extension.[

References Industrial and AEC technologies

The following references are focused to illustrate some applications in industrial and AEC environments. Most references are very classical and correspondo to the old version of these notes. Any suggestion for their updating is welcome.

[Atk88] A.G.Atking and Y.W Mai: *Elastic and Plastic Fracture* (reprt), E.Horwood, 1988.

[Bla98] A.Blaker and M-Isard: *Active Contours*, Springer-Verlag, 1998.

[DeB93] C. deBoor, K.Hollig and S.Riemenschneider:*Box Splines*, Applied Mathematical Sc. 98, Springer-Verlag, 2011.

[Fio92] J.C.Fiorot and P.Jeannin: *Rational Curves and Surfaces. Applications to CAD*, J.Wiley, 1992.

[Log92] D.L.Logan: *A First Course in the Finite Element Method (2nd ed)*, PWS Publishing Co, 1992.

[Sch86] G.Schmidt and A.Tondl: *Non-linear vibrations*, Cambridge Univ. Press, 1986.

[Sch04] W.Schroeder, K.Martin and B.Lorensen: *Visualization Toolkit. An Object-Oriented Approach to 3D Graphics (3rd ed)* , Kitware, 2004.

[Sel96] J.M.Selig: *Geometric Methods in Robotics*, Springer-Verlag, 1996.

0.4.4. Software

The most important open-source library in Computer Graphics is Blender-One cna find a short description below.

Most software for modelling is commercial. The most common open-source libraries arise from Computational Geometry CGAL (www.cgal.org). An updated list of references can be found in Wikipedia [41]. Thus, we limit ourselves to a small selection of the most used freeware or OpenSource references. We have not included the references which are only focused towards applications to videogames, because they are examined with more detail in the module B_{44}.

One of the most difficult issues concerns to *interoperability* issues in regard to the use of different software tools or libraries. From the early years of the 21st century a lot of effort has been performed to solve interoperability, at least between the most commonly used frameworks. One of the most efficient solutions is CATIA

CATIA, an acronym of computer-aided three-dimensional interactive application) is a multi-platform software suite for computer-aided design (CAD), computer-aided manufacturing (CAM), computer-aided engineering (CAE), PLM and 3D, developed by the French company Dassault Systèmes [42]

Since it supports multiple stages of product development from conceptualization, design and engineering to manufacturing, it is considered a CAM-software and is sometimes referred to as a 3D Product Lifecycle Management software suite. Like most of its competition it facilitates collaborative engineering through an integrated cloud service and have support to be used across disciplines including surfacing and shape design, electrical, fluid and electronic systems design, mechanical engineering and systems engineering.

[41] $https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_3D_modeling_software$

[42] https://en.wikipedia.org/wiki/CATIA

Freeware or OpenSource software

Some of the most notable are the following ones (Source: Wikipedia):

- *Animor* is a freeware OpenGL-based 3D modeling and animation program by R. Steven Glanville, a software engineer at NVidia. Currently at stable version 1.0, it is a compact program with several tools which would normally be expected in high-end, paid software [43]

- *Art of Illusion* is a free software, and open source software package for making 3D graphics. It provides tools for 3D modeling, texture mapping, and 3D rendering still images and animations. Art of Illusion can also export models for 3D printing in the STL file format. [44]

- **Blender** is a free and open-source 3D computer graphics software toolset used for creating animated films, visual effects, art, 3D printed models, motion graphics, interactive 3D applications, virtual reality, and computer games. Blender's features include 3D modeling, UV unwrapping, texturing, raster graphics editing, rigging and skinning, fluid and smoke simulation, particle simulation, soft body simulation, sculpting, animating, match moving, rendering, motion graphics, video editing, and composing. [45]

- *OpenSCAD* is a free software application for creating solid 3D CAD (computer-aided design) objects. It is a script-only based modeller that uses its own description language; parts can be previewed, but cannot be interactively selected or modified by mouse in the 3D view. An OpenSCAD script specifies geometric primitives (such as spheres, boxes, cylinders, etc.) and defines how they are modified and combined (for instance by intersection, difference, envelope combination and Minkowski sums) to render a 3D model. As such, the program does constructive solid geometry (CSG). OpenSCAD is available for Windows, Linux and macOS. [46]

The incorporation of AI tools arising from the Deep Learning framework is performed by using PyTorch, as usual.

GNU license

Some of the most notable are the following ones (Source: Wikipedia)::

- *AutoQ3D Community* is a cross-platform CAD software, suited for 3D modeling and texturing. The main objective of this software development is to take away the hassle and complexity for sketching and drawing in

[43]https://en.wikipedia.org/wiki/Anim8or
[44]$https://en.wikipedia.org/wiki/Art_of_IIllusion$
[45]$https://en.wikipedia.org/wiki/Blender_(software)$
[46]https://en.wikipedia.org/wiki/OpenSCAD

3D. AutoQ3D Community is not a professional CAD program and it is targeted at beginners who want to make rapid 3D designs. It offers plenty of features but is relatively simple to learn and use. [47]

- *BRL-CAD* is a constructive solid geometry (CSG) solid modeling computer-aided design (CAD) system. It includes an interactive geometry editor, ray tracing support for graphics rendering and geometric analysis, computer network distributed framebuffer support, scripting, image-processing and signal-processing tools. The entire package is distributed in source code and binary form. [48]

- *FreeCAD* is a general-purpose parametric 3D computer-aided design (CAD) modeler and a building information modeling (BIM) software with finite element method (FEM) support. It is intended for mechanical engineering product design but also expands to a wider range of uses around engineering, such as architecture or electrical engineering. FreeCAD is free and open-source, under the LGPL-2.0-or-later license, and available for Linux, macOS, and Windows operating systems. Users can extend the functionality of the software using the Python programming language. [49]

- **Open Cascade Technology** (OCCT), formerly called CAS.CADE, is an open-source software development platform for 3D CAD, CAM, CAE, etc. that is developed and supported by Open Cascade SAS. OCCT is a full-scale B-Rep (Boundary representation) modeling toolkit. OCCT is available under the LGPL-2.1-only license permitting its usage in open source and proprietary applications. [50]

[47] $https://en.wikipedia.org/wiki/AutoQ3D_Community$
[48] https://en.wikipedia.org/wiki/BRL-CAD
[49] https://en.wikipedia.org/wiki/FreeCAD
[50] $https://en.wikipedia.org/wiki/Open_Cascade_Technology$