

A410 Basic Differential Topology. An overview

Javier Finat

Índice

0.1. Introduction to the module A_{41}	4
0.1.1. El problema de la clasificación	6
0.1.2. Estructuras superpuestas	7
0.1.3. Homogeneidad e isotropía	8
0.1.4. Unificación: Prehaces y Haces	9
0.2. Outline of the chapter	11
0.2.1. Interplay with other areas	12
0.2.2. Methodological issues	13
0.2.3. Equivariant approaches (*)	14
0.2.4. Extending the classical approach	16
0.3. References for this introduction	17
0.3.1. A basic bibliography	17
0.3.2. Software resources	18
1. Variedades y morfismos	19
1.1. Tipos de Variedades	20
1.1.1. Variedades topológicas	21
1.1.2. El problema de la clasificación	22
1.1.3. Algunas estrategias básicas	23
1.1.4. Local vs Global	24
1.2. El caso diferenciable. Aspectos topológicos	25
1.2.1. TD de Variedades algebraicas	27
1.2.2. TD de Variedades Complejas	28
1.2.3. TD de Variedades analíticas	29
1.2.4. Clasificación de gérmenes de aplicaciones	31
1.3. El caso relativo	32
1.3.1. Propiedades genéricas	33
1.3.2. Embebimientos	34
1.3.3. Curvas simples	35
1.3.4. Nudos. Aspectos diferenciales	36
1.4. Estructuras superpuestas	36
1.4.1. PL-estructuras	37
1.4.2. Estructuras suaves	37
1.4.3. Estructuras algebraicas	38

1.4.4.	Estructuras analíticas	40
1.5.	El caso discreto (*)	40
1.5.1.	Ajustando estructuras a datos	43
1.5.2.	Funcionales sobre distribuciones discretas	44
1.5.3.	Campos probabilistas	46
1.5.4.	Estimación de HMF adaptando Gibbs	47
2.	Nociones topológicas genéricas	49
2.1.	Estabilidad	49
2.1.1.	Estabilidad funcional	51
2.1.2.	Equilibrio y Estabilidad	53
2.1.3.	Estabilidad en sistemas acoplados	54
2.1.4.	Inestabilidad	55
2.2.	Transversalidad	57
2.2.1.	Transversalidad geométrica	57
2.2.2.	Transversalidad funcional	58
2.2.3.	Transversalidad en espacios de jets	59
2.2.4.	Estabilizando gérmenes	59
2.3.	Deformaciones	60
2.3.1.	Campos escalares	60
2.3.2.	Campos vectoriales	61
2.3.3.	Campos tensoriales	62
2.3.4.	Invariantes asociados a una deformación	62
2.4.	Pegando datos	63
2.4.1.	PL-modelos	64
2.4.2.	Modelos funcionales	65
2.4.3.	Modelos vectoriales	66
2.4.4.	Modelos tensoriales	67
3.	Aplicaciones a otras áreas y retos	69
3.1.	Aplicaciones a Física Teórica	69
3.1.1.	Un esquema general	69
3.1.2.	Acotando el problema	70
3.1.3.	Utilidad de la TD Básica	71
3.1.4.	Algunos retos	72
3.2.	Aplicaciones a otras ciencias	72
3.2.1.	Ciencias de la Tierra	73
3.2.2.	Química	74
3.2.3.	Biología	74
3.2.4.	Medicina	75
3.3.	Métodos topológicos en Ingeniería	76
3.3.1.	Dinámica de Fluidos	77
3.3.2.	Robótica	78
3.3.3.	Visión Computacional	79
3.3.4.	Informática Gráfica	80
3.4.	Aplicaciones en Ciencias Sociales	81
3.4.1.	Sistemas de Información Geográficos 3D	82
3.4.2.	Paradigmas de la Teoría Económica	83

3.4.3.	ingeniería del Conocimiento	84
3.4.4.	Sistemas Expertos	85
4.	Contenido del módulo 1	87
4.1.	Objetivos del módulo	87
4.1.1.	Herramientas topológicas para la Geometría	87
4.1.2.	Motivaciones geométricas y analíticas para la TD	88
4.1.3.	Algunas conexiones con la Física Teórica	88
4.1.4.	Anticipando algunas conclusiones	89
4.2.	Descripción detallada del módulo 1	90
4.2.1.	Aplicaciones diferenciables	90
4.2.2.	Topología Diferencial de Espacios Funcionales	90
4.2.3.	Transversalidad de aplicaciones	91
4.2.4.	Estratificaciones de Thom-Boardman	92
4.2.5.	Teoría de Morse básica	92
4.2.6.	Elementos de Cirugía y Cobordismo	93
4.2.7.	Some applications to IST	93
4.2.8.	Some applications to Economic Theory	93
4.3.	Algunos retos seleccionados	94
4.3.1.	Deformaciones. Invariantes topológicos. Nudos y Túneles.	94
4.3.2.	Transversalidad en otras categorías	94
4.3.3.	Estructuras simpléctica y de contacto sobre espacios	95
4.3.4.	Extendiendo la aplicación momento	96
4.4.	Referencias	97
4.4.1.	Referencias básicas para el módulo 1	97
4.4.2.	Referencias complementarias	98
4.4.3.	Referencias para aplicaciones en Ingeniería	98
4.4.4.	Referencias para aplicaciones en otras Ciencias	98

This chapter gives an introduction to the module A_{41} (Basic Differential Topology) of the matter A_4 (Differential Topology). It is necessary to have some basic knowledge of Differential Geometry A_1 and Algebraic Topology A_2 . Some meaningful examples are taken from objects appearing in Algebraic and Analytic Geometry A_3 , but most GAGA methods are not used in this module.

In addition of this introduction, materials are organized in four sections focused towards main notions and results, and to sketch some applications of other scientific and technological areas. Connections between them, require additional elements of probability, Statistics and Discrete Mathematics, which are only presented in an intuitive way. Subsections or paragraphs marked with an asterisk (*) display a higher difficulty and can be skipped in a first lecture.

0.1. Introduction to the module A_{41}

Grosso modo, la *Geometría* estudia la equivalencia entre *figuras rígidas* módulo transformaciones regulares. En un marco más amplio, la *Topología* estudia cómo caracterizar y clasificar *objetos deformables* X y aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$ entre los mismos. Algunos ejemplos inmediatos en los que este enfoque podría ser aplicable aparecen asociados a fenómenos que aparecen en la Naturaleza (comportamiento de las nubes, p.e.) o vinculados a Biomedicina (modelado matemático del interior del cuerpo humano, p.e.).

Los “ejemplos” mencionados son demasiados difíciles y por ello se recurre a modelos “de juguete” que pueden ser entendidos como “piezas básicas” a partir de las cuales recomponer objetos de gran complejidad. La introducción de dichos modelos básicos y las estructuras superpuestas (correspondientes localmente a sistemas de ecuaciones definidos sobre los modelos) permiten desarrollar una estrategia constructiva mediante técnicas de descomposición y recomposición que se pueda aplicar a un gran número de áreas de Ciencias Naturales y de Ingeniería.

Para poder llevar a cabo este programa, es necesario introducir algunas nociones básicas que permitan caracterizar propiedades “quasi-homogéneas”. Estas nociones y los correspondientes resultados básicos facilitan el *reconocimiento* de la forma y el comportamiento en términos de clases variedades y aplicaciones, respectivamente. El caso suave (o diferenciable o de clase C^∞) es el más sencillo. En particular, la Topología Diferencial se puede caracterizar como el estudio de la topología de “objetos” diferenciables, con los problemas de clasificación y caracterización como problemas centrales. De forma más específica afecta a

- variedades suaves M o de clase C^∞ módulo difeomorfismo (enfoque absoluto), y de
- aplicaciones suaves $f : N \rightarrow P$ (enfoque relativo) módulo la acción de difeomorfismos sobre los espacios de partida N y de llegada P actuando de forma desacoplada (acción izquierda-derecha de doble conjugación) y bien acoplada (producto semidirecto que conserva el grafo).

La *estrategia inicial* (desarrollada en el módulo A_{12}) consiste en *linealizar* las variedades suaves M (correspondiente al espacio de partida o de llegada en el caso relativo), mediante el fibrado tangente $\tau_M = (TM, p, M, \mathbb{R}^m)$ o su dual el cotangente τ_M^* , y la diferencial $df_T N \rightarrow TP$. Fijadas bases en los espacios vectoriales la diferencial $d_x f : T_x N \rightarrow T_{f(x)} P$ en $x \in N$ está dada por la matriz jacobiana $Jac_x(f)$ que representa una aplicación lineal $d_x f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Este esquema de razonamiento se extiende de forma natural a otras “estructuras superpuestas” (fibrados, fibraciones, haces) que representan el “pegado” de sistemas de ecuaciones a resolver definidas sobre la variedad base M . Asimismo, se extiende a otros espacios base B que incluyen variedades X (algebraicas vs analíticas, p.e.), espacios de funciones (Hilbert $\mathcal{H}$, Banach $\mathcal{B}$, p.e.) o más

recientemente al marco probabilístico ó estadísticoo (en partifular para distribuciones parametrizadas, p.e.) e incluso al marco discreto y sus representaciones simbólicas (grafos $\mathcal{G}$, p.e.), con múltiples aplicaciones a otras áreas científicas y tecnológicas. La estrategia común consiste en estudiar el espacio base B y las estructuras superpuestas $\mathcal{E} = (E, \pi, B, F)$ sobre B .

Algunas motivaciones clásicas de la Topología Diferencial están relacionadas con la identificación y clasificación de “deformaciones” que afectan a la *forma de objetos* o al *comportamiento* de “agentes” que interactúan entre sí ó con el entorno bajo todo tipo de condiciones ambientales. Los objetos pueden ser rígidos o deformables y, en este módulo A_{41} se modelan como variedades suaves. Los “comportamientos” se modelan de aplicaciones que se describen en términos de diferentes “campos”. Los más sencillos son los campos escalares, vectoriales y co-vectoriales (duales de los vectoiales) que, en el marco real están dados como sigue:

- Los *campos escalares* son funciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$; en el caso discreto se interpretan como “pesos”.
- Los *campos vectoriales* son secciones locales $s : U \rightarrow TU \simeq U \times \mathbb{R}^m$ del fibrado tangente τ_M , cuyas curvas integrales se pueden interpretar como “trayectorias”.
- Los *campos co-vectoriales* son secciones locales $s : U \rightarrow T^* \simeq U \times \mathbb{R}^m$ del fibrado cotangente τ_M^* , cuyas hipersuperficies integrales se pueden interpretar como “restricciones”.

Cualquier combinación lineal de un número finito de productos formals de s campos vectoriales y r campos co-vectoriales con coeficientes dados por campos escalares, da un *tensor de tipo* (r, s) . Los tensores son ubicuos en todas las áreas de Física e Ingeniería, pues permiten representar características de la forma, el comportamiento y sus restricciones. A partir de los años noventa su uso se ha extendido a otras áreas relacionadas con la Teoría Económica (problemas de control óptimo, p.e.) o bien con la Bioemdicina (comportamiento de tejidos, fármacos, modelado de actividades cerebrales, p.e.).

Para resolver el reconocimiento de “objetos” y “comportamientos” se introduce un soporte topológico dado por un espacio base B con “estructura adicional” (de variedad diferenciable M , p.e.) y diferentes tipos de “campos” definidos sobre el soporte. Los “campos” están dados inicialmente por la asignación de una “cantidad multivectorial” a cada elemento $p \in M$. Dependiendo del “tipo de cantidad asignada”, se habla de campos escalares (funciones), vectoriales (distribuciones $\mathcal{D}$ o sistemas $\mathcal{S}$ de formas) o tensoriales (productos de escalare, vectoriales y co-vectoriales), según un orden de complejidad creciente.

Es importante identificar las “modificaciones” que puedan aparecer sobre los objetos (variedades, p.e.) como resultado de la aplicación de diferentes tipos de campos, así como identificar las cantidades invariantes que puedan aparecer en relación con dichos campos. Para ello, se introducen diferentes nociones de

C^r -equivalencia sobre C^r -aplicaciones $f : N \rightarrow P$ que actúan localmente sobre los espacios de partida o de llegada de F , así como sobre las estructuras superpuestas. Este enfoque permite reducir el número de casos a estudiar.

0.1.1. El problema de la clasificación

Desde un punto de vista formal, el *objetivo fundamental de la Topología Diferencial* es la caracterización y clasificación de variedades y morfismos módulo equivalencia diferenciable, es decir, difeomorfismos (homeomorfismos diferenciables con inversa diferenciable). En el caso diferenciable los denotamos mediante M y $f : N \rightarrow P$; en casos más generales (Geometría Algebraica o Analítica, Análisis Funcional, Estadística, Geometría Discreta) los denotamos mediante X, Y, Z o $f : Y \rightarrow Z$, respectivamente. Para fijar ideas, en toda esta materia nos restringiremos a los casos real sobre $\mathbb{R}$ y complejo sobre $\mathbb{C}$, ignorando las extensiones a otros cuerpos. Asimismo, supondremos que el álgebra subyacente es conmutativa, ignorando extensiones a geometrías non-conmutativas (desarrolladas inicialmente por A.Connes, entre otros).

En el caso de (gérmenes de) aplicaciones $f : X \rightarrow Y$, la equivalencia diferenciable se formula en términos de pares de difeomorfismos que actúan sobre los espacios de partida y llegada (a la que se etiqueta como $\mathcal{A}$ -equivalencia o equivalencia izquierda-derecha) o bien que conservan el grafo Γ_f de f (a la que se etiqueta como $\mathcal{K}$ -equivalencia ó equivalencia de contacto). La descripción de estas acciones es la extensión natural de la correspondiente al caso de aplicaciones lineales $\varphi : V^n \rightarrow W^p$. En el caso topológico los coeficientes constantes (a valores en el cuerpo $\mathbb{K}$ se reemplazan por coeficientes dados por funciones de modo que las transformaciones sean “regulares” (la diferencial tiene rango máximo).

De cara a las aplicaciones, como frecuentemente no se tiene información completa (o existe una elevada incertidumbre en relación con zonas sobre las que se tiene muy poca información), es necesario extender el enfoque diferencial a aplicaciones no siempre definidas en todo el dominio, es decir, morfismos. La Geometría Algebraica A_3 proporciona un lenguaje inicial y herramientas (basadas en aplicaciones racionales, definidas fuera de un cerrado) para abordar este problema. Ello proporciona una explicación del crecimiento exponencial de las interrelaciones entre ambas áreas de las Matemáticas que tuvo lugar a lo largo de los años setenta y ochenta.

El soporte para extender la Topología Diferencial al Análisis radica en la extensión de la Geometría Diferencial al Análisis Funcional; una referencia es [Abr85]¹. El soporte geométrico inicial para esta extensión está dada por la estructura localmente Euclídea en Variedades Suaves M y en espacios de Hilbert $\mathcal{H}$. El soporte inicial para la extensión estadística de este enfoque está dada por la Teoría Geométrica de la Intersección; la referencia más relevante es [Ama14]

¹ RR.Abraham, J.Marsden and T.Ratiu: *Manifolds, Tensor Calculus and Applications*, Springer-Verlag, 1985.

². Según mi conocimiento, aún no se dispone de un manual de referencia para la extensión al caso discreto.

En todos los casos, los problemas fundamentales se refieren a la *construcción* de objetos (espacios y aplicaciones) mediante “pegado”, y a su clasificación módulo C^r -equivalencias. En este capítulo centramos la atención en el caso diferenciable o suave, es decir, para $r = \infty$ (en la sección 4 se comentan algunas extensiones a otras áreas). A diferencia del caso topológico en el que los homeomorfismos locales se obtienen como integración de campos vectoriales, no existe una estrategia general para construir difeomorfismos. Para remediarlo, se consideran estructuras superpuestas a las variedades con condiciones de trivialidad topológica local que heredan las mismas propiedades del espacio base B .

El pegado local de datos para C^r -estructuras superpuestas (fibrados, p.e.) se lleva a cabo utilizando una extensión natural de la C^r -estructura del espacio base B gracias a la estructura producto (localmente trivial) sobre los abiertos U_i del recubrimiento $\mathcal{U}$ de B . La restricción de los cambios de carta del espacio total a la fibra F_b en cada punto base da lugar a C^r -equivalencias de la C^r -estructura superpuesta que se traducen en “isomorfismos” sobre la fibra genérica F que se expresan mediante cambio de base.

0.1.2. Estructuras superpuestas

La superposición de estructuras $\xi = (E, \pi, B, F)$ (como extensión de sistemas de ecuaciones locales) proporciona herramientas para evaluar el “comportamiento” de el espacio base B (inicialmente una variedad) con respecto a “campos” que interactúan sobre ella. Asimismo, proporcionan información muy relevante para resolver la existencia ó no de isomorfismos $\xi \simeq \eta$ y los correspondientes problemas de clasificación de C^r -estructuras. Habitualmente, es más sencillo calcular invariantes sobre el espacio total de la C^r -estructura E , en lugar de hacerlo sobre B . En las materias precedentes se pueden encontrar multitud de ejemplos.

Algunos de los ejemplos más relevantes para *estructuras superpuestas* corresponden a fibrados vectoriales, fibrados principales, fibraciones, (pre)haces ó. con más generalidad, espacios anillados. Todas ellas proporcionan criterios de pegado usando la compatibilidad entre C^r -cartas locales (U_i, φ_i) sobre los abiertos con intersección $U_{ij} := U_i \cap U_j$ no vacía. Dicha compatibilidad se expresa en términos de la restricción

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

En este módulo A_{41} (Topología Diferencial Básica) se consideran las C^r -estructuras superpuestas más simples correspondientes a *fibrados vectoriales* ξ sobre variedades diferenciables m -dimensionales M . Los automorfismos de la fibra F juegan un papel importante para “pegar” datos locales; así, p.e. para el fibrado tangente $\tau_M = (TM, \pi, M)$ los automorfismos del espacio tangente $T_p M$

² S.T.Amari: *Information Theory and Applications*, Springer-Verlag, 2016.

en $p \in M$ permiten “conectar” diferentes visualizaciones de la evolución espacial en términos de los automorfismos de V donde $V \simeq \mathbb{R}^m$. En el módulo A_{42} este enfoque se extiende a fibrados principales y en el módulo A_{45} (Estratificaciones) a fibraciones más generales.

Los ejemplos más sencillos de fibrados vectoriales corresponden al *fibrado tangente* $\tau_M = (TM, \pi; M)$ y al *fibrado cotangente* $\Omega_M^1 = \tau_M^*$ (dual del fibrado tangente). En el caso relativo (morfismos entre variedades), el fibrado normal juega un papel fundamental para relacionar aspectos intrínsecos y extrínsecos. Interesa extender este enfoque al marco estadístico para facilitar modelos estructurales en relación con el análisis estadísticos de grandes volúmenes de datos.

A partir de los fibrados básicos (tangente y cotangente) se construyen fibrados tensoriales $T^{r,s}(M)$ (producto tensorial de r copias de Ω_M^1 y s copias de τ_M) cuyas secciones son los campos tensoriales comentados más arriba. Los campos tensoriales tienen gran interés para todo tipo de aplicaciones en Física e Ingeniería: permiten representar la geometría, la cinemática y los diferentes tipos de “atributos” (radiométricos, p.e.) en términos de formas sobre variedades.³

0.1.3. Homogeneidad e isotropía

En algunos casos especialmente favorables se tiene una estructura localmente G -homogénea para la acción de algún grupo G sobre la variedad M o, al menos, algún tipo de isotropía para la propagación de un fenómeno. En el caso diferenciable, estas propiedades se formalizan en términos de un grupo de Lie G con álgebra de Lie asociada $\mathfrak{g} := T_e G$ más fácil de estimar. La extensión de esta idea a las estructuras superpuestas da lugar a la noción de *fibrado principal* que desempeña un papel fundamental en Física Teórica desde los años sesenta.

Los *fibrados principales* presentan una caracterización similar a la de los fibrados vectoriales, pero la fibra en lugar de ser isomorfa a un espacio vectorial r -dimensional $V \simeq \mathbb{R}^r$ (donde r es el rango del fibrado), es isomorfa a un grupo G (Habitualmente un grupo clásico). La fijación del grupo G en los fibrados Principales es incompatible con fenómenos de captura o de ruptura de simetrías. La posibilidad de considerar grupos “encajados” aparece en diferentes formas a lo largo del módulo que incluyendo supergrupos en Física Teórica, estratificaciones fluctuantes o bifurcación equivariante en Sistemas Dinámicos.

Los casos inicialmente más interesantes corresponden a grupos clásicos, con importantes aplicaciones a la Física Teórica (Modelo Estándar y Gran Unificación para los diferentes tipos de interacciones, p.e.) e Ingeniería (Visión Computacional B_2 o Robótica B_3 , p.e.). Estos tópicos se desarrollan en el módulo A_{42} (Fibrados) de A_4 (Topología Diferencial). Las aplicaciones a Mecánica Computacional se desarrollan con más detalle en la materia B_1 . Las relaciones de inclusión entre grupos clásicos se han especificado en el capítulo 5 del módulo A_{12} . Las propiedades topológicas (recubrimientos, p.e.) se describen en el módulo

³ Para detalles y referencias ver el módulo A_{12} (Linealización) de la materia A_1 (Geometría Diferencial). Las aplicaciones a Ingeniería se detallan en las materias B_i .

A_{24} (Geometric Topology).

Las transformaciones entre las fibras de un fibrado vectorial, de un fibrado principal o de una fibración topológica son las correspondientes a cada una de las categorías mencionadas (pudiendo presentar singularidades para fibraciones algebraicas o analíticas). Por ello, el estudio de las fibraciones es bastante más complicado que el de los fibrados vectoriales o principales ⁴.

El estudio global de las fibraciones presenta una mayor complejidad debido a las posibles singularidades en la base o bien a degeneraciones de la fibra que pueden aparecer. El enfoque basado en la topología de los ideales primos de funciones polinomiales o analíticas se ha desarrollado en el módulo A_{33} (Haces, Cohomología, Esquemas). En este módulo recuperamos el enfoque diferenciables A_1 , pero ahora en términos de (ideales de) funciones diferenciables. Las singularidades afectan ahora a las aplicaciones (enfoque relativo) y se describen en términos de estratificaciones A_{45} y Sistemas Dinámicos eventualmente singulares A_{46} .

0.1.4. Unificación: Prehaces y Haces

Desde el punto de vista topológico, todas las estructuras descritas más arriba son casos particulares de *Haces*. El lenguaje de haces introducido a principios de los cincuenta en los Seminarios coordinados por C.Chevalley y H.Cartan en París a principios de los cincuenta proporciona un marco general para abordar cuestiones que afectan a las Geometrías más usuales (Diferencial, Algebraica, Analítica). La primera formulación con cálculos explícitos para la Cohomología de Haces en el marco GAGA se debe a J.P.Serre (1956).

El álgebra Local proporciona un lenguaje que permite unificar las diferentes C^r -estructuras que podemos considerar sobre variedades topológicas. La adaptación del lenguaje de Haces al marco diferenciable se llevó a cabo en los años sesenta; el libro de Warner contiene una formulación precisa de esta adaptación; ejemplos significativos se pueden adaptar de A_{33} . El enfoque basado en álgebra Local una componente de Álgebra Conmutativa y otra de Álgebra Homológica. La componente correspondiente a Álgebra Conmutativa se adapta en Topología Diferencial al estudio de gérmenes de funciones y de aplicaciones singulares en los módulos A_{43} y A_{44} , respectivamente.

Los (*pre*)haces introducidos en el módulo 3 (Haces, Esquemas, Cohomología) de la materia A_3 proporcionan la estructura básica “universal” para los anillos de (gérmenes de) funciones de clase C^r en las diferentes categorías diferenciable, algebraica y analítica. Se desarrollan de forma sistemática en el módulo A_{33} (Haces, Cohomología, Esquemas) de la materia A_3 (Geometría Algebraica) para dar una soporte común a las Geometrías Algebraica y Analítica (GAGA).

No obstante, a lo largo de los primeros módulos de esta materia A_4 se adopta un enfoque más básico (evitando el formalismo de haces) con objeto de facilitar

⁴ Una aproximación topológica al estudio de fibraciones se ha presentado en el módulo A_{24} (Topología Geométrica) de la materia A_2 (Topología Algebraica. Un enfoque geométrico).

su comprensión y aplicabilidad a otras áreas científicas o tecnológicas. No obstante, para abordar cuestiones globales, se reintroduce el formalismo de haces en relación con cuestiones de estratificaciones (más detalles en el módulo A_{45}).

(*) Los (pre)haces proporcionan un lenguaje unificado con otras geometrías (semi)diferencial, (semi)algebraica y (semi)analítica correspondientes a las primeras extensiones de las Geometrías clásicas que se han abordado en materias precedentes (sobre todo A_1 y A_3) a variedades con borde. En particular, la introducción de variedades con “buneas” estratificaciones A_{45} (donde las “adyacencias” entre estratos verifican propiedades de continuidad para límites de espacios tangentes), permite considerar a las variedades (semi)analíticas como variedades (semi)diferenciables a trozos. Por ello, la categoría PS (Piecewise Smooth) se extiende de forma natural al caso estratificado.

(*) Otras extensiones con mayor complejidad corresponden al caso discreto donde es necesario reformular buena parte de los desarrollos de la Geometría Diferencial Discreta. Para ello, es necesario adaptar el lenguaje de la Topología Algebraica A_{22} (Homología y Cohomología de Complejos Simpliciales o Cuboidales); una exposición más sistemática se puede encontrar en B_{13} (Computational Differential Topology). Algunas de las extensiones recientes más interesantes conciernen a

- *Teoría Geométrica de la Información (GIT)*, especialmente para el caso paramétrico donde cada distribución se interpreta como un punto de una variedad. Un ejemplo típico está dado por las distribuciones normales multivariable $(X_1, \dots, X_n)$ parametrizadas por $(\mu_1, \dots, \mu_n; \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$, donde X_i es una variable aleatoria con distribución normal $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. La introducción de la métrica de Fisher-Rao da lugar a una variedad Riemanniana M_{FR}^{2m} con su correspondiente conexión Riemanniana o de Levi-Civita. La relajación de estas condiciones permite considerar conexiones afines compatibles con “efectos de deformación” más adaptables a deformaciones como las que aparecen en el contexto de la Topología Diferencial.
- *Inteligencia Artificial* con diferentes paradigmas para Machine Learning, en los que es necesario ir adaptando los parámetros correspondientes a aprendizaje supervisado (basado en modelos previos) vs no-supervisado (emergencia de patrones a partir del tratamiento estadísticos de los datos). La convergencia hacia un modelo que debe ser aprendido se interpreta como un tipo de “proyección” (más específicamente una submersión) sobre un modelo de “baja dimensión” que se describe tanto en términos del soporte de la red (capas sucesivas de neuronas), como de su eficacia para ajustar datos contaminados por el ruido (baja incertidumbre) a un modelo más estable. Las primeras formulaciones de este enfoque aparecen en las SOM (Self-Organizing Maps) de Kohonen [Koh97]. La primer síntesis del enfoque SOM y otros desarrollados en los noventa y primera década del siglo XXI aparece en [Coo16] que es la “Biblia” para cuestiones de Deep Learning.

Los dos items precedentes se desarrollan sobre todo en diferentes materias de la parte II de estas notas. La mayor parte de los contenidos de este módulo y los siguientes se ajustan a casos ideales en los que se tiene información completa sobre objetos (habitualmente variedades) y aplicaciones continuas entre objetos. Ninguna de estas hipótesis se corresponde con colecciones de datos experimentales. Por ello, es necesario adaptar los modelos presentados a situaciones más realistas incluso en áreas tan abstractas como la Física Teórica.

0.2. Outline of the chapter

In addition of this introduction, this chapter has the following four sections:

1. *Basic objects* starting with smooth manifolds M and smooth maps between manifolds $f : N \rightarrow P$, with an extension to more general varieties, and superimposed structures. One sketches some extensions to the discrete and statistical approaches to ease connections with some applications to Engineering.
2. *Generic topological notions*, with a special attention to Stability, Transversality, Deformation and matching local data issues.
3. *Applications to other areas* where one comments some aspects of Theoretical Physics, Natural Sciences, Engineering and Social Sciences, which are benefited of the interplay with basic notions and results of Differential Topology.
4. *Contents of the module* where one gives more details about goals, methodology, main results and challenges. Finally, one gives a more detailed commented list of references.

La primera sección de este capítulo está enfocada al modelado de “objetos” y “comportamientos” en términos de variedades y morfismos entre estructuras (fibrados, inicialmente) que se describen en términos de campos (escalares, vectoriales, tensoriales). Los problemas fundamentales a resolver son de clasificación, para los cuales se introducen diferentes tipos de invariantes, tanto absolutos (relativos a variedades) como relativos a morfismos (en términos de campos).

En la segunda sección se introducen nociones topológicas genéricas (como las de estabilidad ó transversalidad) y se presentan las propiedades deseables para las deformaciones asociadas a los diferentes tipos de campos. La presencia de singularidades de aplicaciones $f : N \rightarrow P$ entre variedades suaves motiva un enfoque relativo para el problema del pegado de datos.

0.2.1. Interplay with other areas

A continuación se presentan algunas aplicaciones seleccionadas a diferentes áreas de conocimiento con especial atención a cuestiones de Física Teórica (desarrollo paralelo a lo largo de la segunda mitad del s.XX) y de áreas seleccionadas de Ingeniería. En el module A_{42} se desarrollan los modelos correspondientes a los diferentes tipos de interacción que aparecen en Física Teórica, utilizando el lenguaje de Fibrados Vectoriales A_{12} y de Haces A_{33} . En la parte II de estas notas se desarrollan las correspondientes adaptaciones a las áreas siguientes: Mecánica Computacional de Fluidos B_1 , Visión Computacional B_2 , Robótica B_3 e Informática Gráfica B_4 .

Los *principios básicos* que facilitan la unificación están asociados a la *acción de grupos* (para reducir el número de tipos a anañizar), la *introducción de campos* (para representar la interacción) y el *uso de estratificaciones* (para representar “posibles transiciones” en el comportamiento de las soluciones de sistemas). En la última sección se presenta un resumen del contenido de este módulo, indicando algunos retos adicionales y algunos comentarios sobre referencias seleccionadas. Algunos de los más importantes conciernen a la extensión del enfoque propuesto a diferentes áreas de Ingeniería desarrolladas en la parte II. Las ideas básicas para la unificación conciernen a

- la introducción de acciones $\alpha : G \times B \rightarrow B$ de grupos G (o de álgebras $\mathfrak{g}$) sobre el espacio base B (o su evolución infinitesimal), para identificar estructuras localmente homogéneas o simétricas que faciliten la “propagación”;
- la utilización de campos tensoriales (producto de campos escalares, vectoriales, y covectoriales), y su extensión al caso discreto para relacionar datos del espacio base B y del espacio total E de una estructura superpuesta y unificar diferentes tipos de interacción;
- el estudio de las soluciones de sistemas de ecuaciones (representación local de las estructuras superpuestas) en términos de intersección de las variedades que representan (el ideal de) dichos sistemas;
- la interrelación entre aspectos locales y globales vinculados a intersección y productos tensoriales de estructuras, así como el análisis de la solubilidad de un sistema (o, por el contrario, la “obstrucción a resolverlo”);
- el uso sistemático de estratificaciones Σ_B para representar “cambios de estado” en B o transiciones de fase en E que tienen lugar en sistemas dinámicos sobre espacios no homogéneos o anisótropos.

Ninguna de estas ideas es original, pues ya han sido utilizadas en Física Teórica y Química-Física desde mediados del siglo XX. Sin embargo conviene tenerlas siempre presentes para tratar de adaptarlas tanto al caso discreto, como a la Estadística vinculada al análisis de grandes volúmenes de datos (Data Mining). Con ello se pretende extender la Teoría Geométrica de la Información

(síntesis de Estadística sobre espacios parametrizados y Geometría Riemanniana) a las correspondientes Teorías Topológica, Cinemática y Dinámica de la Información (desarrolladas en la Mecánica Computacional de Medios Continuos B_1) a las áreas de Ingeniería Matemática desarrolladas en las restantes materias de la parte II: Computer Vision $B - 2$, Robotics B_3 y Computer Graphics B_4 .

(*) Los *retos más difíciles* están vinculados a la posibilidad de una “resolución automática” de los sistemas de ecuaciones (diferenciales, algebraicos, analíticos) correspondientes a los diferentes tipos de estructuras superpuestas a las variedades. Ello requiere una re-formulación de Ecuaciones Diferenciales (ordinarias o en Derivadas Parciales) en términos de algún tipo de red neuronal artificial y un diseño eficiente de estrategias de aprendizaje para su resolución. Estas estrategias están inicialmente inspiradas en métodos matemáticos, con diferentes opciones representadas sobre grafos analíticos $\mathcal{G}$ y sus estructuras superpuestas.

0.2.2. Methodological issues

Along most of this matter we follow a top-down-approach, i.e. it is based on ideal models involving “objects”, and previously known maps $f \in C^r(N, P)$ between manifolds. The basic idea of Differential Geometry of smooth manifolds M makes a systematic use of linearization, consisting of replacing the manifold M by its tangent bundle $\tau_M = (TM, \pi, M; \mathbb{R}^m)$, and maps $f : N \rightarrow P$ between manifolds by its differential $d_x f$ at each point, and try of matching together all local data. First troubles appear in regard to

- Lack of constancy for the rank of the differential map $d_x f$, involving the kernel and cokernel submodules which are not necessarily subbundles of the tangent bundles. This remark motivates the introduction of more general structures (sheaves, typically), where kernel and cokernel can be matched together, by ignoring “jumps” in the rank.
- Need of considering “higher order” derivatives (specially in presence of singularities), requiring a more intrinsic and general expression in terms of k -jets (truncated Taylor polynomials of order k (chapter 2)).

The second item is deeper, because it can be interpreted from the algebraic viewpoint as the replacement of the linear approach by a “graded structure” corresponding to symmetric powers representing successive terms of the formal Taylor truncated polynomials. They provide much more accurate representations than envelopes by tangent spaces, but they display more complex properties from the geometric and topological viewpoints. Most of geometric aspects have been considered in the precedent matter A_3 . By this reason, we will restrict ourselves to topological properties, by adding some elements of their contact structure, which have not been considered before.

The replacement of a general Taylor development by a truncated Taylor polynomial poses the problem of their equivalence up to diffeomorphisms or

bianalytic equivalences. This claim is not true, in general, by the existence of non-null functions such as all their derivatives at a point are null (called “flat functions” at the infinity), which unfortunately, are dense. However, if we exclude them, one arrives to the notion of k -determinacy, i.e. one can replace the original map-germ $f : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^p, 0)$ by a map whose components are polynomials of degree $\leq k$ for some k . In this case, one says that f is finitely determined by its k -jet, and one can find its canonical form (representant) by the action of the group of diffeomorphisms or bianalytical transformations.

Given a vector bundle $\xi = (E_\xi, \pi_\xi, B_\xi, F_\xi)$ with total space E_ξ on a base space B_ξ with fibre F_ξ and structural projection π_ξ , the set $J^k E$ represents the k -jets $j^k s$ of local sections $s : U \rightarrow \pi_\xi^{-1}(U) \simeq U \times F_\xi$ for every trivialization open subset $U \subset B_\xi$ of ξ . In these terms, each local section can be interpreted as a local system of C^r -equations on the base space to be solved on the fiber (simpler structure), whose solutions are interpreted in the base space by taking their direct image under π_ξ .

With the precedent notation, the replacement of the differential by the k -jet $j^k f$ of the map-germ $f \in C^r(n, p)$ of a map $F : (N, x) \rightarrow (P, y)$, is lifted to a map $J^k E_\xi \rightarrow J^k E_\eta$ between spaces of k -jets where E_ξ and E_η are the total spaces of a morphisms $\phi : \xi \rightarrow \eta$ between vector bundles $\xi = (E_\xi, \pi_\xi, B_\xi, F_\xi)$ and $\eta = (E_\eta, \pi_\eta, B_\eta, F_\eta)$. In these terms, the maps $J^k E_\xi \rightarrow J^k E_\eta$ represent the relations between (solutions of) systems of equations to be reprojected on the corresponding base spaces.

Very often, it is very difficult to solve problems on the original base space, but if we find some “universal” map on an “appropriate space” (playing a “universal role”), things become much easier. Typical examples are given by Gauss maps on spheres or their extensions to Grassmann manifolds (whose points represent linear subspaces) or Flag Manifolds (whose points represent nested subspaces). This remark is the starting point of Classifying Spaces which plays a central role in Differential Topology for the classification of Vector Bundles (representing global systems of equations e.g.).

Along the two first modules we will restrict ourselves to a smooth manifold as support. The analysis of singularities for function germs A_{43} and map germs A_{44} provide a “catalogue” of singularities. Their geometric version is developed in the module A_{45} , where one needs a more sophisticated version of classifying spaces compatible with nested singularities which are described in terms of stratifications with “good geometric properties”. In presence of local or infinitesimal actions, everything becomes easier because one can “propagate” solutions of systems of equations to a “branch” passing throughout the singularity.

0.2.3. Equivariant approaches (*)

The first cases correspond to find canonical forms for symmetric maps (representing quadrics) or diagonal representations for non-degenerate square matrices; SVD (Singular Value Decomposition) and PAC (Principal Analysis Com-

ponents) provide the numerical and statistical versions for diagonalization. As it is well known, most square matrices can not be diagonalized. So, in addition of the above “examples”, finding Jordan canonical forms for an Endomorphism $\varphi : V \rightarrow V$ of a vector space can be considered as the first non-trivial case for an equivariant approach to the problem of finding canonical forms.

The above viewpoint is extended to the case of functions instead of matrices, but replacing the action of the General Linear Group by the action of algebraic groups or, more generally by local diffeomorphisms or bianalytic transformations. The most important cases (reductive, semisimple, unipotent) for algebraic group actions have been developed in the module A_{22} (Quasi-Projective Varieties). Linear and infinitesimal approaches are related between them, because the differential of a diffeomorphism preserving the origin of coordinates is the General Linear Group corresponding to the linear case, and one can recover diffeomorphisms by taking the exponential of regular maps between vector spaces.

To see how more general algebraic actions are related to infinitesimal actions, we need to make a “reduction” of multiple formal Taylor developments to Taylor polynomials in terms of k -jets, where one has the corresponding algebraic group actions in terms of k -jets of diffeomorphisms. The first goal is to identify canonical representatives w.r.t. to some of the most usual equivalence relations. The two main cases for map-germs $f \in C^r(n, p)$ correspond to

- The $\mathcal{A}$ -equivalence or right-left equivalence, where $\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ is the direct product of the right or $\mathcal{R}$ -equivalence $f \mapsto f \circ h^{-1}$ for every $h \in \text{Diff}_0 \mathbb{K}^n$, and the left or $\mathcal{L}$ -equivalence $f \mapsto k \circ f$ for every $k \in \text{Diff}_0 \mathbb{K}^p$. So, the $\mathcal{A}$ -equivalence gives a decoupled action

$$\mathcal{A} \times C^r(n, p) \rightarrow C^r(n, p) \quad | \quad [(h, k), f] \mapsto k \circ f \circ h^{-1}$$

- The $\mathcal{K}$ -equivalence or contact equivalence characterized by mapping the graph of a map f on the graph of another map g by means a diffeomorphism (some times one says that it “preserves” the graph for a fixed f).

More formally, two map germs $f, g : X \rightarrow (Y, 0)$ are $\mathcal{K}$ - or *contact equivalent* if there is a diffeomorphism $\Psi : X \times Y \rightarrow X \times Y$ of the form $\Psi(x, y) = (\varphi(x), \psi(x, y))$ satisfying,

$$\Psi(x, 0) = (\varphi(x), 0) \quad \text{and} \quad \Psi(x, f(x)) = (\varphi(x), g(\varphi(x))).$$

In other words, Ψ maps the graph of f to the graph of g , as well as the graph of the zero map to itself. In particular, the diffeomorphism φ maps $f^{?1}(0)$ to $g^{?1}(0)$. The name contact is explained by the fact that this equivalence is measuring the contact between the graph of f and the graph of the zero map.

Contact equivalence is the appropriate equivalence relation for studying the sets of solutions of equations, and finds many applications in dynamical systems and bifurcation theory, for example.

It is easy to see that this equivalence relation is weaker than $\mathcal{A}$ -equivalence, in that any pair of $\mathcal{A}$ -equivalent map germs are necessarily $\mathcal{K}$ -equivalent.

When one takes the r -jets $j^r h$ of diffeomorphisms acting on the source space, and the r -jets $j^r k$ diffeomorphisms, one obtains the corresponding algebraic action of the group $J^r G$ of diffeomorphisms or bianalytical transformations on the space $J^r_{x,y}(X, Y)$ of map germs at $(x, y) \in \Gamma(f)$ (graph of f). In 1986, W.Bruce, A.DuPlessis and C.T.C.Wall relate the notion of r determinacy with the existence of a unipotent group “stabilizing” the $\mathcal{B}$ -orbit of the map-germ f . Thus the geometry of unipotent groups in diffeomorphism groups giving the $\mathcal{B}$ -equivalence is the key to understand topological adjacencies between $\mathcal{B}$ -orbits $\mathcal{B}f$ of finitely determined map-germs $f \in C^r(n, p)$.

The next step concerns to give effective criteria to find explicit descriptions for such unipotent groups. Our strategy consists of characterizing their nilpotent Lie algebras, and compute their unipotent subgroups by using the exponential map. Explicit examples for the “simple singularities” (following the Arnol’d terminology) are given at the end of the module A_{42} . First “examples” for A_k , D_4 , E_6 and E_8 singularities were obtained by JF in 1989; quite explicit computations for all simple singularities appear in the Ph.D. dissertation of T.Pérez (University of Valladolid, 2002).

0.2.4. Extending the classical approach

The incorporation of the geometric viewpoint is performed in terms of varieties X representing the set of solutions of systems, representing “local sections” $s : U \rightarrow E \mid_U := \pi^{-1}(U)$ of a superimposed structures $\xi = (E, \pi, B, F)$. So, intersection properties in the total space E of ξ are the natural extension of intersection properties on the base space B which are analyzed in terms of the ideal I_S of a system S of equations⁵.

Action groups on B are naturally lifted to E through the corresponding homogeneity of the typical fiber F . Intersections of subvarieties of the base space B or the total space E are re-interpreted in terms of the product of tensor fields corresponding to the local systems of equations. Their space-time evolution (described in terms of “affine connections”), including possible “abrupt changes” in their behaviour, are analyzed in terms of stratifications compatible with the group action. All of them provide a G -equivariant approach on a locally symmetric space B or R .

A related problem consists of how managing the presence of a finite collection of “events” which are modelled in terms of

- singularities for the group action linked to breaking vs capture of symmetries (equivariant bifurcation);

⁵ See the module A_{32} (Quasi-Projective Varieties) for a general approach in the Algebraic and Analytic Geometry A_3 framework.

- singularities of tensor fields, where suddenly the type (r, s) of a tensor “jumps”, which is managed in terms of constructing explicit “completions” of the ambient space of tensors;
- singularities of dynamical systems A_{46} on stratified spaces A_{45} , which are analyzed in terms of collapsing vs expanding behaviours linked to systems of equations on the total space E or the base space B , to be extended to higher order systems of equations (intrinsically represented by k -jets).

In presence of a “multi-germ”, i.e. a finite collection of several isolated singular germs, one can extend methods and tools for this case, and reinterpret in terms of some “projective characters” and the Milnor number $\mu(f)$ (dimension of , also. A more complex problem concerns to the study of non-isolated singularities. To simplify and to give a geometric meaning, we will restrict ourselves to singularities arising from generic projections as typical cases of “stable” singularities w.r.t. generic perturbations.

(*) Generic projections play a fundamental role not only for the classical study of Quasi-Projective Varieties A_{32} , but for dimensionality reduction problems. These issues become central in several contexts where the huge volume of data require a reprojection on lower-dimensional varieties X , and how the last ones can be re-projected on smaller dimensions without losing information. The first problem involves to “learning manifolds” in AI, whereas the second one concerns to compression without loss in Information Theory.

(*) Semi-classical approaches are related with Geometric Information Theory (GIT) developed from the nineties by S.T. Amari et al [Ama16]. In view of the high variability of data along time, classical Time Series approaches (including ARIMA) are not enough to represent transitions between evolving systems. It is necessary to perform an extension of GIT to the topological, kinematic and dynamical frameworks (labelled as TIT, KIT and DIT, respectively). Some preliminary results have appeared along the last years of the second decade of the 21st century. A more systematic approach will be developed in the corresponding modules B_{13} (Computational Differential Topology), B_{14} (Computational Kinematics) and B_{15} (Computational Dynamics) of the matter B_1 (Computational Mechanics of Continuous media).

0.3. References for this introduction

0.3.1. A basic bibliography

Only some textbooks are included. For more enlarged bibliography, see the subsection §5.4. References for meaningful research articles are included as footnotes.

[Gui74] V. Guillemin and Pollack: Differential Topology, Prentice Hall 1974.

[Hat02] A. Hatcher: *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002 (see his web page for an update)

-
- [Hir76] M.W.Hirsch: *Differential Topology*, GTM, Springer-Verlag, 1976.
 - [Hus73] D.E.Husemoller: *Fibre bundles*, GTM, Springer-Verlag, 1973.
 - [Mil65] J. Milnor: *Topology from a differentiable viewpoint*, Virginia Univ. Press 1965.
 - [Nak90] M.Nakahara: *Geometry, Topology and Physics*, Adam Hilger, IOP, 1990.
 - [Nov97] S.P.Novikov: *Topology I*, Springer-Verlag, 1997.

0.3.2. Software resources

In the module B_{13} (computational Differential Topology) we will develop a more computational approach to the above issues. Their foundations can be found in

- [Ama16] S.T.Amari: *Information Theory and Applications*, Springer-Verlag 2016.
- [Her13] M.Herlihy, D.Kozlov, S.Rajsbaum: *Distributed Computing Through Combinatorial Topology*, 2013.
- [Zom05] A.J. Zomorodian: *Topology for Computing*. Cambridge Univ. Press, 2005.

Final remark: Readers which are interested in a more complete presentation of this chapter (currently available in Spanish language, only), or the introductory chapter to the modules A_{4k} (Differential Topology), please write a message to javier.finat@gmail.com

1. Variedades y morfismos

Si se adopta un *enfoque top-down* (basada en modelos) los objetos del mundo real se modelan en términos de variedades inicialmente topológicas sobre los que se superponen diferentes tipos de C^r -estructuras localmente triviales (diferentes tipos de fibrados o fibraciones, p.e.) sobre el espacio base B .

- Para $r = \infty$, las estructuras soportan una estructura localmente Euclídea equivalente a $\mathbb{R}^n$ que facilita la extensión al marco analítico (espacios de Hilbert, p.e.) o Estadístico (espacios de medida parametrizables, p.e.).
- En el caso algebraico los abiertos U_i del recubrimiento $\mathcal{U}$ para el espacio base son equivalentes a un espacio afín $\mathbb{A}^n$, donde debemos usar “conexiones” para recuperar propiedades formales relativas a la diferenciación e integración.

La realimentación entre ambas es necesaria para operaciones que requieran una realimentación entre un enfoque afín de localización aproximada y otro Euclídeo para operaciones precisas. Esta realimentación afecta tanto al espacio base B como a la estructura E (espacio total de un fibroad o fibración, p.e.). La teoría de Fibrados A_{42} proporciona herramientas para relacionar todo tipo de marcos geométricos para las estructuras superpuestas. En este módulo estudiamos propiedades del espacio base tanto para el caso absoluto como relativo a $f : N \rightarrow P$ en el marco diferenciable.

La C^r -estructura del espacio base B para $0 \leq r \leq \infty$ se describe en términos de un C^r -atlas formado por cartas (U_i, φ_i) donde los U_i son abiertos que recubren B topológicamente equivalentes a abiertos de $\mathbb{K}^n$, y las $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{K}^n$ son C^r -equivalencias verificando condiciones de compatibilidad sobre las intersecciones $U_{ij} := U_i \cap U_j$ de pares de abiertos que facilitan el pegado local de datos. Para ello, se impone la condición de que las transformaciones

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \big|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

sean C^r -equivalencias. El enfoque *top-down* para el modelado de objetos utiliza diferentes tipos de C^r -estructuras. Interesa saber qué tipos de C^r -estructuras geométricas (diferenciable M vs algebraica ó analítica X) son compatibles con la C^0 estructura del espacio topológico base B .

Si se adopta un *enfoque bottom-up* (priorizando datos capturados por operadores o bien por un sistema de sensores), se obtienen distribuciones discretas irregulares. Una estrategia habitual consiste en asociar algún tipo de PL-variedad a los datos en términos de (multi)caminos o bien de mallas generalizadas (ver la materia A_2 , Topología Algebraica). En ambos casos, se dispone de PL-estructuras (PL: Piecewise Linear o Lineal a Trozos) con una colección de herramientas y resultados que facilitan la gestión de la información de forma combinatoria.

Obviamente, la PL-categoría es una sub-categoría de la topológica. Para simplificar en las aplicaciones nos restringimos a situaciones en las que los C^0 -objetos admiten una aproximación “suficientemente buena” por PL-objetos, suponiendo frecuentemente que los objetos son “triangulables”, es decir, existe un homeomorfismo entre el objeto original y una PL-aproximación. Las relaciones entre estructuras continuas y PL-estructuras se han comentado en los módulos A_{23} (Cellular Complexes) y A_{24} .

Como la PL-categoría no es ni siquiera de clase C^1 (vértices de poligonales o aristas proporcionan ejemplos donde las funciones no tienen derivada continua), es necesario disponer de resultados de aproximación entre las C^r -categorías geométricas y la PL-categoría. En particular, sería deseable contar con deformaciones de la PL-estructura en estructuras suaves, es decir, de clase C^∞ . Lamentablemente, la categoría C^∞ no es densa en la categoría C^0 (ver la subsección siguiente). Por ello, es necesario “acotar la variabilidad” entre ambas aproximaciones.

No obstante, los PL-métodos proporcionan herramientas para el cálculo efectivo de invariantes (grupos de homotopía o de co-homología, p.e.) de la clase de homotopía. En particular, los invariantes de cualquier complejo celular asociado a una PS-estructura se pueden calcular de forma combinatoria (usando una PL-estructura subyacente) ó bien de forma diferencial, obteniéndose el mismo resultado para variedades compactas. La extensión de esta idea bien conocida en los años treinta del s.XX al caso de variedades algebraicas o analíticas no es elemental. Por ello, es necesaria una discusión previa de los tipos de C^r -variedades más frecuentes a los que aplicar las herramientas de la Topología Diferencial.

1.1. Tipos de Variedades

Una C^r -variedad es una clase de equivalencia de C^r -estructuras definidas sobre un espacio topológico X . Para fijar ideas, nos restringimos a C^r -estructuras continuas sobre espacio inicialmente continuos ⁶. Interesa estudiar bajo qué condiciones se puede superponer sobre un soporte topológico X estructuras adicionales (diferenciables, algebraicas, analíticas) de interés para diferentes tipos de Geometrías.

Una C^r -estructura para $r \geq 0$ se obtiene “pegando” trozos de espacios equivalentes al espacio cartesiano n -dimensional $\mathbb{R}^n$ o bien al espacio afín $\mathbb{A}^n$ mediante aplicaciones que son C^r -equivalencias sobre el dominio de definición dado por (la imagen de) la intersección $U_i \cap U_j$ de dos abiertos C^r -equivalentes a abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Dependiendo de los valores de $r \geq 0$ se tiene una colección obvia de inclusiones estrictas entre las C^r -estructuras sobre X :

$$C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \dots C^\infty = \bigcap_{r \geq 0} C^r$$

⁶ El caso discreto se introduce en la última sección en relación con algunas aplicaciones a Física e Ingeniería.

que induce una jerarquía natural asociada a r para las cuestiones de clasificación y caracterización relativas a las posibles estructuras adicionales (diferenciables, algebraicas, analíticas). Estas estructuras están directamente relacionadas con las propiedades requeridas para las aplicaciones definidas localmente sobre los abiertos U dle espacio topológico X . Los casos más relevantes dan lugar a diferentes subáreas de conocimiento con las que se supone alguna familiaridad:

- *Topología Conjuntista* con la Topología Algebraica como PL-aproximación (PL: Piecewise Linear) donde $r = 0$ con los homeomorfismos (aplicaciones biyectivas y bicontinuas) como C^0 -equivalencias.
- *Geometría Diferencial* para $r = \infty$ con los difeomorfismos (homeomorfismos diferenciables con inversa diferenciable) como C^∞ -equivalencias. Denotamos mediante $M, N, P, \dots$ a las variedades diferenciables que son clases de equivalencia para C^∞ -equivalencia
- *Geometría Algebraica* para $r = rat$ con los transformaciones birracionales (aplicaciones racionales con inversa racional) como C^{rat} -equivalencias.
- *Geometría Analítica* para $r = \omega$ con las transformaciones bianalíticas (analíticas con inversa analítica, es decir, con desarrollo en serie convergente en cada punto) como C^ω -equivalencias. En el caso complejo, la condición de analiticidad equivale a la de holomorfía; por ello, las C^ω -equivalencias reciben el nombre de transformaciones biholomorfas, es decir, holomorfas y con inversa holomorfa (verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann que representan la condición de “formas cerradas” para la diferencial compleja.

En esta subsección se dedica un apartado a comentar algunas ideas básicas relacionadas con cada una de las categorías mencionadas. No se consideran casos “intermedios” para $0 < r < \infty$ pues, como se ve en el capítulo 2, la categoría C^∞ es “densa” en la C^r para cierta topología que se especifica más adelante. Por ello, a pesar del interés que tiene para aplicaciones en otras áreas (Física, Ingeniería o Teoría Económica, p.e.) no se consideran los casos “intermedios”.

La “moral” de esta introducción consiste en mostrar cómo los métodos de Topología Diferencial proporcionan herramientas de gran interés en cada uno de los contextos citados. Los “objetos” considerados en esta primera subsección son C^r -variedades.

1.1.1. Variedades topológicas

Una *estructura topológica* ó C^0 -estructura sobre un espacio topológico X es un par $(\mathcal{U}, \Phi)$ en el que $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ es un recubrimiento de X por abiertos $U_i \subset X$ y $\Phi = (\varphi_i)_{i \in I}$ es una colección de homeomorfismos sobre abiertos de $\mathbb{R}^m$ para algún $m \geq 0$ verificando condiciones de compatibilidad.

Una *variedad topológica* ó C^0 -variedad es la clase de una estructura topológica por C^0 -equivalencias, es decir, homeomorfismos (aplicaciones biyectivas y bicontinuas). Las variedades topológicas “heredan” el mismo tipo de propiedades

topológicas (compacidad, conexividad, separación) que los espacios topológicos subyacentes. La clasificación topológica de aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ utiliza (subgrupos de) homeomorfismos que actúan sobre los espacios de partida y llegada de f .

Las propiedades topológicas de variedades permiten discriminar entre diferentes tipos de variedades topológicas, dando lugar a los *problemas centrales* relativos a la *clasificación y caracterización* de variedades. Para fijar ideas, suponemos inicialmente que $m \geq 1$, es decir, relegamos los espacios discretos. La clasificación módulo homeomorfismos es difícil de describir globalmente de forma constructiva; utiliza propiedades básicas de Topología Conjuntista como la conexividad, compacidad y separabilidad.

En el caso más simple, es decir, para $m = 1$, sólo hay tres tipos de variedades topológicas *conexas* que son topológicamente equivalentes a $\mathbb{R}$, un intervalo cerrado (como $[0, 1]$, p.e.) y uno semiabierto (como $[0, 1[$, p.e.); todos ellos se pueden interpretar como (trozos de) caminos o trayectorias asociadas a una parametrización de cada intervalo. La clasificación de superficies módulo tipo de homotopía (relación de equivalencia más débil que la de homeomorfismo) se ha descrito en los módulos A_{21} (Homotopía) y A_{22} (Homología y Cohomología).

1.1.2. El problema de la clasificación

En dimensión superior, además de la extensión de los tipos básicos señalados, aparecen tipos adicionales, dando lugar a problemas de clasificación mucho más complicados. Un problema bastante más difícil consiste en dar condiciones para que una variedad topológica admita una C^r -estructura y, caso de admitirla, si es compatible con otras $C^{r'}$ -estructuras previamente existentes. Caso de no admitirla, es importante caracterizar cuál es la “obstrucción” a la existencia de dicha C^r -estructura.

En la materia A_2 (Topología Algebraica) se han introducido dos construcciones básicas asociadas a estructuras superpuestas (caminos y símlices generalizados, p.e.) que proporcionan invariantes topológicos (grupo fundamental y grupos de co-homología) que facilitan criterios para la clasificación. Estas construcciones se extiende tanto a grupos de homotopía de orden superior (asociadas a imágenes de esferas $\varphi : \mathbb{S}^k \rightarrow X$ de dimensión arbitraria k) o bien a teorías de cohomología generalizadas.

La “persistencia” de invariantes topológicos independientemente de la teoría de cohomología utilizada para calcularlos, pone de manifiesto la existencia de una estructura combinatoria subyacente para la que aún hay una gran cantidad de problemas abiertos. La teoría de “Motivos” proporciona un marco general para abordar este tipo de problemas que no se abordan en esta materia.⁷

En esta materia B_4 se priorizan métodos diferenciables que afectan a la variedad base M y las estructuras superpuestas ξ (fibrados, inicialmente), así como

⁷ Algunos aspectos básicos se comentan al final del módulo A_{33} (Haces, Cohomología. Esquemas) de la materia A_3 (Geometría Algebraica).

a las aplicaciones $f : N \rightarrow P$ y morfismos $\Phi : \xi \rightarrow \eta$ entre estructuras superpuestas. La descripción local de las estructuras superpuestas en términos de secciones locales $s : U \rightarrow \xi|_U := \pi^{-1}(U)$ permite introducir operadores entre fibrados como aplicaciones lineales $\Gamma(U, \xi|_U) \rightarrow \Gamma(U, \eta|_U)$ (o sus inversas) entre los espacios de secciones, tanto para tensores ordinarios como para operadores diferenciales de orden superior. El lenguaje de jets proporciona un soporte común para todas estas cuestiones.

1.1.3. Algunas estrategias básicas

Desde un punto de vista más elemental, una estrategia inicial para abordar los problemas de *clasificación* consiste en estudiar las clases de aplicaciones continuas entre espacios que permitan comparar datos básicos asociados a espacios de “lazos generalizados” o bien símlices (ordinarios o singulares) y sus generalizaciones a “espacios de células”. Dichos datos corresponden a grupos de homotopía y de homología para las estructuras superpuestas a los objetos iniciales. Ello motiva el estudio de los espacios de inmersiones ó, de forma más estricta, de embebimientos de dichos objetos básicos en variedades topológicas.

Incluso para datos tan básicos como una circunferencia $\mathbb{S}^1$, el problema está lejos de ser trivial. En Topología Algebraica se ha mostrado el papel que desempeñan los ciclos (imágenes de $\mathbb{S}^1$ en relación con los generadores del grupo fundamental o bien como borde de células $2D$). En la segunda subsección se presentan los embebimientos de $\mathbb{S}^1$ en el plano $\mathbb{R}^2$ (que dan lugar a las curvas simples) o en el espacio $\mathbb{R}^3$ (que dan lugar a la Teoría de Nudos).

En particular, desde el punto de vista topológico la identificación de los dos extremos de $[0, 1]$ a un punto, da lugar a un camino cerrado en el plano al que se llama “lazo”. Interesa identificar los generadores y las relaciones entre dichos generadores para las estructuras algebraicas correspondientes. Inicialmente se trata de grupos de orden superior para la homotopía $\pi_k(X)$ ó para la homología $H_k(X; R)$; posteriormente, se introducen diferentes tipos de productos sobre la cohomología $H^k(X; R)$ que permiten dotar de una estructura de anillo al conjunto de clases de equivalencia de funcionales definidos sobre la variedad.

Para el cálculo efectivo de los invariantes interesa contar con una estructura “celular” que extiende y simplifica las descomposiciones simpliciales más clásicas. Las unidades básicas de esta estructura son células k -dimensionales $(e_i^k, \partial e_i^k)$ que son homeomorfas a $(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ donde la esfera $(k-1)$ -dimensional $\mathbb{S}^{k-1}$ es el borde $\partial \mathbb{B}^k$ de la bola k -dimensional $\mathbb{B}^k$.

De forma complementaria, desde el punto de vista algebraico la introducción de espacios de jets $J^k(n, p)$ para C^r -aplicaciones con $r \geq k$, permite reducir el problema infinito-dimensional de clasificación de C^r -aplicaciones $C^r(n, p)$ a un problema finito-dimensional en el álgebra graduada de familias de p polinomios en n variables $(x_1, \dots, x_n)$ para $U \subset N$.

Las propiedades básicas (aunque no elementales) de los espacios de k -jets se abordan en el capítulo 2 de este módulo. El tratamiento global en térmi-

nos de morfismos entre fibrados se desarrolla en el módulo A_{42} (Fibrados). Las cuestiones relacionadas con la clasificación de (gérmenes de) funciones en A_{42} y con (gérmenes de) aplicaciones en A_{44} , donde se muestran algunas aplicaciones a otras áreas científicas y tecnológicas. In tratamiento unificado sobre variedades no-regulares pero estratificadas se lleva a cabo en A_{45} . Su “evolución espacio-temporal” en A_{46} (Sistemas Dinámicos). Estas observaciones ponen de manifiesto la profunda imbricación entre aspectos locales y globales que cruza todo el módulo.

1.1.4. Local vs Global

La estructura global se obtiene pegando datos locales. Diferentes estrategias han sido descritas en A_{22} (estructuras simpliciales vs cuboidales) que se han extendido a los complejos celulares desarrollado en A_{23} . El “pegado” de células $(e_i^q, \partial e_i^q) \simeq (\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1})$ para construir C^r -variedades X se lleva a cabo identificando (componentes de) el borde de células adyacentes. Este tipo de construcciones pone en escena varios problemas no-elementales: Clasificar, construir y “pegar” de forma explícita las clases de aplicaciones de discos y esferas en pares de espacios topológicos.

La Teoría de Morse Elemental (capítulo 6 de este módulo) proporciona criterios efectivos para resolver los tres problemas para cualquier variedad suave compacta M utilizando el lugar crítico asociado a funciones de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Este enfoque admite múltiples extensiones al caso complejo, a variedades algebraicas eventualmente singulares (usando estratificaciones o bien a variedades compactas infinito-dimensionales (ver módulo A_{45} para detalles y referencias).

En la Teoría Avanzada de Morse, el estudio basado en puntos críticos de funciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se extiende al estudio de funcionales sobre espacio infinito-dimensionales. Algunos de los ejemplos más importantes conciernen a

- *geodésicas*: minimización del funcional distancia a lo largo de curvas con extremos prefijados;
- *superficies minimales*: minimización del área con borde prefijado;
- *flujos minimales*: minimización del volumen con superficie borde prefijada;
- *Funcional de Yang-Mills*: minimización del funcional de curvatura sobre el espacio de conexiones.

Todos ellos son casos particulares correspondientes a la minimización de un funcional Lagrangiano de tipo cuadrático en la formulación variacional (etiquetada clásicamente como de Euler-Lagrange) de la Mecánica Analítica. El cuarto “ejemplo” juega un papel fundamental en el modelo estándar para la Mecánica Cuántica que unifica las interacciones electromagnética, débil y fuerte.

La C^r -clasificación de aplicaciones de $(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ sobre pares $(X, \partial X)$ se lleva a cabo en el caso local en los módulos A_{43} (Singular Functions Germs) y

A_{44} (Singular Map-Germs). El paso de aspectos locales a globales utiliza multi-gérmes. Esta clasificación se aplica a otras áreas de las Matemáticas (deformaciones ó análisis variacional, p.e.); algunas aplicaciones a Ingeniería se introducen en la materia B_1 (Computational Mechanics).

La extensión de la clasificación de funciones a operadores diferenciales presenta una complejidad enorme. En el módulo A_{42} se aborda el estudio de los operadores elípticos (como la Laplaciana, p.e.) actuando sobre espacios de Fredholm definidos sobre variedades compactas. El resultado central de esta teoría está dado por los Teoremas del Índice de Atiyah-Singer. Algunos de los “casos particulares” de estos Teoremas incluyen los Teoremas de Gauss-Bonnet-Poincaré-Hopf en Geometría Diferencial Real (relativos al complejo de De Rham) ó los Teoremas de Riemann-Roch-Grothendieck-Hirzebruch en GAGA (relativos al complejo de Hodge-Dolbeault), entre otros.

Las cuestiones relacionadas con la “des-composición” a partir de piezas elementales (células), así como la descripción de “procesos” (sistemas dinámicos) sobre dichas piezas elementales reaparecen bajo diferentes apariencias a lo largo de varios módulos de Topología Algebraica A_2 y Diferencial A_4 . Algunas de las más relevantes en Topología Diferencial están relacionadas con las técnicas de Cirugía y los teorías de (co)bordism que se abordan en los últimos capítulos de este módulo.

Las aplicaciones de las técnicas de “pegado” en Física se abordan en términos de “espacios clasificantes”. La topología de los correspondientes grupos estructurales juega un papel fundamental, pues las clases (modulo isomorfismo) de los fibrados vectoriales o principales están dadas por las clases de homotopía de aplicaciones en dichos espacios clasificantes dados como cocientes G/H de grupos clásicos⁸.

Los métodos Topología Diferencial en Ingeniería se desarrollan en el módulo B_{13} (Computational Differential Topology). En las restantes materias de la parte II se muestran varias aplicaciones de estos métodos a Computer Vision B_2 , Robotics B_3 y Computer Graphics B_4 . Debido a las dificultades para especificar características globales en cada uno de estas áreas, la mayor parte de las aplicaciones tienen un carácter local.

1.2. El caso diferenciable. Aspectos topológicos

Las limitaciones de los métodos de las incipientes Topologías Combinatoria y Geométrica ya eran patentes en el primer cuarto del s.XX. Estas limitaciones motivaron el desarrollo de herramientas de tipo diferencial que se aplicaron inicialmente a variedades algebraicas complejas (Picard, Lefschetz) y reales (DeRham). El estudio de las relaciones entre las estructuras real y compleja para variedades diferenciables fue llevado a cabo por Hodge (desde un enfoque a caballo entre el Análisis y la Topología) y Pontrjagin (con técnicas más netamente topológicas).

⁸ Ver el módulo A_{24} (Geometric Topology) para más detalles.

Desde un punto de vista complementario, a lo largo de los años veinte, Elie Cartan clarifica el problema de caracterizar estructuras superpuestas sobre un soporte topológico, introduciendo invariantes de tipo diferencial. La introducción de la cohomología para variedades compactas por parte de G.DeRham (1931) clarifica las relaciones entre aspectos diferenciales y combinatorios. Desde los años treinta hasta finales de los cincuenta se desarrollan diferentes líneas de trabajo que extienden los resultados iniciales de DeRham desde diferentes puntos de vista que afectan entre otros a

- La clasificación de espacios homogéneos y simétricos (E.Cartan) en términos de grupos y álgebras de Lie que se presenta en el módulo A_{42} (Fibrados y Fibraciones);
- la topología de campos vectoriales sobre variedades incluyendo “patologías” que pueden presentar fibraciones de esferas que se presenta en el módulo A_{42} (Fibrados y Fibraciones);
- la topología de las variedades reales (H.Whitney) y las relaciones entre las estructuras real y compleja (Pontrjagin) que se presenta en el módulo A_{42} (Fibrados y Fibraciones);
- el desarrollo de diferentes teorías de dualidad para el caso real (Alexander, DeRham) y complejo (Dolbeault, Hodge) que se presenta al final del módulo A_{42} (Fibrados y Fibraciones).
- la topología de las variedades algebraicas complejas (W.Hodge, S. Lefschetz, S.S.Chern) que se ha presentado en el módulo A_{33} (Haces, Cohomología, Esquemas);
- las fibraciones entre variedades diferenciables y analíticas (C.Ehresmann) que se presenta en el módulo A_{45} (Estratificaciones);
- la construcción de variedades mediante adjunción de células para los casos real (M.Morse) y complejo (S.Lefschetz) que se ha presentado en los módulos A_{23} (Complejos Celulares) y A_{24} (Topología Geométrica);

La mayor parte de estos tópicos se abordan en módulos más avanzados de esta materia A_4 (Topología Diferencial). Por ello, aquí sólo nos centramos en algunas cuestiones “básicas” (aunque no elementales) vinculadas a la existencia o la clasificación de variedades, así como las aplicaciones con “buenas propiedades” topológicas (regularidad, “densidad”, genericidad relativa) que se analizan en términos de propiedades algebraicas (transversalidad, p.e.) o diferenciales (estabilidad con respecto a pequeñas perturbaciones, p.e.).

No obstante y a la vista de las motivaciones procedentes de otras áreas, en los apartados siguientes se comentan algunas cuestiones sencillas relacionadas con la topología diferencial de variedades algebraicas o analíticas.

1.2.1. TD de Variedades algebraicas

Las dos estrategias básicas para estudiar la topología de variedades algebraicas utilizan técnicas de homotopía o de cohomología:

- Una extensión del estudio de caminos conduce de forma natural al estudio de embebimientos o, con más generalidad, inmersiones de variedades muy simples (esferas de diferente dimensión, inicialmente) y a la posibilidad de reconstruir objetos complejos mediante técnicas de “pegado” o de forma complementaria de cirugía. Estas últimas conducen de forma natural a las técnicas de cobordismo que se introducen al final de este módulo A_{14} y se desarrollan con más detalle en el módulo A_{12} en el marco de la K-teoría.
- En el módulo A_{33} (Haces, Cohomología, Esquemas) se han presentado diferentes teorías de cohomología que se pueden entender como una extensión topológica al caso de variedades algebraicas o analíticas. A lo largo de los años cuarenta y cincuenta se desarrollan métodos para el cálculo explícito de la cohomología de variedades complejas (Hodge) y reales (DeRham). El desarrollo del Álgebra Homológica (síntesis de Cartan y Eilenberg a principios de los cincuenta) y de la Cohomología de Čech permite una reformulación unificada en términos de complejos bi-graduados que permiten comparar diferentes métodos sobre un mismo soporte usando sucesiones espectrales.

La topología de los espacios de caminos está presente desde principios del s.XIX en la aproximación trascendente a la integración de 1-formas diferenciales sobre curvas complejas (Abel, Cauchy). Las deformaciones de caminos cerrados se utilizan para calcular integrales (módulo períodos) y para encontrar las relaciones bilineales que caracterizan a las matrices de períodos; una primera versión primitiva se debe a B.Riemann. Desde un punto de vista diferencial, interesa evaluar la “persistencia” de las clases de equivalencia de curvas en el espacio de moduli $\mathfrak{m}_g$ para las curvas algebraicas de género g . Las degeneraciones que pueden aparecer en dicho espacio $(3g - 3)$ -dimensional, da lugar a diferentes compactificaciones que son difíciles de tratar incluso en este caso.

La introducción de una polarización (forma bilineal no-degenerada) sobre el espacio de variedades abelianas principalmente polarizadas $\mathcal{A}_g$ (asociadas a la matriz simétrica de períodos) permite trabajar sobre el espacio de cuádricas completas que proporciona una compactificación “estándar” del espacio $\mathcal{A}_g$ que se puede describir en términos diferenciales (ver tesis de JF). La existencia de una aplicación inyectiva $\varphi : \mathfrak{m}_g \rightarrow \mathcal{A}_g$ permite inducir una compactificación “estándar” sobre $\mathfrak{m}_g$, dando lugar a una estratificación con “buenas propiedades” desde el punto de vista diferencial ⁹.

La extensión de este enfoque a dimensión superior no parece elemental, ni siquiera para el caso de superficies algebraicas complejas compactas. Desde un punto de vista histórico, la adaptación de los métodos desarrollados para curvas

⁹ Para detalles y referencias sobre estratificaciones ver el módulo A_{15}

algebraicas complejas (representadas por superficies de Riemann) a superficies algebraicas complejas es obra de Picard, a sugerencia de Poincaré. Estos desarrollos están relacionados con la clasificación de superficies algebraicas complejas llevada a cabo a finales del s.XIX y comienzos del XX por la Escuela Italiana de Geometría Algebraica (Castelnuovo y Enriques). La extensión al caso de variedades complejas de dimensión arbitraria es obra de S.Lefschetz, W.Hodge y P.Griffiths.

Lamentablemente y como consecuencia del predominio de técnicas algebraicas en Geometría de Variedades Algebraicas, las motivaciones relacionadas con el enfoque trascendente casi han desaparecido del mapa desde los años ochenta. Por ello, dedicamos algunos comentarios mínimos sobre estas cuestiones ¹⁰.

1.2.2. TD de Variedades Complejas

Una primera extensión a variedades complejas de dimensión arbitraria se debe a Lefschetz a finales de los años veinte; no obstante, la sistematización a variedades compactas complejas no-singulares fue realizada por Hodge, quien introduce una estructura similar a la de los operadores diferenciales de primer orden, pero asociada en este caso a una versión intrínseca del operador de Laplace, con sus correspondientes herramientas de dualidad.

Como las cuestiones de compacidad se verifican de forma automática para variedades algebraicas inmersas en el espacio proyectivo, la atención de los aspectos topológicos básicos de Topología General se centra en cuestiones de conexidad en Geometría Algebraica. Esta cuestión depende fuertemente del cuerpo base y presenta problemas realmente difíciles para el caso real.

El análogo a la cohomología de DeRham A_{24} para el caso regular complejo fue inicialmente desarrollado por Hodge y formalizado por Dolbeault a mediados del siglo XX en el contexto de la cohomología de complejos bi-graduados. La extensión al caso de variedades complejas singulares incluye posibles degeneraciones en la (co)homología que extienden el enfoque desarrollado por S.Lefschetz (ciclos evanescentes) en la tercera década del siglo XX. Las estructuras mixtas de Hodge (MHS) permiten calcular la variación de la cohomología en presencia de deformaciones eventualmente singulares (Steenbrink)..

La resolución de singularidades para variedades construidas sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero (Hironaka, 1963) proporciona modelos regulares $\tilde{X}$ para variedades complejas. La aplicación de los métodos clásicos sobre $\tilde{X}$ permiten evaluar las “obstrucciones” a la existencia de soluciones para el caso singular en términos de “clases características”. El primer caso de hipersuperficies con singularidades asiladas (obstrucción de Euler) fue estudiado por Verdier y Gonzalez-Sprinberg ¹¹

A principios de los cincuenta, A.Weil lanza el programa de algebrización de los métodos trascendentes utilizados en Topología (Lefschetz, Hodge) que es una

¹⁰ Para más detalles ver módulos 4 y 5 de mis apuntes sobre Geometría Algebraica

¹¹ Detalles en el capítulo 3 (Clases de Chern) del módulo A_{35} (Enumerative Geometry).

de las motivaciones más importantes para la renovación de la Geometría Algebraica iniciada por J.P.Serre y A.Grothendieck (y sus doce apóstoles) a lo largo de los años sesenta (EGA, SGA). Este programa culmina con la demostración de los Teoremas de Lefschetz a principios de los setenta por parte de P.Deligne¹²

El desarrollo de métodos de Topología Algebraica a Variedades Algebraicas presenta una gran cantidad de problemas desde las primeras adaptaciones de modelos y herramientas de homotopía y de (co-)homología sobre variedades algebraicas X . El estudio de los espacios recubridores $\tilde{X}$ y de la acción del grupo de homotopía sobre $\tilde{X}$ es conocido en el caso de curvas o de variedades algebraicas muy simples, pero la variación de las estructuras algebraicas dependiendo del punto base $x \in X$ y de los haces superpuestos a las variedades presenta una dificultad bastante mayor que requiere un refinamiento de las herramientas asociadas al grupo fundamental o a la cohomología a valores en un haz; los materiales más relevantes están contenidos en SGA₁, EGA III y [Har77]¹³

1.2.3. TD de Variedades analíticas

Las relaciones entre las clasificaciones topológica, diferenciable y analítica son complicadas, incluso cuando una variedad topológica soporta todas esas estructuras. Uno de los primeros casos estudiado en profundidad corresponde a la distinción entre superficies de Riemann (definidas salvo equivalencia conforme) y variedades riemannianas 2-dimensionales. Si utilizamos la estructura diferenciable subyacente, una superficie de Riemann determina un conjunto infinito de 2-variedades riemannianas que son homeomórficamente equivalentes desde el punto de vista conforme. Por otro lado, es claro que una 2-variedad riemanniana no tiene por qué ser una superficie de Riemann.

Desde un punto de vista topológico, la teoría elemental de los espacios recubridores permite representar cualquier variedad analítica conexa X como un cociente de la forma $\tilde{X}/G$ donde $\tilde{X}$ es una variedad simplemente conexa (el espacio recubridor universal) y G es un subgrupo de $Aut(\tilde{X})$ que actúa de forma libre y discreta sobre $\tilde{X}$; más formalmente, la acción sobre la fibra es *propriadamente discontinua* (para más detalles sobre esta acción ver la conferencia de H.Cartan en México, 1957). Además, si X admite dos representaciones como cocientes del tipo descrito, entonces los grupos G del denominador con conjugados en $Aut(\tilde{X})$ (ver p.e. Shafarevich, 1974).

Esta representación de X como cociente $\tilde{X}/G$ permite introducir una acción de grupo “natural” (para obtener simetrías) y reducir el estudio de las variedades analíticas conexas al de las simplemente conexas y sus grupos de automorfismos. Desde el punto de vista diferencial y en relación con cuestiones de clasificación,

¹² Ver Hartshorne (1977) o bien los módulos 3 y siguientes de mis apuntes de la materia A₃ (Geometría Algebraica) para una introducción y referencias con algunas aplicaciones a baja dimensión

¹³ Para una introducción más básica ver el módulo 3 de mis apuntes de Geometría Algebraica

se puede plantear el desarrollo de una *Teoría Diferencial de Invariantes* (TDI) para (gérmenes de) variedades inicialmente analíticas complejas.

La primera aproximación local para hipersuperficies complejas con singularidades aisladas se debe a J.Milnor [Mil69]¹⁴ Algunas de las primeras contribuciones más relevantes relacionando aspectos locales (índices de campos vectoriales) y globales (clases de Euler locales) para hipersuperficies se deben a [Gon81]¹⁵. El caso correspondiente a codimensión ≥ 2 o el de gérmenes de aplicaciones de corango 2 presenta una dificultad bastante mayor. Desde un punto de vista histórico, se aborda en primer lugar en términos de espacios de jets.

Desde un punto de vista complementario (próximo a la Teoría Diferencial de Invariantes), algunas cuestiones previas al desarrollo de la conciernen a la descripción del soporte. La necesidad de contar con un tratamiento formal e intrínseco de las diferenciales de orden arbitrario motiva una extensión geométrica de los espacios de jets $J^k(n, p)$ introducidos en los años cincuenta por C.Ehresmann y R.Thom¹⁶. El Teorema de Multi-transversalidad de Thom (1956) y su interpretación geométrica es el resultado clave inicial para este estudio (ver capítulo 3 de este módulo para una formulación clásica).

El estudio de espacios de jets $J^k(n, p)$ se extiende a finales de los sesenta a fibrados de jets $J^k(E)$ donde E es el espacio de secciones de un fibrado vectorial ξ (Palais, 1970). Esta extensión está soportada por trabajos previos de Pohl (1968) quien muestra una descripción intrínseca de diferenciales de orden superior en términos de álgebra simétrica construida sobre los espacios de secciones de un fibrado. Sin embargo, la enorme diversidad de singularidades y los problemas de clasificación relaciones que aparecen desde el punto de vista local, da lugar a que la atención se centre en el análisis y clasificación de singularidades para (gérmenes de) funciones (módulo A_{43}) y de aplicaciones (módulo A_{44}).

La versión local e infinitesimal de este estudio en el marco diferenciable se lleva a cabo en Rusia por parte de la escuela de V.I.Arnol'd y en el resto de Europa bajo la coordinación de C.T.C. Wall. La vertiente analítica se desarrolla sobre todo en Francia bajo la coordinación de Douady y Verdier entre otros.

La estrategia diferencial local consiste en introducir diferentes relaciones de $\mathcal{B}$ -equivalencia asociadas a la acción de homeomorfismos (caso topológico), difeomorfismos (caso diferenciable) o aplicaciones biholomorfas (caso analítico) sobre el espacio de gérmenes de aplicaciones que se denota mediante $\mathcal{E}(n, p)$ (caso diferenciable) o mediante $\mathcal{O}(n, p)$ (caso analítico) que forman el núcleo central del módulo A_{44} de estas notas.

Esta estrategia (originalmente diseñada por J.Mather, 1970) permite clasificar e identificar los tipos canónicos de singularidades finitamente determinadas, es decir, $\mathcal{B}$ -equivalentes a su k -jet. Asimismo, proporciona un marco general para abordar los diferentes tipos de estabilidad que se consideran en el módulo

¹⁴ J.Milnor: *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton Univ. Press, 1969.

¹⁵ G.Gonzalez-Sprinberg, et J.L.Verdier: "L'obstruction d'Euler locale et le Théorème de MacPherson", *Astérisque* 82-83 (1981), 7-32.

¹⁶ intuitivamente corresponden a desarrollos de Taylor formales para aplicaciones $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$ donde $\mathbb{K}$ representa inicialmente el cuerpo de los reales o de los complejos

A_{44} (Clasificación de gérmenes de aplicaciones). Este enfoque fue desarrollado en Europa por C.T.C.Wall (Liverpool) y por V.I.Arnol'd (Moscú y Leningrado) a lo largo de los setenta y ochenta. Las aplicaciones a Óptica fueron desarrolladas por Bruce y Giblin (vinculados a la escuela de Liverpool), mientras que las aplicaciones a la Mecánica Clásica fueron introducidas por Arnol'd y su escuela a mediados de los ochenta.

1.2.4. Clasificación de gérmenes de aplicaciones

Desde el punto de vista algebraico, la condición de determinación finita es equivalente a la existencia de un grupo unipotente que deja invariante la $\mathcal{B}$ -órbita. El cálculo de dicho grupo unipotente no es elemental y, además, la geometría de la Variedad Unipotente (Tony Springer, hacia 1985) presenta una elevada complejidad. La linealización de este problema conduce de forma natural al estudio de las álgebras de Lie nilpotentes que dejan invariante el espacio tangente a la $\mathcal{B}$ -órbita.

En el caso de (gérmenes de) funciones correspondientes a singularidades simples (de tipo A_k , según la clasificación de Arnol'd) se dispone de una caracterización explícita para los generadores de dichas álgebras de Lie *nilpotentes* (tesis de Tomás Pérez, Valladolid, 2001) que proporcionan una aproximación infinitesimal a la adyacencia de las correspondientes $\mathcal{R}$ -órbitas. El método es completamente general, pero aparentemente aún no se ha extendido a singularidades más complicadas. El carácter nilpotente de esta acción proporciona un marco general para abordar cuestiones de disipación que extienden el enfoque clásico (asociado a modelos de tipos conservativo).

La extensión al caso global de esta idea a los espacios de $\mathcal{B}$ -órbitas sobre espacios de aplicaciones entre variedades o morfismos entre estructuras superpuestas (fibrados, fibraciones, haces) plantea retos en su mayor parte aún abiertos. Para empezar, es necesario trabajar con espacios de multi-gérmenes que pueden aparecer en relación con deformaciones genéricas (desdoblamientos versales, en un lenguaje más preciso) de los gérmenes originales. La extensión de estas ideas a distribuciones de campos o sistemas de formas diferenciales está aún pendiente de desarrollar.

De cara a los desarrollos que se llevan a cabo en el módulo 5 de esta asignatura es importante introducir algunas restricciones para que la acción sea holomorfa y el espacio de las G -órbitas tenga una estructura “tratable”. En este caso, aparecen solapamientos con cuestiones un poco más avanzadas de Geometría Algebraica y Analítica Compleja, por lo que se pospone su presentación hasta la introducción al módulo A_{45} (Estratificaciones).

Para terminar, P.J.Olver ha desarrollado un tratamiento sistemático de la TDI (Teoría Diferencial de Invariantes) en espacios de jets que permite unificar tanto las cuestiones relativas a gérmenes de aplicaciones, como las cuestiones relacionadas con el estudio de las deformaciones de sistemas de EDO o de EDP. Una conexión natural que aparece con la TGI aparece en relación con la re-

interpretación de dichos sistemas como “variedades algebraicas” dentro de un espacio de jets apropiados.

En este caso, no se puede esperar una generación finita para los invariantes diferenciables, pero sí es posible encontrar una gran cantidad de diferentes tipos de simetrías que proporcionan información estructural sobre los espacios de soluciones asociados a los sistemas diferenciales. Asimismo, Olver muestra relaciones con aspectos geométricos (Cartan, Frobenius, Kähler) de la Geometría Diferencial Compleja y del Análisis Variacional (complejos variacionales bigraduados) que ponen de manifiesto la enorme riqueza de su enfoque, a pesar de los escasos desarrollos que ha habido en esta línea desde la publicación de su libro [Olv95]¹⁷

1.3. El caso relativo

En esta subsección se extiende el enfoque “absoluto” basado en variedades a un enfoque “relativo” correspondiente a aplicaciones o con más generalidad morfismos (no siempre bien definidos) entre variedades. Para ello, se sigue un esquema similar al presentado en la materia A_2 .

En Topología Algebraica se ha mostrado cómo la clasificación relativa de objetos se lleva a cabo en términos de morfismos entre espacios $f : X \rightarrow Y$ ó entre pares de espacios $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, es decir, morfismos $f : X \rightarrow Y$ con $A \subset X$, $B \subset Y$ y $f(A) \subset B$. Los subespacios A , B pueden representar “restricciones adicionales” para los objetos originales X , Y en relación con el problema a resolver, representado por la aplicación f . De la misma forma que en Topología Algebraica, los teoremas de escisión juegan un papel fundamental para relacionar invariantes relativos con el comportamiento en “el borde” de las regiones.

El enfoque relativo para morfismos $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ entre pares de variedades se extiende de forma natural a estructuras superpuestas. La unificación con el enfoque algebraico o analítico procede de considerar las propiedades básicas de (las potencias de) los $\mathcal{O}_X$ -módulos de derivaciones Θ_X y diferenciales Ω_X^1 . Para recuperar condiciones de finitud (Noether vs Artin), en los módulos A_{43} y A_{44} nos restringiremos a gérmenes finitamente determinados, es decir, que son equivalentes a su k -jet para algún $k < \infty$.

La reformulación de las propiedades “naturales” relativas a pares de espacios y sus haces estructurales proporcionan el lenguaje para conectar los aspectos globales para el caso regular, desarrollados en los módulos A_{41} (Topología Diferencial Básica) y A_{42} (Fibrados), con los aspectos locales para el caso singular, desarrollados en los módulos A_{43} y A_{44} . La síntesis se lleva a cabo en A_{45} (Stratification). Algunos modelos básicos para interacciones cambiantes en espacios estratificados se muestran en A_{46} (Dynamical Systems)

El programa descrito es muy ambicioso y aún presenta un gran número de

¹⁷ P.J.Olver: *Equivalence, Invariants and Symmetry*, Cambridge Univ. Press, 1995.

problemas abiertos. Por ello y para fijar ideas, seguimos una estrategia de complejidad creciente. En este primer módulo de Topología Diferencial sólo se presentan propiedades básicas relativas sobre todo a pares de variedades topológicas o diferenciables. Un estudio más sistemático de las propiedades algebraicas de estructuras superpuestas requiere adaptar materiales procedentes de A_{33} (Haces, Esquemas, Cohomología) de la materia A_3 (Geometría Algebraica).

Para entender mejor el significado geométrico, en el módulo A_{42} (Topología de Fibrados y Fibraciones) se extiende el enfoque relativo para pares de variedades a pares de estructuras, lo cual proporciona un marco general para abordar las “deformaciones” de dichas estructuras y, por consiguiente, abordar el problema de moduli desde una aproximación diferencial,

1.3.1. Propiedades genéricas

Las propiedades “genéricas” se expresan en términos de conjuntos “densos” para cierta topología en el espacio topológico de las aplicaciones entre C^r -variedades. Los casos más sencillos corresponden a aplicaciones regulares (como los embebimientos, p.e.) o con diferencial regular (como las inmersiones o las submersiones, p.e.) o bien verificando condiciones de transversalidad. Todas estas condiciones son “genéricas”, es decir, existe una “pequeña perturbación” de cualquiera de dichas aplicaciones da lugar a una aplicación que verifica la misma propiedad topológica.

El Teorema de Multi-transversalidad en espacios de jets (R.Thom) para clases de aplicaciones diferenciables o analíticas proporciona un primer resultado completamente general para gérmenes de aplicaciones. Los fibrados de k -jets $J^k E$ de las secciones de un fibrado vectorial con espacio total E permiten extender este tipo de resultados a campos vectoriales o tensoriales mucho más generales. A pesar de ello, la clasificación de objetos o morfismos verificando propiedades genéricas no es tan simple como parece. Una de las razones es la posibilidad de “algún tipo de torsión”, como ocurre con la Teoría Topológica de Nudos o con más generalidad “trenzas” (tresses, braids).

La condición de genericidad afecta a un abierto (habitualmente de Zariski) en el espacio de parámetros para familias de algún tipo de campos (escalares, vectoriales, tensoriales). Por ello, la noción de “familia genérica” admite múltiples formulaciones dependiendo del contexto. Así, p.e. se pueden considerar deformaciones genéricas de funciones, aplicaciones, ecuaciones diferenciales (ordinarias o en derivadas parciales), estructuras superpuestas (fibrados, fibraciones, foliaciones, haces). En la práctica interesa obtener condiciones de finitud para el espacio de parámetros Λ de los que dependen las familias consideradas.

Como la condición de genericidad se expresa en términos de un abierto U del espacio de parámetros, ello implica que los “tipos no-genéricos” están en un cerrado C de codimensión $c \geq 1$ dentro del espacio de parámetros Λ . Por ello, una primera estratificación de tipos no-genéricos está asociada a la codimensión creciente. En el marco diferencial, la introducción de criterios basados en el Dis-

criminante introducen el rango de la matriz jacobiana como invariante adicional para la clasificación de gérmenes de campos. El caso de corango 1 y codimensión arbitraria para gérmenes de funciones se desarrolla en el módulo A_{43} (Singularidades de Funciones), mientras que el caso de corango ≥ 1 para gérmenes de aplicaciones se desarrolla en el módulo A_{43} (Singularidades de Aplicaciones)

1.3.2. Embebimientos

Un procedimiento general para construir subvariedades consiste en describirlas como imágenes por un “embebimiento” (ver más abajo). Un procedimiento alternativo (tipo Morse) consiste en describirlas como la imagen inversa de un valor regular para una función; la extensión de la segunda construcción a campos más generales que los escalares requiere elementos de transversalidad geométrica que se comentan con más detalle en el capítulo 3 de este módulo.

Un embebimiento $N \hookrightarrow P$ de una variedad N en una variedad P está dado por una aplicación inyectiva y propia que es una inmersión (diferencial inyectiva) que se denota mediante $N \hookrightarrow P$. En la Geometría de Variedades Algebraicas Projectivas, no se impone la condición de ser propia, pues se verifica de forma automática. En el capítulo 1 de este módulo se presentan los resultados básicos para aplicaciones regulares como Inmersiones, Submersiones y Embebimientos, introducidas en el módulo A_{12} (Linealización). La novedad radica en el estudio de espacios de aplicaciones regulares.

En cualquier caso, interesa dar criterios que permitan garantizar la existencia de embebimientos y mostrar procedimientos efectivos para su construcción. Las representaciones paramétrica e implícita son los dos paradigmas que aparecen en múltiples contextos. La Teoría de la Eliminación algebraica proporciona el marco para convertir representaciones paramétricas en implícitas. La conversión de representaciones implícitas en paramétricas es un problema más difícil que requiere Teoremas de Parametrización Local en cada uno de los contextos geométricos mencionados.

En un marco más intrínseco (tipo GAGA), la noción de “amplitud” es la clave para la existencia de inmersiones. Los ejemplos básicos de embebimientos utilizando propiedades del álgebra simétrica (Veronese) o multilineal (Segre) se han introducido en el módulo A_{32} (Geometría de Variedades Cuasi-Proyectivas) de las materia A_3 (Geometría Algebraica); la reformulación intrínseca de estos ejemplos proporciona una buena motivación para la noción de amplitud. Existen diferentes criterios de amplitud, algunos de los cuales son de gran utilidad para cuestiones de intersección, cuya versión local se aborda en el capítulo 5 de este módulo.¹⁸

Frecuentemente, se identifica una variedad con su imagen via un embebimiento, lo cual puede dar lugar a un gran número de confusiones. Así, p.e.

¹⁸ Ver módulos A_{32} (Variedades Casi-Proyectivas) y A_{33} (Haces, Cohomología, Esquemas) para detalles y referencias en el marco de la Geometría Algebraica.

- Cualquier curva simple (curva cerrada sin auto-intersecciones) en el plano $\mathbb{R}^2$ es la imagen por un embebimiento de la circunferencia $\mathbb{S}^1$.
- La imagen de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ por un embebimiento en el espacio $\mathbb{R}^3$ presenta una enorme cantidad de tipos a los que se etiqueta como *nudos*. Interesa dar criterios de clasificación al menos para los nudos suaves (tame), es decir, que dan un número finito de vueltas antes de regresar al punto de partida.

La clave para distinguir unos embebimientos con respecto a otros consiste en estudiar el fibrado normal a cada uno de los objetos considerados. La extensión de estos ejemplos a embebimientos más generales presenta una dificultad considerable, incluso si nos restringimos a imágenes de esferas (variedades localmente simétricas, armónicos esféricos, p.e.) o a fibraciones de esferas (descritas inicialmente por H.Hopf). Por ello, la clave consiste en combinar aspectos intrínsecos y extrínsecos de las variedades, tópico que reaparece bajo diferentes aspectos en términos de fibrados (co)tangentes y (co)normales en Geometría.

1.3.3. Curvas simples

El modelado topológico de siluetas en el plano se lleva a cabo en términos de curvas “simples”. En virtud del Teorema de Jordan ¹⁹, cualquier curva simple C descompone el plano en dos regiones con borde común C a las que se llama interior $Int(C)$ (región acotada) y exterior $Ext(C)$ a C ,

Para simplificar y facilitar la conexión con procedimientos efectivos de visualización, es conveniente restringirse a las curvas algebraicas simples. A pesar de su denominación, las curvas simples presentan una enorme diversidad morfológica que se traduce en el número finito (debido a su carácter algebraico) de los entrantes y salientes que puede presentar la región $Int(C)$.

Llamamos *silueta* $s_\alpha = \partial r_\alpha$ a cada curva simple que acota una región planar r_α . Desde un punto de vista volumétrico, la silueta es la proyección sobre el plano de imagen de un contorno aparente C_α correspondiente a la parte visible de un objeto desde una localización del observador (representado por una cámara eventualmente móvil $\mathbf{C}(t)$).

El *Reconocimiento de formas planas* a partir de siluetas requiere evaluar los entrantes y salientes de la silueta s_α . Desde un punto de vista dinámico, dichos entrantes y salientes se pueden interpretar como el resultado de “fuerzas” que actúan desde el exterior y el interior de la región s_α .

El *modelado geométrico* de la topología aparente de la silueta s_α se lleva a cabo en términos de “fuerzas” tangenciales y normales (interior y exterior) para la curva simple que representa la silueta. Para describir la *variación de la forma* D. Mumford y J.Shah (1989) introdujeron un funcional integral con las tres componentes mencionadas.

¹⁹ Ver capítulo 4 del módulo A_{22} (Teorías de Co-Homología) de la materia A_2 (Topología Algebraica)

El funcional de Mumford-Shah permite evaluar la “proximidad” (en términos de la métrica de Peterson-Weil sobre el espacio de moduli, o.e.) entre clases de formas asociadas a siluetas deformables. Los puntos críticos de dicho funcional son una extensión “natural” (en términos de geodésicas) del enfoque de la Teoría de Morse Básica que se presenta en el capítulo 6 de este módulo.

Problema abierto.- Extender el funcional de Mumford-Shah a funcionales relativos a superficies “simples” (con interior contractible) y su evolución espacio-temporal.

1.3.4. Nudos. Aspectos diferenciales

La clasificación de embebimientos de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^3$ dan lugar a la Teoría de Nudos. Este tópico se ha presentado con más detalle en el módulo A_{23} (Topología Geométrica) de la materia A_2 (Topología Algebraica. Una aproximación Geométrica). Grosso modo, dos nudos son equivalentes si se pueden mapear uno en otro si llevar a cabo ningún “corte”. En este apartado sólo se consideran algunos *aspectos diferenciales* “básicos”.

Algunas de las nociones diferenciables de utilidad para la *Teoría de Nudos* conciernen a la isotopía y a la utilización de técnicas de cirugía en codimensión 2 (a lo largo de nudos). Ambas son relevantes para cuestiones de clasificación y en relación con aplicaciones a Física Teórica. Para las aplicaciones a Física Teórica es conveniente pensar en un nudo como una órbita de una partícula cargada.

El polinomio de Jones proporciona un criterio algebraico efectivo para saber si dos nudos son equivalentes o no. Por ello, presenta una utilidad inmediata para el estudio de interacciones entre (las órbitas de) partículas cargadas. La función de Chern-Simons (ver final del módulo A_{42}) proporciona un método diferencial para calcular el polinomio de Jones. Sin embargo, estos métodos sólo proporcionan herramientas de cálculo para espacios 3D.

La extensión topológica a dimensión ≥ 4 (espacio-tiempo) utiliza herramientas de la homología de Khovanov desarrollada a lo largo de los años ochenta. A finales de los ochenta, M. Atiyah sugirió que el polinomio de Jones describe interacciones a nivel subatómico para partículas elementales. Poco tiempo después, E. Witten mostró una extensión de las construcciones de Jones que resulta de utilidad para identificar si los “retorcimientos” de dos espacios son equivalentes entre sí o no.²⁰

1.4. Estructuras superpuestas

Cualquier variedad topológica X admite una PL-estructura. Sin embargo, no tiene por qué admitir una estructura diferenciable, algebraica, analítica, compleja, ó conforme, entre otras. Dos cuestiones importantes afectan a la obstrucción

²⁰ Ver <https://www.ias.edu/ideas/2011/witten-knots-quantum-theory> para una aproximación reciente al problema con más detalles y referencias.

a la existencia de una C^r -estructura y a la clasificación de las C^r -estructuras que son compatibles con la estructura inicial de X como C^0 -variedad.

La obstrucción a la existencia de una C^r -estructura se expresa en términos de la no-anulación de “clases características” asociadas a la C^r -estructura. Como este tópico se desarrolla en el módulo A_{42} (Fibrados y Fibraciones), en esta subsección sólo se comentan algunas cuestiones elementales relacionadas con la clasificación de C^r -estructuras.

1.4.1. PL-estructuras

En los módulos A_{21} (Homotopía) y A_{22} (Teorías de Co-Homología) se han introducido técnicas basadas en caminos cerrados (o sus extensiones a imágenes de esferas k -dimensionales) y las imágenes por aplicación continuas de símlices ó cubos k -dimensionales.

Ambas técnicas se pueden definir sobre cualquier espacio topológico X (no sólo sobre C^0 -variedades), incluyendo los correspondientes a cualquier tipo de campos (escalares, vectoriales, tensoriales). Por ello, no hay obstrucciones a la existencia de PL-estructuras sobre espacios topológicos.

Un problema típico en Topología Algebraica es el cálculo de invariantes de la homología $H_*(X; R)$ ó la cohomología $H^*(X; R)$ a valores en R (dominio constante de coeficientes) en términos de alguna PL-estructura asociada (simplicial vs cuboidal, p.e.). Ello es posible por el Teorema de Aproximación Simplicial.

En términos más abstractos, todas las teorías de (co)homología que verifican los “aximas” (en realidad Teoremas) de Eilenberg-Steenrod son “equivalentes”; en particular, proporciona los mismos invariantes. Esta afirmación de ser cierta para las teorías de (co)homología generalizadas en las que la esfera $\mathbb{S}^n$ puede tener algún grupo de (co)homología no-nulo aparte de los correspondientes a los valores extremos. Ello permite modelar fenómenos de “emergencia” o bien de “desaparición” de (co)ciclos en dimensiones intermedias.

1.4.2. Estructuras suaves

Un método clásico alternativo para el cálculo de invariantes de variedades suaves m -dimensionales M consiste en utilizar la cohomología de De Rham $H_{DR}^*(X; \mathbb{R})$ para variedades compactas M o la cohomología con soporte compacto $H_c^*(X; \mathbb{R})$ para variedades abiertas M .

En ambos casos, el Lema de Poincaré (cohomología de abiertos topológicamente equivalentes a $\mathbb{R}^m$) y las herramientas de pegado (Mayer-Vietoris) juegan un papel fundamental para cálculos explícitos. Este enfoque se extiende a las estructuras superpuestas (fibrados, p.e.) usando complejos bigraduados ²¹.

²¹ R.Bott and L.W.Tu: *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, GTM 83, 1983.

De forma alternativa, la cohomología se puede calcular en términos de campos. La Teoría de Morse (capítulo 6) proporciona herramientas para el cálculo de la cohomología utilizando la descomposición celular asociada a los valores críticos de campos escalares dados por funciones de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. El dual del campo gradiente ∇f permite conectar con el enfoque basado en la cohomología de DeRham A_{14} . La extensión a la Mecánica Analítica ideal (Hamilton-Jacobi) $[\dot{q}, \dot{p}]^T = \nabla_{\mathbf{J}} H$ se lleva a cabo usando el campo gradiente simpléctico $\nabla_{\mathbf{J}} H := \mathbf{J} \nabla H$ para un Hamiltoniano $H : P \rightarrow \mathbb{R}$ donde $P = TM$ es el espacio de las fases.

Con más generalidad, el corchete de Lie de campos vectoriales $X_i \in \mathcal{X}_M$ definidos sobre una variedad M permite construir un complejo graduado sobre el conjunto $A^k(M)$ de aplicaciones multilineales $\alpha : \mathcal{X}_M \times \dots \times \mathcal{X}_M \rightarrow \mathbb{R}$. Los campos vectoriales más interesantes para la Mecánica Analítica son los campos Hamiltonianos que forman una subálgebra con respecto al corchete de Lie-Poisson. La diferencial $d : A^k(M) \rightarrow A^{k+1}(M)$ en este caso está dada por

$$d\alpha(X_1, \dots, X_{k+1}) := \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1})$$

es decir, los invariantes diferenciales aparecen asociados a distribuciones de campos vectoriales (cocadenas definidas sobre k-tuplas de campos). Esta construcción fue introducida inicialmente por I.M.Gelfand y D.B.Fuchs en tres artículos a finales de los sesenta (1968-70), y para la cohomología real con soporte compacto a valores reales, y extendida por R.Bott y G.Segal (1977) con soporte arbitrario a valores complejos.

Las dificultades más relevantes afectan a la compatibilidad entre pegado y convergencia de soluciones, por un lado, y a la relación entre la cohomología del álgebra de Lie $\mathcal{X}_M$ y la del espacio de secciones de los correspondientes fibrados (incluyendo los espacios de jets de las secciones del fibrado).

Un caso especialmente importante concierne al cálculo de la cohomología de grupos de Lie utilizando sistemas de formas G -invariantes (Maurer-Cartan) ó bien distribuciones de campos G -invariantes sobre G . La versión en términos de formas diferenciales invariantes se ha presentado en el módulo A_{14} (Cálculo Diferencial Exterior sobre Variedades) de la materia A_1 (Geometría Diferencial).

La versión en términos de campos diferenciales invariantes es dual de la anterior en el caso regular, pero no para variedades singulares. Interesa calcular la cohomología de variedades singulares desde un punto de vista formal, así como la asociada a campos tensoriales producto de formas y el álgebra de Lie de los campos vectoriales definidos sobre una variedad, eventualmente singular. Estos tópicos se introducen en el módulo A_{45} (Estratificaciones).

1.4.3. Estructuras algebraicas

Los métodos de Topología Diferencial se han aplicado de forma sistemática desde principios del siglo XX en Geometría Algebraica en relación con cálculos

explícitos de la cohomología de variedades complejas (Picard, Lefschetz, Hodge, Enriques, Severi) que, en su mayor parte, utiliza métodos trascendentes; en otras palabras, utilizan integrales de los generadores de formas diferenciales sobre bases de ciclos que generan la homología en cada grado.

De hecho, el programa de algebrización de la Topología que lanza A.Weil a principios de los cincuenta tiene como objetivo proporcionar una fundamentación algebraica (es decir no trascendente y, a poder ser, independiente del cuerpo base), para el cálculo de invariantes de variedades algebraicas casi-proyectivas y, posteriormente, de esquemas.

Los avances en la Topología de Variedades utilizando clases características (ver módulo A_{42} para detalles y referencias) y la necesidad de una fundamentación rigurosa de la Teoría de Intersección (ver módulo A_{34}) dan lugar a una influencia mutua entre Geometría Algebraica A_3 y Topología Diferencial A_4 .

Los métodos diferenciales de Teoría de Intersección Local (capítulo 5) y su relación con invariantes globales culminan en los Teoremas del Índice (Atiyah-Singer). Estos resultados son una de las cumbres de las Matemáticas del s.XX, pues proporcionan una unificación de técnicas y resultados procedentes del Análisis Funcional (Operadores Elípticos sobre espacios de Fredholm), Geometría Algebraica (Teoremas de Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieck) y Topología Diferencial (Teoremas de Gauss-Bonnet-Poincare-Hopf-Lefschetz) sobre variedades compactas.

El impacto de los Teoremas del Índice en casi todas las áreas de las Matemáticas y sus aplicaciones a la Física da un nuevo impulso al estudio de la Topología de Variedades en términos de los diferentes criterios de clasificación (racional, algebraica, diferencial, numérica, homológica, topológica) con aplicaciones espectaculares en Teoría de Intersección.

La reformulación algebraica de cuestiones de deformación y las relaciones entre las Geometrías intrínseca y Extrínseca de una variedad inmersa en otra, marcan algunas líneas de desarrollo importantes a lo largo de los setenta. Entre ellos cabe destacar, la variación de los lugares de ramificación y discriminante asociados a un morfismo, ó el cálculo explícito de invariantes a partir de relaciones entre ciclos abren campos nuevos con aplicaciones relevantes a Física Teórica.

S.L.Kleiman y su escuela proporcionan algunas de las líneas de trabajo más relevantes con resultados de gran interés en áreas como la Teoría de Intersección donde se solapan la Topología Diferencial, el Álgebra Conmutativa y Homológica o las Geometrías Algebraica y Analítica. Buena parte de este trabajo se compendia en [Ful84]²², autor que realiza asimismo algunas de las contribuciones más relevantes.

²² W.Fulton: *Intersection, Theory*, Springer-Verlag, 1984.

1.4.4. Estructuras analíticas

De forma complementaria, tiene lugar una reformulación de los métodos trascendentes en términos de la Cohomología de Haces, adaptada inicialmente por J.P.Serre a variedades algebraicas y analíticas. La extensión de la clasificación de superficies algebraicas (llevada a cabo esencialmente por Castelnuovo y Enriques en 1905) al caso analítico (realizada en los años sesenta por K.Kodaira) es otra de las cumbres de los años sesenta.

A finales de los sesenta se lleva a cabo un tratamiento sistemático de las deformaciones de variedades de dimensión arbitraria en términos de la cohomología de haces de derivaciones o de diferenciales. Kodaira y Spencer proporcionan el lenguaje y los primeros resultados estructurales para el caso regular. Desde entonces, se asiste a una extensión de las deformaciones “en familia” incluyendo posibles degeneraciones (fibras singulares). Las relaciones topológicas entre los aspectos algebraicos, formales, diferenciales e infinitesimales proporcionan algunos de los núcleos duros de las investigaciones que tienen lugar en el último cuarto del s.XX.

Desde un punto de vista más estrictamente analítico, la utilización de métodos algebraicos locales proporciona un impulso al desarrollo de técnicas estrictamente algebraicas. Estas técnicas permiten extender al caso singular algunas de las relaciones entre invariantes locales y globales que habían aparecido en el contexto de la Geometría Algebraica de Variedades Regulares (módulo A_{32}).

Los trabajos de B.Teissier y Le-Dung-Trang sobre Variedades Polares, clases de Chern para el caso singular (módulo A_{34}), relaciones entre aspectos locales (multiplicidad de intersección) y globales (geometría integral, extensión de desigualdades isoperimétricas, p.e.). Estos trabajos profundizan la línea iniciada a finales de los cincuenta por J.P.Serre en el marco G.A.G.A. (módulos A_{33} y prolongada en multitud de trabajos relacionados con estratificaciones (módulo A_{45}).

En particular, la reformulación analítica de aspectos locales y globales de Teoría de Intersección permite recuperar y extender fórmulas clásicas de puntos múltiples (Teissier, Piené, Kleiman) en el contexto de Variedades Polares. Este tipo de variedades proporciona un marco general intrínseco (formulación en términos de haces de partes principales) que proporciona la versión global de la clasificación infinitesimal de gérmenes de aplicaciones (módulo A_{44}) desarrollada por la Escuela de V.I.Arnold en Moscú y Leningrado hasta mediados de los ochenta.

1.5. El caso discreto (*)

En las aplicaciones a otras Ciencias o Ingeniería, habitualmente sólo se tiene una nube desordenada $\mathcal{N}$ de datos (puntos o segmentos orientados, p.e.) discretos distribuidos de forma irregular y con patrones de variabilidad cambiantes a lo largo del tiempo dados por distribuciones $\mathbb{D}(t)$ y sistemas $\mathcal{S}$ de restricció-

nes cambiantes. En el caso suave se describen en términos de distribuciones de campos vectoriales y sistemas de formas diferenciales; en el caso discreto son simplemente distribuciones $\mathcal{D}$ de vectores y sistemas $\mathcal{S}$ co-vectores aislados.

La estimación, seguimiento y actualización de trayectorias (soporte de los campos vectoriales) y restricciones (soporte de los covectores) detectadas presenta problemas a resolver relacionando con (1) el ruido en los datos; (b) el agrupamiento en subconjuntos con propiedades “similares” (módulo un umbral de variabilidad permitida); (c) la asignación de “primitivas” geométricas asociadas a la “forma”; (d) el seguimiento de las formas; (e) la evaluación de las deformaciones reales o aparentes; (f) la elaboración de hipótesis que faciliten la validación de los modelos propuestos.

El primer problema a resolver es tratar de *ajustar un modelo* $\mathcal{M}$ a una nube $\mathcal{N}$; en el caso suave, el modelo $\mathcal{M}$ está dado por una variedad diferenciable M . El modelo no tiene por qué ser único; basta pensar en objetos presentes en una escena de tráfico o bien el escaneo de una escena 3D con múltiples objetos, lo cual requiere el desarrollo de una estrategia de “segmentación” (descomposición de la nube original en unión disjunta de subnubes).

Una vez realizada la “segmentación” (de una escena o de una secuencia de vídeo), el problema de ajustar un modelo continuo $\mathcal{M}(t)$ a cada nube eventualmente cambiante $\mathcal{N}(t)$ es altamente no trivial. Afecta a cuestiones avanzadas de Reconocimiento de Patrones que sigue una estrategia de tipo incremental. La generación y comparación entre modelos utiliza técnicas de tipo geométrico, analítico y estadístico.

A principios de los noventa se desarrolla un enfoque top-down (basado en modelos) para el Reconocimiento Automático de objetos rígidos B_{24} usando técnicas de Visión Computacional B_2 . Este enfoque introduce diferentes tipos de jerarquías basadas en grupos de transformaciones para facilitar el Reconocimiento. Este enfoque es útil en entornos industriales monitorizados.

Cuando el volumen de datos es muy grande, los objetos no son rígidos y los escenarios son abiertos es necesario combinar técnicas de tipo estadístico (muestreo y agrupamiento, p.e.) en el marco de la Teoría Geometría de la Información (GIT) y de Inteligencia Artificial (extracción y comparación de patrones, p.e.) que se gestionan en términos de Redes Neuronales Artificiales (ANN).

De forma análoga, la evolución espacio-temporal de la nube $\mathcal{N}(t)$ “debe traducirse” en la “generación” de una distribución $\mathcal{D}$ de campos. La generación automática de nubes de segmentos representando la evolución espacio-temporal $\mathcal{N}(t_1) - \mathcal{N}(t_0)$ de la nube, requiere especificar las técnicas de “alineamiento” entre nubes.

A menudo es difícil realizar el seguimiento de puntos previamente especificados; por ello, el seguimiento utiliza técnicas de tipo estadístico a bajo nivel (incluyendo aspectos métricos) y topológicos para la comparación de formas. Un enfoque similar se desarrolla para los sistemas $\mathcal{S}$ de restricciones asociados a co-vectores (formas diferenciales en el caso suave). La estimación de estos tensores se lleva a cabo mediante procedimientos de “votación”; grosso modo consisten

en determinar un tensor por un número mínimo de condiciones, propagarlo y verificar si el tensor calculado describe o no las modificaciones observadas en un pequeño entorno ²³

Así, el álgebra tensorial como producto formal de campos vectoriales y covectoriales, proporciona un modelo multilineal universal para la representación “instantánea” del comportamiento de la “nube” $\mathcal{N}(t_i)$ en cada instante muestreado t_i . El Cálculo Tensorial se ha utilizado en Física Teórica desde principios del siglo XX; el ejemplo típico es la Relatividad General. Asimismo, se ha utilizado desde mediados del siglo XX en Ingeniería en relación con cuestiones de elasticidad, viscosidad, ó evolución de flujos (ver Mecánica Computacional de Medios continuos B_{11} para ejemplos). Más recientemente, las técnicas de Tensor Flow ocupan un lugar central en el paradigma DNN (Deep Neural networks) en AI [Ben16].

La representación tensorial permite describir de forma ideal las relaciones entre dos nubes próximas mediante un desplazamiento (real o aparente) de objetos “peasados” (campos escalares) sometidos a restricciones (sistemas de covectores). Una primera aproximación consiste en calcular estadísticos básicos para la diferencia entre dos nubes “consecutivas” $\mathcal{N}(t_i)$ y $\mathcal{N}(t_{i+1})$. La modificación a la apariencia de la nube sometida a restricciones (covectores) se representa geoméricamente mediante una “conexión” (derivada covariante de cualquier tensor) sobre un “fibrado principal” ²⁴ cuyas secciones son tensores. Por ello, el álgebra tensorial proporciona un primer candidato como “modelo universal” para abordar este tipo de cuestiones.

De acuerdo con el esquema de complejidad creciente desarrollado en este módulo A_{41} (Topología Diferencial Básica), los primeros *datos a estimar* corresponden a un soporte ideal (dado localmente por alguna de las estructuras tensoriales superpuestas descritas en la subsección precedente) y a *patrones asociados a su evolución* (estimación usando modelos probabilistas asociados a la variación local de los datos). La introducción de “conexiones” apropiadas sobre el fibrado principal asociado permite representar la deformación aparente del tensor (usando la diferenciación covariante que proporciona la forma local de la conexión).

La interrelación entre modelos de Topología Diferencial y Estadísticos está actualmente menos desarrollada de lo que sería deseable. Los modelos estocásticos parten de una perturbación estocástica de un modelo estructural que, lamentablemente, en la mayor parte de los casos es desconocido. Por ello, parece razonable adoptar una estrategia más a ras de tierra basada en campos que representen una variabilidad local bajo condiciones de incertidumbre. Los campos ocultos de Markov (HMF: Hidden Markov Fields) proporcionan una primera aproximación al problema que es bien conocida por sus aplicaciones a Ingeniería.

²³ Algunso “ejemplos” de esta idea (variantes de RanSaC) aparecen en relación con la estimación de tensores estructurales para Reconstrucción Tridimensional B_{22} y para el tensor de movimiento B_{23} en Visión Computacional B_2 .

²⁴ Ver módulo A_{42} para detalles y referencias

1.5.1. Ajustando estructuras a datos

Un problema central en el modelado estático o dinámico consiste en ajustar los datos obtenidos a los modelos emergentes (enfoque bottom-up) o previos (enfoque top-down). Una estrategia habitual en AI consiste en utilizar detectores, descriptores y clasificadores para los datos capturados por un sistema de sensores. Desde el punto de vista geométrico, los detectores corresponden a campos escalares (funciones “pesadas”), mientras que los descriptores corresponden a campos vectoriales y co-vectoriales.

Por ello, la estimación de detectores y descriptores corresponde a la estimación de un tensor. Los clasificadores corresponden a la introducción de diferentes relaciones de equivalencia sobre el álgebra tensorial. Esta descripción local se extiende de forma inmediata al caso global mediante la superposición de las estructuras globales correspondientes (fibrados vectoriales o principales, fibraciones, haces).

Los datos pueden estar contaminados por diferentes tipos de “ruido” (estructural vs aleatorio) o bien pueden presentar outliers (información espúrea a eliminar) con respecto a los modelos ideales a validar. No existe una estrategia única para resolver los problemas anteriores. Por ello, la selección de la estrategia depende de cada problema.

El primer problema a resolver es la corrección ó *mejora de datos* minimizando ruido (filtros descritos en términos de convoluciones, p.e.) y outliers (utilizando métricas toscas como la L^1 ó la L^∞ , p.e.). Esta primera se etiqueta frecuentemente como “procesamiento” (a bajo nivel). Utiliza técnicas de tipo discreto (las más simples basadas en LSM, p.e.) ó estadístico (las más simples basadas en Máxima Verosimilitud, p.e.). Ambas se adaptan bien a la Topología Diferencial por la estructura localmente Euclídea de las Variedades Suaves y para el espacio de distribuciones parametrizadas [Ama16].

A continuación se lleva a cabo una *fase de análisis* que consiste en la *selección de la información más “significativa”*. Cuando se linealiza el problema (representado por una aplicación definida), se trata de resolver un problema de valores propios (autovalores de un endomorfismo) ordenando y seleccionando los de mayor módulo. La estrategia PCA (Principal Component Analysis) proporciona la adaptación estadística de SVD (Singular Value Decomposition) para el caso lineal.

La utilización de pseudo-inversas permite extender el método SVD o PCA a la linealización del caso relativo $f : X \rightarrow Y$. Esta linealización debe incorporar una evaluación en la distribución de los errores (modelado diferencial en términos de perturbaciones del modelo ideal). De forma similar, la estrategia ICA (Independent Component Analysis) proporciona la adaptación estadística de SVD para el caso no-lineal.²⁵

La identificación de los elementos más significativos permite asociar polígo-

²⁵ Estas estrategias se comentan con más detalle en el módulo B_{13} (Computational Differential Topology) donde se muestra una extensión tensorial sobre PS-variedades.

nos en forma de estrella, en una primera fase, y PL-modelos que proporcionan el input para la *estrategia tosca-fina del modelado*. A partir de un modelo inicial (frecuentemente lineal a trozos), se incorporan condiciones de “suavidad local” mediante estrategias de regularización (ver sección 4 del capítulo 1).

La estrategia escalonada propuesta parte de un nivel discreto, genera un PL-modelo continuo e incorpora estructuras superpuestas de tipo diferencial, algebraico ó analítico, dependiendo del contexto. El paso de un PL- a un PS-modelo recibe el nombre de *suavizado* (smoothing) ó regularización en Análisis. La automatización de este proceso ya está disponible en multitud de herramientas software open-source.

1.5.2. Funcionales sobre distribuciones discretas

Frecuentemente, los inputs para diferentes tipos de problemas están dados por distribuciones de puntos, segmentos o primitivas geométricas básicas que es necesario identificar, localizar y agrupar según diferentes criterios. Por ello, no existe una estrategia única para el tratamiento de información dispersa o semi-densa con funciones de densidad variables. La superposición de modelos estadísticos en el caso paramétrico proporciona un soporte localmente simétrico (usando técnicas de interpolación, p.e.), donde aplicar herramientas geométricas.

La identificación y reconocimiento de subespacios en los que agrupar la información (learning subspaces) es una herramienta de gran utilidad para PL-estrategias de reconocimiento. En problemas de Optimización geométrica, dichos subespacios están relacionados con la maximización de características estables vinculadas a aplicaciones regulares (inmersiones y submersiones, para empezar) definidas sobre los objetos. Las SOM (Self-Organizing Maps) de Kohonen proporcionan un marco para el aprendizaje automático de subespacios [Koh97].

Un problema añadido procede de la desigual distribución (densidad) de los datos y de su variación debida a características o restricciones asociadas a la materia (elasticidad, viscosidad, plasticidad) como de la información asociada a la misma (entendida como un flujo dinámico). Estas características aparecen con “pesos relativos” que se interpretan como funcionales escalares.

El tratamiento conjunto de todas ellas se describe en términos de tensores que expresan una variabilidad local. La consideración global de todos ellos requiere introducir integrales adicionales que se expresan formalmente en términos de funcionales sobre fibrados A_{42} . Su evolución puede presentar singularidades (contracción vs expansión, p.e.) cuyas versiones locales se desarrollan en A_{43} y A_{44} .

La versión global requiere la introducción de Estratificaciones A_{45} su evolución se formula en términos de sistemas Dinámicos A_{46} de esta materia A_4 (Topología diferencial). Los cambios de estado sobre el soporte inicial dado por una PS-variedad M , las transiciones de fase sobre $P = \tau_M$ y las interacciones sobre τ_P proporcionan “bancos de prueba” para este enfoque. La formulación clásica (medios continuos) procedente de la Topología Diferencial proporciona

herramientas para abordar los problemas anteriores en términos de las *deformaciones de algún tipo de envolvente* asociada a los datos.

Existen *diferentes tipos de envolventes* con tipos extremos dados por PL-envolventes (convexas, simpliciales, cuboidales, p.e.) o PS-envolventes (splines generalizados, variedades algebraicas a trozos, p.e.). Actualmente, debido a la enorme diversidad de formas y comportamientos, se dispone de poca información para las propiedades básicas de los espacios de moduli (clases de equivalencia) para dichos tipos de envolventes. La superposición de estructuras Simpléctica y de Contacto (para dimensión par e impar, respectivamente) permite dar un significado geométrico y “controlar transiciones locales” en términos de adyacencia entre singularidades (ver el module A_{44} para detalles). Debido a estas dificultades en los dos primeros módulos nos restringimos al caso regular o a puntos críticos ordinarios.

El “empaquetamiento” de la información en regiones conexas R_α casi-homogéneas (con respecto a algún operador) permite reemplazar el estudio de la región por el del borde $B_\alpha : 0\partial R_\alpha$; los “objetos” B^β se describen en términos de uniones de regiones que se pueden (des)agregar o (re)componer de acuerdo con la evolución observada del sistema.

La operación de reemplazar una región por su borde, ∂R_α se formula topológicamente en términos de *Teoremas de Escisión* para la homología y cohomología²⁶. Esta operación permite reformular problemas de propagación con condiciones frontera variables (Von Neumann).

Los *operadores integrales* proporcionan métodos efectivos para el cálculo explícito de soluciones a modelos de propagación que son compatibles con la falta de homogeneidad, tanto para la materia, como para “patologías” (difusión-reacción, p.e.) del propio proceso de propagación. Su versión discreta es clave para herramientas de filtrado que facilitan un suavizado de información irregular con ruido o, de forma complementaria, el realzado para componentes del borde (detalles en B_{21}).

Para controlar analíticamente la evolución espacio-temporal de las soluciones, se utilizan *estrategias de regularización* para funciones o, con más generalidad, operadores. Ejemplos típicos aparecen relacionados con imágenes multi-espectrales (satelitales, aéreas, biomédicas, electrónicas) donde el solapamiento de señales da lugar a perturbaciones en torno a los valores esperados que dificultan la interpretación.

Una primera aproximación a las estrategias de regularización (sección 4 del capítulo 1) permite obtener distribuciones “más homogéneas” para la información en las fases de procesamiento, análisis y suavizado descritas en el apartado precedente. Debido al carácter no-lineal de estas perturbaciones una estrategia frecuente consiste en utilizar una combinación de ICA (Independent Component Analysis) y de NMF (Non-negative Matrix Factorization). La formalización de este enfoque en el marco de la Topología Diferencial requiere elementos

²⁶ Ver capítulos 3 y 4 del módulo A_{22} (Teorías de Co-Homología) de la materia A_2 (Topología Algebraica)

más avanzados de la Teoría de Deformaciones, introducidos en el módulo A_{34} (Surfaces) de A_3 (Algebraic Geometry and Analytics Geometry).

La recuperación de una señal bien definida a partir de datos corruptos (procedentes de compresión, p.e.) o distorsionados (diferentes tipos de ruido, p.e) es un típico problema de inversión asociado a un operador integral. Recordemos que en el contexto analítico, una *estrategia general de regularización* para un operador integral de la forma $KA = B$ (donde B representa las condiciones borde o frontera) consiste en descomponer K en suma $K_1 + K_2$ de un operador regular K_1 y otro no-regular pero inversible K_2 . Aplicando esta descomposición se obtiene

$$A + K_1^{-1}K_2A = K_1^{-1}B \Rightarrow A + HA = C ,$$

donde $H = K_1^{-1}K_2$ y $C = K_1^{-1}B$ que es una ecuación tipo Fredholm más sencilla de resolver. Esta estrategia reposa sobre la hipótesis de inversibilidad para la parte no-regular K_2 que, a priori, no tiene por qué verificarse. Por ello, interesa extender esta construcción al caso singular. La clasificación de singularidades llevada a cabo en los módulos A_{43} y A_{44} proporciona un marco general para este tipo de extensiones. En este módulo y el siguiente nos limitamos al caso regular no-lineal.

1.5.3. Campos probabilistas

En los apartados precedentes se supone de forma implícita un conocimiento de la evolución espacio-temporal de los modelos y sus deformaciones. Esta hipótesis no tiene por qué verificarse y, a menudo, es necesario identificar las características más relevantes de procesos bajo condiciones de información incompleta.

Por ello, se requiere una extensión probabilista, relajando las hipótesis tradicionales asociadas a modelos de tipo “determinista”. Esta relajación se puede abordar desde diferentes puntos de vista:

- *Local*, es decir, en términos de los diferentes tipos de campos (escalares, vectoriales, tensoriales) u operadores (integro-diferenciales, típicamente) utilizados para describir los procesos como “flujos”.
- *Global*, es decir, en términos de información parcial, representada por el empaquetamiento de “direcciones” inicialmente independientes (variantes de SVD) que se representan como puntos de una Grassmanniana de subespacios k -dimensionales de un espacio N -dimensional ideal donde se tendría “toda” la información relativa a un proceso.

El enfoque global requiere elementos adicionales de la geometría de Grassmannianas y de EDO sencillas (tipo Ricatti, p.e.) sobre Grassmannianas para describir procesos bajo información incompleta; estos tópicos se abordan en el

módulo A_{42} . Por otro lado, su estimación requiere variantes avanzadas del Análisis Discriminante Lineal (de tipo tensorial y para el caso no-correlacionado)²⁷

Por ello, en las aplicaciones avanzadas de este enfoque (ver capítulo 8 de este módulo) sólo se consideran algunas consecuencias de Campos Ocultos de Markov (MRF). Estos campos proporcionan modelos probabilistas básicos para estimar la evolución espacio-temporal de “cantidades aisladas” que pueden variar sobre un soporte dado por una variedad. Desconozco si su versión dual (formas ocultas de Markov) o tensorial se ha desarrollado actualmente.

1.5.4. Estimación de HMF adaptando Gibbs

Los cambios de carta sobre las intersecciones $U_{ij} = U_i \cap U_j$ de abiertos de un recubrimiento $\mathcal{U}$ para cualquier C^r -variedad X se elevan a diferentes tipos de C^r -estructuras adicionales sobre X como los fibrados y sus generalizaciones $\mathcal{F}$ (fibrados principales, foliaciones, fibraciones, esquemas).

Las *funciones de transición* g_{ij} definidas sobre U_{ij} proporcionan la herramienta para representar los “cambios de base” sobre el espacio base que se elevan de forma natural al espacio total de $\mathcal{F}$. Estos cambios de base inducen una transformación regular sobre la fibra F de $\mathcal{F}$; en el caso más simple (fibrados vectoriales, p.e.) dicha transformación regular es un automorfismo de la fibra que se representa mediante matrices que toman valores en el grupo estructural G del fibrado. Las propiedades estructurales $g_{ii} = e$ y $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ que caracterizan al sistema de funciones de transición g_{ij} definen un dato intrínseco (dado por un 1-cociclo de Čech) que caracteriza la clase de isomorfismo del fibrado y, por consiguiente, un elemento del primer grupo de cohomología del fibrado. Este argumento se extiende de forma natural a cualquier otra C^r -estructura adicional como las mencionadas.

Este enfoque se adaptó a principios de los noventa al caso discreto bajo condiciones de incertidumbre. Para ello, basta reemplazar las funciones de transición g_{ij} a valores en un grupo clásico por funciones de transición probabilista en un *espacio de distribuciones de Gibbs* $\mathcal{G}_{\mathcal{D}}$ (como estimadores de los HMF iniciales) que representa las probabilidades de transición entre dos estados “próximos”. Este espacio $\mathcal{G}_{\mathcal{D}}$ proporciona un modelo para las interacciones entre elementos próximos. En este caso, el espacio ambiente donde toman valores las funciones de transición probabilista es un espacio localmente homogéneo G/H , inicialmente.

Una “relajación” bastante más interesante de estas condiciones consiste en reemplazar dicho espacio homogéneo por un espacio localmente simétrico sobre el que podemos desarrollar una topología diferencial de tipo G -equivariante asociada a las geodésicas. Las modificaciones permitidas desde el punto de vista estadístico se modelan en términos de combinaciones de densidades auto-regresivas

²⁷ Para detalles y referencias ver el capítulo 4 (Topological Dynamics) del módulo B_{13} (Computational Differential Topology) de la materia B_1 (Computational Mechanics of Continuous Media).

de tipo Gaussiano (las distribuciones gaussianas tienen “buenas propiedades” algebraicas como σ -álgebra).

Para optimizar el “buen comportamiento” de las soluciones asociadas a las distribuciones de Gibbs, es conveniente introducir algún *funcional a minimizar*. Los puntos críticos de dicho funcional proporcionan las soluciones óptimas y, por tanto, facilitan una descripción de los “eventos” y de las posibles transiciones entre eventos (Teoría de Morse generalizada). Un problema no trivial es la elección del funcional para cada problema.

Hay diferentes candidatos para dicho funcional. Una elección clásica corresponde a funcionales de energía (en su formulación “determinista” asociada a los campos de Markov) o de entropía (en su formulación estadística, a la Boltzmann). Una elección semi-clásica de tipo invariante aparece asociada a Lagrangianos vinculados a la “cantidad de movimiento” observada o bien las estimaciones de momentos cambiantes. Otras elecciones basadas en la versión estadística de los flujos de curvatura (matrices de correlación cruzada ó covarianzas múltiples en un marco tensorial, p.e.) también son posibles. Este tópico reaparece de forma recurrente a lo largo de varios módulos B_i correspondientes a la aplicación de estos modelos en Ingeniería, por lo que se remite a las materias de la parte II para detalles y referencias.

2. Nociones topológicas genéricas

Los problemas más importantes de cualquier Geometría o Topología están relacionados con la clasificación y caracterización de variedades y morfismos. Para abordar estos problemas se utilizan técnicas que se pueden recombinar de varias formas y que desempeñan un papel importante en diferentes áreas de Matemáticas y sus aplicaciones. Algunas de las técnicas fundamentales más relevantes son las siguientes:

- *Estabilidad*, es decir, persistencia de la forma o del comportamiento por “pequeñas perturbaciones”. El objetivo principal es tratar de determinar si es posible o no encontrar un entorno del representante local con características similares al modelo o comportamiento observados.
- *Transversalidad*, es decir, descripción del comportamiento del sistema en relación con el “espacio ambiente” que contiene “direcciones complementarias” a las observadas para el modelo ó el comportamiento observado.
- *Deformaciones* como herramienta para conectar diferentes objetos o morfismos como una extensión de los métodos clásicos de interpolación.
- *Pegando datos* mediante estrategias de complejidad creciente que afectan a abiertos de un recubrimiento y los distintos tipos de C^r -estructuras que podamos definir sobre ellos. En otras palabras, se trata de mostrar métodos que permitan pasar de aspectos locales a globales.

Estas técnicas aparecen bajo diferentes apariencias a lo largo de todo la materia y sus aplicaciones a las 4 áreas de Ingeniería $B1$ (Computational Mechanics), $B2$ (Robotics), $B3$ (Visión Computacional y $B4$ (Computer Graphics). En esta sección se dedica una subsección a cada una de ellas.

Como las aplicaciones a dichas áreas se comentan en las materias citadas de la parte B (Applications of Global Geometry to IST), aquí sólo se presentan algunas generalidad relativas a propiedades y aplicaciones de carácter matemático.

2.1. Estabilidad

La estabilidad es una propiedad crucial para que el solapamiento o interacción de una gran cantidad de comportamientos o fenómenos microscópicos puedan dar lugar a configuraciones macroscópicas con patrones reconocibles y persistentes a lo largo del espacio-tiempo.

Inicialmente, los fenómenos microscópicos se modelan en términos de EDO cuyo acoplamiento no es posible resolver de forma exacta, sino sólo aproximada (usando técnicas de tipo estadístico, típicamente). Este tipo de fenómenos aparecen en diferentes áreas en otras Ciencias de la Naturaleza (Física, Química, Biología, p.e.) ó Ciencias Sociales (Teoría Económica, p.e.).

En Topología hay muchas nociones de estabilidad para los diferentes tipos de campos. En el módulo A_{41} la atención se centra en los campos escalares; en el módulo A_{42} se extiende este enfoque a campos tensoriales más generales. Una primera aproximación topológica permite distinguir entre dos grandes aproximaciones relacionadas con:

- la “persistencia” de la forma asociada a descripciones funcionales que se puede evaluar en términos de topología conjuntista, o sus prolongaciones para incluir aspectos diferenciales o analíticos;
- la “persistencia” de invariantes (grupos de homotopía ó de co-homología) asociadas a la forma ó bien a estructuras (fibrados, haces) superpuestos a la “forma” representada por algún tipo de variedad.

En este primer módulo la atención se centra en la primera aproximación a la que llamaremos “estabilidad funcional” pues su evaluación afecta a diferentes tipos de transformaciones (topológicas, diferenciales, analítico) que actúan sobre las funciones que describen localmente la “forma”.

En el segundo módulo (Fibrados y Cohomología) la atención se centra en la segunda aproximación a la noción de estabilidad que afecta al comportamiento global por “paquetes” de los criterios anteriores y que aparece vinculado a características topológicas vinculadas a distribuciones de campos vectoriales o tensoriales

Una conexión entre ambas aproximaciones aparece en relación con la Topología de los Sistemas Dinámicos que se desarrolla sobre todo en el módulo 6 de esta materia. El enfoque usual para dicha Topología se centra inicialmente en cuestiones vinculadas a la linealización tanto para aspectos locales de morfismos (diferencial de una aplicación, p.e.), como para aspectos globales de las estructuras superpuestas (fibrados vectoriales y generalizaciones a haces, p.e.). Desde esta perspectiva, la Topología Diferencial es la continuación de la Geometría Diferencial de Variedades

Un enfoque linealizado se centra en cuestiones de equilibrio e ignora algunos de los aspectos más importantes que dieron lugar a la Topología Diferencial en relación con sistemas dinámicos no-lineales. En esta subsección se pone el acento en cuestiones de estabilidad (que incluyen el equilibrio como un caso muy particular), lo cual permite conectar con aspectos centrales de la Topología de Sistemas Dinámicos como uno de los principales núcleos motivadores para desarrollos en esta subárea de las Matemáticas.

La aproximación propuesta no es novedosa. En efecto, los modelos básicos de la Mecánica Clásica (Newton, Huygens, Lagrange) y la Electroestática (Coulomb, Faraday) ó incluso las primeras versiones de la Electrodinámica (Maxwell) son lineales. Por ello, las EDO lineales que los describen de forma ideal admiten una formulación natural en términos de secciones locales del fibrado tangente $\tau_M = (TM, \pi, M)$ sobre una variedad suave M .

Los sistemas diferenciales lineales son de uso común como una primera aproximación para las primeras fases de modelado en todas las Ciencias Experimentales.

tales y Sociales. Desde el punto de vista matemático su clasificación se lleva a cabo usando las formas canónicas de Jordan como endomorfismos de un espacio vectorial. En realidad, dicho espacio vectorial es, inicialmente, el espacio tangente $T_p M$ de una variedad diferenciable M (modelo ideal) en un punto $p \in M$.

El problema empieza a complicarse cuando se permiten *términos no-lineales* en las ecuaciones estructurales que describen el movimiento o la interacción. Estos términos pueden aparecer asociados p.e. a rozamiento, realimentación consigo mismo o acoplamiento entre diferentes sistemas (incluso cuando todos ellos están normalizados y se suponen idénticos).

Un ejemplo ilustrativo ubicuo en todas las Ciencias Experimentales y Sociales está dado por el péndulo simple, cuyo comportamiento en el espacio de las “fases” (incluyendo posición y velocidad) se representa mediante los puntos de una circunferencia S^1 . Las perturbaciones pueden venir dadas por componentes no-lineales (oscilador de Van der Pol en circuitos eléctricos, p.e.), oscilaciones forzadas (duplicación de períodos en ritmos cardíacos como anticipo de un infarto, p.e.) o el acoplamiento con otros péndulos simples (péndulo de Foucault en el caso más simple, p.e.).

Un estudio más detallado del problema de los tres cuerpos en el caso 3D llevado a cabo por Kolmogorov en los cincuenta y Arnold y Moser en los sesenta, puso de manifiesto no sólo que había “más regiones” de inestabilidad que de estabilidad, sino que ambos tipos de regiones aparecen de forma alternada.

Incluso en el caso más simple (acoplamiento de tres osciladores), si no se estima la localización y comportamiento de las regiones de (in)estabilidad, la dinámica global puede dar lugar a toda clase de fenómenos turbulentos ó caóticos.

Hay multitud de ejemplos en Dinámica de Fluidos (separación vs mezcla de fluidos, p.e.), Visualización Avanzada (simulación en túneles de viento, p.e.), Teoría Económica (encadenamiento de crisis financieras, p.e.) que aparecen en diferentes materias de estas notas.

En el marco de la TD interesa detectar los diferentes tipos de inestabilidad, la caracterización de cambios cualitativos en términos de valores críticos (Reynolds) o de variedades separatrices, la aparición de discontinuidades (fisuras, fracturas ó cracks), así como las herramientas de control a aplicar en relación con la posible aparición de cambios cualitativos no deseados.

2.1.1. Estabilidad funcional

La estabilidad funcional afecta al comportamiento de funciones con respecto a diferentes tipos de transformaciones de tipo topológico, diferencial o analítico. El caso más simple corresponde a aplicaciones que presentan algún tipo de “regularidad” (inyectividad o suprayectividad para la diferencial, p.e.) o de transversalidad genérica.

La situación más simple para el caso singular (es decir, no regular), corresponde a funciones de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ en la que los puntos críticos (ceros del gradiente ∇f) son no-degenerados, es decir, la matriz hessiana es no-degenerada (ver capítulo 6 para detalles).

Existe un gran número de transformaciones cualitativas que no se ajustan a los modelos de Morse. Estas transformaciones aparecen en relación con el modelado de fenómenos en áreas tales como

- *Biología*: comportamiento celular, p.e.;
- *Química*: cinética de reacciones, p.e.;
- *Física*: cáusticas, fenómenos termodinámicos, acoplamiento de osciladores, p.e.;
- *Biomedicina*: dinámica interna de procesos infecciosos, información procedente de diferentes tipos de imágenes biomédicas, p.e.;
- *Ingeniería*: mecánica de multicuerpos, comportamiento de materiales con respecto a diferentes tipos de fluidos, p.e.;
- *Teoría Económica*: Burbujas y crashes, p.e.

La TD proporciona diferentes estrategias que permiten abordar el modelado para los fenómenos comentados y su evolución espacio-temporal. Bajo condiciones de regularidad, dicha evolución se describe en términos localmente simétricos, es decir, mediante acciones de grupos G (eventualmente de dimensión infinita) ó de sus álgebras de Lie $\mathfrak{g} := T_e G$.

La acción algebraica o infinitesimal no es necesariamente la misma en diferentes direcciones (desigual distribución de las propiedades de la materia, p.e.). Además el enfoque basado en acciones (algebraicas o infinitesimales) permite encontrar soluciones (en términos de funciones invariantes) y abordar cambios cualitativos (en términos de bifurcación equivariante) para sistemas dinámicos. Esta idea explica la ubicuidad del enfoque basado en diferentes tipos de acciones

Denotemos mediante $\mathcal{G}$ al conjunto de equivalencias topológicas (homeomorfismos), diferenciables (es decir, difeomorfismos) ó analíticas (es decir, aplicaciones biholomorfas en el caso complejo) para gérmenes de aplicaciones.

Si para fijar ideas, nos restringimos a una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diremos que es $\mathcal{G}$ -estable en $x \in X$ si existe un entorno U de f tal que todos los elementos de U son $\mathcal{G}$ -equivalentes a f (es decir, alcanzables por la acción de un elemento de $\mathcal{G}$).

Esta noción de estabilidad es la extensión natural de la acción $\alpha : G \times X \rightarrow X$ de un grupo clásico G sobre un espacio topológico X en el que la órbita $G * x$ de $x \in X$ se describe en términos del cociente topológico G/G_x donde $G_x := \{g \in G \mid g * x = x\}$ es el subgrupo de isotropía de $x \in X$.

Cuando $\mathcal{G}$ es un grupo de Lie, entonces se dispone de un criterio más efectivo en términos infinitesimales, es decir, del álgebra de Lie $\mathfrak{g} := T_e G$. El criterio

infinitesimal es más efectivo porque su acción está definida sobre el espacio tangente a la órbita $\mathcal{G}f$ de f , aunque su cálculo requiere desarrollos adicionales que se presentan en los módulos 3 (Singularidades de Funciones) y 4 (Singularidades de Aplicaciones).

La noción de estabilidad funcional se extiende de forma natural a las EDO de dos formas diferentes que afectan a las ecuaciones ó bien a las soluciones de las ecuaciones. Esta idea es reminiscente de la antigua técnica de aplicar “perturbaciones” a un sistema inicial con soluciones conocidas para estudiar si los fenómenos observados (soluciones de un sistema desconocido) presentan un comportamiento topológico similar al conocido ó no ²⁸.

Salvo algunos casos particulares sencillos (caso lineal con raíces simples, p.e.) no se conoce una relación estructural entre la estabilidad relativa a las soluciones y la estabilidad relativa a las ecuaciones. De hecho, ni siquiera para los sistemas de tipo conservativo una perturbación genérica del campo gradiente ∇f de una función f es equivalente al gradiente de una perturbación genérica F de f (Guckenheimer).

A lo largo de los años sesenta y setenta se estudian las relaciones entre los diferentes tipos de $\mathcal{G}$ -estabilidad en el contexto de la Teoría de Singularidades de Aplicaciones. Los resultados más interesantes aparecen en relación con la clasificación infinitesimal y se detallan en los módulos 3 y 4.

Estos resultados permiten formalizar la noción local de “estabilización” de un germen de aplicación $f \in C^r(n, p)$ en términos de “desdoblamientos versales” (no necesariamente únicas). Esta construcción extiende la correspondiente a los “desdoblamientos universales” para gérmenes de funciones “simples” (ver módulo 3) iniciada por R.Thom a finales de los cincuenta (conocida popularmente como Teoría de Catástrofes)

2.1.2. Equilibrio y Estabilidad

Las soluciones de equilibrio de una EDO lineal de primer orden de la forma $\dot{x} = f(x)$ corresponden al lugar de ceros de f , es decir, a la variedad $V(f)$. en el caso complejo, si f es un polinomio de grado d la factorización de f proporciona d raíces (no necesariamente simples) que proporcionan información sobre el comportamiento en torno a las soluciones del sistema.

A pesar de su simplicidad el “ejemplo” anterior es interesante por diferentes razones. Interesa identificar las funciones $f(x)$ más significativas, estudiar la variación con respecto a parámetros $f(x, \lambda)$ (donde λ puede representar eventualmente el tiempo), clasificar los tipos que pueden aparecer ó abordar el caso no-lineal. A mayores, interesa extender todos estos aspectos a sistemas compuestos por varias EDO lineales (en el marco de fibrados).

²⁸ Las EDO estocásticas utilizan estudian las soluciones de una perturbación aleatoria de un modelo estructural; esta aproximación se presenta en el módulo 6 (Sistemas Dinámicos) de esta materia A4 (Topología Diferencial).

Puestos a pedir, sería deseable estudiar las soluciones o, al menos, la topología de las soluciones para sistemas de EDO no-lineales que, en su mayor parte (salvo algunos casos particulares) es un problema abierto ²⁹

Para entender la dificultad del problema empezamos comentando algunos casos “sencillos” relacionados con funciones que tienen un significado físico, lo cual facilita su interpretación topológica en términos de hipersuperficies de nivel ³⁰

La estimación de la localización con respecto a una referencia inicial (“altura”, “profundidad”, nivel de intensidad, p.e.) y de las tasas de variación de primer orden (“velocidades” lineales o angulares, p.e.) permite introducir un funcional de energía $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ que es el “responsable” de una *dinámica conservativa* para el sistema. La extensión de este enfoque a funcionales más generales (Lagrangianos) se ha expuesto en los módulos 2 (Linealización) y 4 (Formas Diferenciales) de la materia A1 (Geometría Diferencial de Variedades).

Los sistemas conservativos están caracterizados porque su dinámica “deriva de un potencial” H (Hamiltoniano del sistema). El objetivo fundamental es identificar las regiones de equilibrio caracterizadas por la anulación de los segundos miembros del sistema lineal de EDO.

Desde el punto de vista de la Mecánica Analítica Clásica, los elementos críticos asociados a un Lagrangiano $\mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$ (resp. Legendriano) en espacios de dimensión par (resp impar) se estudian en el marco de la Geometría Simpléctica (resp. de Contacto) que está caracterizada por la conservación de una 2-forma simpléctica ω (resp. 1-forma de contacto α con $d\alpha = \omega$) ³¹.

Las soluciones integrales de dimensión maximal m (resp. $m-1$) en el espacio de las fases reciben el nombre de Variedades Lagrangianas (resp. Legendrianas). Salvo algunos casos triviales, dichas variedades integrales presentan singularidades que admiten múltiples interpretaciones en términos de fenómenos de propagación según Arnol’d y su escuela (1984). La clasificación de (los gérmenes de) estas variedades requiere la clasificación de singularidades de frentes de onda que se presenta en el módulo 4 (Singularidades de Aplicaciones) de esta materia A4 (Topología Diferencial).

2.1.3. Estabilidad en sistemas acoplados

El ejemplo más sencillo corresponde al acoplamiento de dos osciladores armónicos simples cuyo comportamiento se describe en términos de desplazamientos sobre un toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$; con más generalidad, el modelo ideal para el acoplamiento de m osciladores armónicos simples, es una subvariedad de un toro m -dimensional $\mathbb{T}^m$ definido como el producto de m copias de $\mathbb{S}^1$.

²⁹ Para una introducción a algunos aspectos topológicos “sencillos” de dichas soluciones ver el módulo 6 (Topología de Sistemas Dinámicos) de esta materia A4 (Topología Diferencial).

³⁰ Una presentación más formal en términos de lugares críticos para isosuperficies de un campo gradiente se presenta en el capítulo 6 de este módulo

³¹ Una aproximación geométrica se ha presentado en el módulo 4 (Formas Diferenciales) de la materia A1 (Geometría Diferencial)

Supongamos que la relación entre los períodos ω_i de dos osciladores acoplados es un número racional, es decir, $p\omega_1 = q\omega_2$; entonces las curvas solución sobre el toro $\mathbb{T}^2$ que representa su acoplamiento son periódicas. Por ello, se pueden presentar fenómenos de resonancia de forma natural, tal y como se ha observado en multitud de situaciones, pudiendo dar lugar a catástrofes en Ingeniería Civil (puente de Tacoma, p.e.) o en Economía (diferentes crashes, p.e.).

Por el contrario, si es un número irracional, las órbitas son cuasi-periódicas y pueden oscilar en torno a órbitas periódicas (correspondientes a números racionales próximos), sin llegar a serlo nunca. Este tipo de modelos aparece con frecuencia en Ciencias Experimentales, Ingeniería o Ciencias Sociales.

Un ejemplo ilustrativo de aplicación a Ciencias Sociales está dado por el modelo estándar IS-LM (keynesiano) para la Macroeconomía dado por el acoplamiento del oscilador IS asociado a Inversión y Ahorro (Saving) y LM asociado a oferta y demanda monetaria.

Lamentablemente, la falta de control de las autoridades monetarias nacionales y la absurda normativa de la UE en relación con el BCE impiden utilizar estos mecanismos obvios de estabilización para corregir las “perturbaciones” procedentes de la especulación financiera. A diferencia de la Reserva Federal de USA, el BCE sólo puede actuar sobre los aspectos monetarios, pero no los fiscales, lo cual da lugar a una incapacidad manifiesta para atajar los desequilibrios y, por si fuera poco, provoca un dumping fiscal entre diferentes países de la UE

2.1.4. Inestabilidad

A finales del s.XIX el estudio del comportamiento del Sistema Solar por parte de Poincaré puso de manifiesto la imposibilidad de integrar de forma exacta los sistemas de ecuaciones correspondientes incluso al caso de tres cuerpos (Sol, Tierra, Luna). Además, el mismo Poincaré destacó la enorme diversidad de fenómenos que podían aparecer, llevándole a renunciar a proseguir dicho estudio por la complejidad que presentaba.

Una idea básica de Poincaré consistía en reemplazar el estudio de las EDO lineales a partir de una “perturbación genérica” de una solución particular (método de Lie) por el comportamiento colectivo de familias de trayectorias sobre un soporte geométrico eventualmente deformable. Estas trayectorias representan soluciones de EDO *no-lineales* para las cuales, habitualmente, no se dispone de una forma compacta o explícita. La determinación del comportamiento de una solución de una EDO a partir de sus condiciones iniciales (verificando condiciones de Lipschitz) se reemplaza por el estudio del comportamiento cualitativo de las soluciones en una región acotada (una “caja de flujo”, típicamente) donde se pueden presentar fenómenos que presentan diferentes “niveles de complejidad”

³² Ver los módulos 3 (Macroeconomía) y 5 (Economía Financiera) de la materia *Teoría Económica. Un enfoque diferencial*.

[Guc98]³³.

A lo largo de los cincuenta y primeros sesenta se desarrollan los primeros estudios sistemáticos sobre inestabilidad desde el punto de vista de los sistemas dinámicos no-lineales. En el contexto ampliado, la (in-)estabilidad de una trayectoria unívocamente determinada, se reemplaza por la (in-)estabilidad de una ó más regiones “organizadoras” de la dinámica o bien por la ausencia de dichos elementos organizadores (fenómenos caóticos, propiamente dichos). La presencia de elementos organizadores (coexistencia de varios ciclos límite, eventualmente) puede presentar características contractivas o expansivas que dan lugar a las nociones de *atractor* ó *repulsor*.

Las interrelaciones entre aspectos locales y globales de esta dinámica no-lineal se presentan en multitud de terrenos que afectan a fenómenos atmosféricos detectados por E.Lorenz (1963) [Spa83]³⁴, dinámica de poblaciones [Mur93]³⁵, ó comportamiento de mercados [Goo90]³⁶, entre otras aplicaciones

Desde un punto de vista formal, si se entiende la gestión y transmisión de información como un flujo asociados a un sistema dinámico, la supervivencia de una especie ó de un ecosistema a diferentes escalas (local, regional, mundial), depende de la capacidad de preservar y transmitir la información que es crucial para garantizar la estabilidad a nivel macro. Ello implica la necesidad de introducir diferentes tipos de jerarquías. Un tratamiento clásico de estas cuestiones se puede ver en [Nic86]³⁷

La extensión de este enfoque a sistemas múltiplemente articulados en torno a multiagentes inteligentes requiere avanzar en herramientas de “inteligencia distribuida”, capaz de incorporar herramientas de auto-aprendizaje y de auto-corrección. Los mapas auto-organizativos de T.Kohonen siguen un esquema formalmente similar al que se desarrolla en este módulo A_{41} , pero desde un punto de vista discreto [Koh97]³⁸.

La creciente automatización en las herramientas de aprendizaje se apoya en una realimentación entre métodos estadísticos y modelos geométricos que recientemente ha incorporado “eventos” (correspondientes a cambios cualitativos) como singularidades (asociadas a campos escalares). Uno de los máximos exponentes es S.Watanabe quien ha desarrollado una sorprendente aproximación a métodos procedentes de Geometría Algebraica y Estadística en el contexto del Aprendizaje Automático [Wat09] *S. Watanabe: Algebraic Geometry and Statistical Learning Theory, Cambridge Univ. Press, 2009..* Un reto actual consiste en extender el enfoque de Watanabe de modo que permita incorporar eventos más complejos vinculados a campos vectoriales o, con más generalidad, tensoriales,

³³ J.Guckenheimer: “Computer Simulation and beyond”, *Notices of the AMS* 45, pp.1120-1123, 1998

³⁴ C.Sparrow: *The Lorenz equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer-Verlag, 1982.

³⁵ J.D.Murray: *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, 1993.

³⁶ R.M.Goodwin: *Chaotic Economic Dynamics*, Oxford Clarendon Press, 1990.

³⁷ J.Nicolis: *Dynamics of Hierarchical Systems*, Springer-Verlag, 1986.

³⁸ T.Kohonen: *Self-Organizing Maps* (2nd ed), Springer-Verlag, 1997.

reemplazando métodos basados en Geometría Algebraica por métodos basados en Topología Diferencial. Un banco de pruebas para este tipo de desarrollos podría ser el conocimiento implícito que hay en Internet. De una forma puramente teórica (más ilusoria que ideal), la selección y re-agrupamiento del saber contenido en muy diversas fuentes (enciclopedia universal) podría jugar un papel clave, organizando el conocimiento en torno a “subespacios invariantes” que fueran de utilidad pública. Lamentablemente, no está claro que los intereses de dichas redes respondan a un interés tan altruista.

2.2. Transversalidad

La transversalidad es una noción complementaria de la condición de tangencia o contacto entre variedades. En esta subsección se describen algunas propiedades básicas y se muestra la utilidad en relación con cuestiones de estabilidad presentadas en la subsección anterior.

Con más precisión, dos subespacios lineales L_1 y L_2 de un espacio vectorial V son transversales si su suma (no necesariamente directa) es igual a todo V ; en términos numéricos y en dimensión finita $\dim(L_1) + \dim(L_2) = \dim(L_1 \cap L_2) + \dim(L_1 + L_2)$. Así, p.e. dos rectas (resp. planos) no-paralelas en el plano (resp. espacio 3D) son siempre transversales, pero dos rectas cortándose en el espacio no son transversales entre sí (una perturbación genérica da lugar a intersección vacía).

La subsección anterior pone de manifiesto la necesidad de tratar de identificar las regiones estables y de introducir herramientas de control para intentar reconducir sistemas situados en regiones inestables a las regiones estables. Para ello, es imprescindible actuar mediante herramientas de “regularización” que permitan amortiguar los efectos no-lineales que han generado la inestabilidad del sistema.

A menudo los fenómenos inestables están descritos por una colección finita f de polinomios ³⁹. En este caso, es posible calcular el espacio tangente a la $\mathcal{B}$ -órbita $\mathcal{B}f$ de f donde $\mathcal{B}$ representa las “deformaciones” del sistema representado por f .

En este caso, el complementario del espacio tangente $T_f(\mathcal{B}f)$ a la órbita permite calcular un “entorno general” sobre el que llevar a cabo la estabilización. Dicho espacio complementario es “transversal” a f

2.2.1. Transversalidad geométrica

Esta noción de transversalidad para espacios lineales se extiende de forma natural a variedades, usando como subespacios los espacios tangentes a cada variedad; ello permite formalizar los argumentos de “posición general” utilizados

³⁹ Estos polinomios representan gémenes finitamente determinados, en la terminología de los módulos 3 (Singularidades de Funciones) y 4 (Singularidades de Aplicaciones) de esta materia A4 (Topología Diferencial)

en Geometría para obtener “buenas” condiciones de intersección (genericidad) y, cuando la intersección es 0-dimensional calcular números geométricos de intersección.

Como V puede tener dimensión infinita (espacios de funciones, p.e.) pero codimensión finita, es conveniente adoptar una definición formal en términos de codimensiones. Así, si $\Theta_{V_i,p}$ denota el espacio tangente a una subvariedad X_i en $p \in X_1 \cap \dots \cap X_i$, diremos que $X_1, \dots, X_k$ son transversales en p si

$$\sum_{i=1}^k \text{codim}(\Theta_{X_i,p}) = \text{codim}(\cap_{i=1}^k \Theta_{X_i,p})$$

La condición de transversalidad entre variedades de codimensión apropiada (para que la intersección sea no vacía) es “genérica”; es decir, aunque dos variedades no se corten transversalmente, una “pequeña perturbación” de una de las variedades, da lugar a una intersección transversal desde el punto de vista topológico.

Un problema más difícil consiste en demostrar la condición de transversalidad para deformaciones algebraicas. Un caso especialmente relevante para la Geometría Enumerativa se presenta en relación con la generación de condiciones de transversalidad por la acción de un grupo algebraico ⁴⁰

El resultado anterior sugiere extensiones a otras geometrías para grupos G actuando sobre C^r variedades, donde la acción conserva alguna de las estructuras geométricas habituales (riemanniana, simpléctica, compleja, p.e.) ó las fibras de alguna estructura superpuesta adicional (foliación, fibración, p.e.). Este caso ha recibido menos atención que el mencionado más arriba en relación con la Geometría Algebraica.

2.2.2. Transversalidad funcional

Las condiciones de transversalidad se han extendido a espacios infinito-dimensionales para los diferentes tipos de campos (escalares, vectoriales, tensoriales) que en la mayor parte de los casos no son metrizables. El caso mejor conocido corresponde a (gérmenes de) funciones (módulo A_{43}) o de aplicaciones (módulo A_{44}) diferenciables o analíticas.

Para ello, es necesario introducir algún tipo de homogeneidad local que aparece asociada a la acción de grupos de C^r -equivalencias (homeomorfismos, difeomorfismos, equivalencias birracionales o biholomorfas) sobre –el germen de– una variedad X . Así, este enfoque es una extensión natural (al caso local) del presentado en el apartado anterior.

Los desarrollos llevados a cabo en el último cuarto del s.XX en relación con distribuciones de campos o sistemas de formas, sugieren extensiones para

⁴⁰ Para detalles y referencias ver el capítulo 2 del módulo A_{34} (Geometría Enumerativa) de la materia A_3 (Geometría Algebraica).

las cuales aún no se dispone de resultados estructurales para la “variación en familia” dentro de cada una de las Geometrías mencionadas.

En el siguiente apartado se propone una aproximación general en espacios de jets sobre los cuales sería necesario incorporar restricciones adicionales de tipo geométrico. El caso mejor conocido corresponde a difeomorfismos simplécticos.

2.2.3. Transversalidad en espacios de jets

El Teorema de Multi-transversalidad en espacios de Jets de R.Thom es el primer resultado estructural para la topología en espacios de aplicaciones. Los espacios de jets $J^k(n, p)$ proporcionan una jerarquía natural sobre el espacio de (gérmenes de) aplicaciones diferenciables $\mathcal{E}(n, p)$ ó analíticas $\mathcal{O}(n, p)$.

La $\mathcal{B}$ -acción de diferentes grupos de C^r -equivalencias sobre los espacios de partida o llegada, o bien sobre el grafo dan lugar a una descomposición en $\mathcal{B}$ -órbitas. De este modo se obtiene una caracterización de entornos $\mathcal{B}$ -equivariantes del espacio de multijets que resulta crucial para la clasificación de gérmenes. De este modo, se obtienen modelos estructurales para la “forma” y las deformaciones que con compatibles con los invariantes de cada $\mathcal{B}$ -órbita.

El reto siguiente consiste en extender este enfoque a distribuciones de campos, sistemas de formas o, con más generalidad, campos tensoriales (dados localmente como producto de los dos anteriores).

2.2.4. Estabilizando gérmenes

Cualquier germen regular pertenece a un abierto denso y por ello no necesita ningún tipo de estabilización. Las singularidades correspondientes a formas cuadráticas no-degeneradas son topológicamente estables por perturbación. El problema se presenta para singularidades “más complicadas” que las cuadráticas que se traducen en un “cambio de la apariencia” para la forma o para un proceso observable.

Desde el punto de vista de la Topología Diferencial la estrategia es siempre la misma: Si $f \in C^r(n, p)$ es un germen de aplicación (diferenciable o analítica) singular en el origen de codimensión finita c hay que calcular el espacio tangente $T_f \mathcal{B}$ a la $\mathcal{B}$ -órbita $\mathcal{B}f$ de f , y los generadores g_i de “un” subespacio maximal transversal a la $\mathcal{B}$ -órbita de f . Una deformación genérica de f que contiene todos los tipos adyacentes se obtiene como $f + \sum_{j=1}^c \lambda_j g_j$.

Un caso especialmente relevante concierne a las singularidades “simples”, es decir, de corango 1 para la matriz hessiana que da lugar a la clasificación A-D-E en la terminología de Arnol’d; en este caso, la deformación universal es única. Existe al menos 23 caracterizaciones equivalentes de este tipo de singularidades, lo cual pone de manifiesto la ubicuidad de este tipo de fenómenos en prácticamente todas las áreas de las Matemáticas y sus aplicaciones. ⁴¹

⁴¹ Ver el módulo A_{43} (Singularidades de Funciones) para detalles y referencias

El problema se complica para gérmenes de aplicaciones $f \in C^r(n, p)$ de codimensión finita, incluso para valores “pequeños” de $(n, p) \leq (3, 4)$. Se conocen las deformaciones (uni)versales para las series de singularidades más significativas, pero no se tiene un “diccionario” similar al que se presenta para las singularidades simples, ni tampoco una interpretación algebraica o geométrica tan ilustrativa como las correspondientes a singularidades de tipo A-D-E.⁴²

La estabilización de gérmenes de campos vectoriales, distribuciones de campos o sistemas de formas presenta una dificultad bastante mayor, con multitud de problemas abiertos, y sólo se aborda desde una perspectiva más heurística basada en la construcción de deformaciones que se comenta a continuación.

2.3. Deformaciones

Cualquier modelo de un objeto o de un proceso es una idealización que utiliza simplificaciones en las que se suprimen elementos relativos a la “forma” ó a la “evolución” espacio-temporal del objeto. Dichas simplificaciones se pueden considerar como una “deformación” en el espacio de formas o en el de procesos.

Una primera aproximación a espacios de formas se puede llevar a cabo en términos de espacios de “moduli” (clases de C^r -equivalencia) o bien en clases de equivalencia de “estructuras superpuestas” (como el fibrado co-tangente, p.e.). Para llevar cabo un tratamiento “uniforme” de este tipo de construcciones, se utilizan campos que presentan una complejidad creciente:

- *Campos escalares*, es decir, asociados a funciones definidas localmente sobre abiertos U_i de un recubrimiento (habitualmente finito) por abiertos de la variedad original. Ejemplos típicos están dados por los diferentes tipos de interpolación entre funciones de partida y de llegada.
- *Campos vectoriales*
- *Campos tensoriales*

Las observaciones presentadas al final de la subsección anterior permiten esbozar una estrategia para estabilizar (gérmenes de) variedades o aplicaciones utilizando deformaciones. De una forma intuitiva, la clave consiste en identificar aquellas regiones en el complementario de algún tipo de órbita asociada a deformaciones genéricas y forzar a que el sistema se mantenga dentro de dichas regiones estables.

2.3.1. Campos escalares

El caso más sencillo corresponde al campo gradiente ∇f del germen de una función f (campo escalar). Denotemos mediante $\mathbf{x}$ a un sistema de coordenadas

⁴² Para detalles y referencias ver el módulo A_{44} (Singularidades de Aplicaciones) de esta materia A_4 .

locales para f y mediante $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ al vector desplazamiento entre dos sistemas locales próximos en este caso, $\mathbf{x}$ es una aproximación discreta sobre el espacio tangente al vector velocidad para la unidad de tiempo correspondiente a dos “posiciones consecutivas”.

En el caso de una única función f la matriz jacobiana es la versión local del campo gradiente. Las deformaciones genéricas se “controlan” en términos de la variación de orden dos que, localmente, se describe en términos de la matriz hessiana $Hess(f)$ en cada punto.

En un marco topológico más avanzado, si se dispone de una forma local “canónica” para el comportamiento local (germen) de f en cada punto, la topología local de las deformaciones de f se puede calcular usando herramientas de Topología Diferencial; la deformación (uni)versal se calcula en términos del espacio tangente a la $\mathcal{R}$ -órbita ⁴³

En general, interesa comparar las deformaciones del campo gradiente con el gradiente de las deformaciones. Incluso en casos sencillas aparecen ya las primeras dificultades, pues la deformación del gradiente es diferente del gradiente de la deformación.

Las deformaciones más usuales de funciones (campos escalares) se llevan a cabo sobre el espacio tangente a la $\mathcal{R}$ -órbita de f por la acción a la derecha es decir, de las C^r -equivalencias sobre las coordenadas (la $\mathcal{L}$ -acción es una “traslación” y por ello es irrelevante a efectos topológicos).

Los tipos básicos para funciones son bien conocidos y están clasificados por el corango de la matriz Hessiana y la codimensión de la órbita. En particular, la clasificación módulo deformaciones se describen en términos de las C^r -equivalencias que actúan a la derecha

A pesar de esta descripción “relativamente simple”, su extensión al caso de sistemas dinámicos no-lineales y los correspondientes diagramas de bifurcación asociados a las deformaciones (uni)versales presenta una complejidad bastante mayor. ⁴⁴

2.3.2. Campos vectoriales

Una *aproximación de primer orden* (lineal) al comportamiento de f (desconocido en las aplicaciones prácticas) está dado por $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{v}$. Por ello, el resultado de la deformación de primer orden está dado por

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\mathbf{x} + \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}$$

En términos de coordenadas locales la expresión local de la diferencial (extensión del campo gradiente $\nabla \mathbf{y}$ a varias variables) se representa mediante la matriz jacobiana. La variación de segundo orden de una aplicación $f \in CPr(n, p)$ esta

⁴³ Ver módulo A_{43} (Singularidades de Funciones) para más detalles.

⁴⁴ Para detalles y referencias ver el módulo A_{43} (Singularidades de Funciones).

dada por una versión intrínseca de la diferencial de orden 2 que se describe en términos de $Hom(Ker(df), Coker(df))$.

Lamentablemente, el rango de $Ker(d_x f)$ y de $Coker(d_x f)$ no tiene por qué ser constante. Por ello, en general $Ker(df)$ y $Coker(df)$ no son fibrados, sino haces. El control de la variación de los invariantes algebraicos asociados a estos objetos geométricos es clave para la topología de los campos asociados a aplicaciones, distribuciones y sistemas.

La extensión de este argumento a operadores elípticos D (la laplaciana y sus extensiones, típicamente) sobre espacios de Fredholm (codimensión finita para núcleo y conúcleo de la diferencial), permite asociar el índice $ind(D)$ como invariante topológico fundamental para D . La relación de este invariante con los diferentes invariantes diferenciables, algebraicos ó analíticos forman el núcleo central de los Teoremas del Índice que se desarrollan al final del módulo A_{42} .

2.3.3. Campos tensoriales

El álgebra multilineal proporciona el marco formal para representar tensores de tipo (r, s) sobre un espacio vectorial V ; es decir formas lineales definidas sobre el producto $E := T^{r,s}(V)$ de r copias de $V^* = Hom(V, \mathbb{K})$ y s copias de V .

Por ello, las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales consideradas en los apartados precedentes (campos escalares y campos vectoriales), se extienden de forma natural a campos tensoriales sobre V .

Este enfoque se extiende de forma natural al caso en el que V es el espacio tangente variable $T_x M$ para una variedad suave. Para variedades singulares, es necesario utilizar el espacio cotangente, pues el espacio tangente no está bien definido.

Una adaptación de este enfoque a variedades estratificadas se lleva a cabo en el módulo A_{45} (Estratificaciones). Un reto de gran interés consiste en adaptar los argumentos relativos a los Teoremas del Índice para operadores elípticos sobre Variedades Suaves M (eventualmente con borde ∂M) a otros operadores diferenciales de orden 2 sobre variedades estratificadas.

2.3.4. Invariantes asociados a una deformación

Desde un punto de vista formal, la clasificación de las aplicaciones se lleva a cabo en términos de las matrices $A \in End(E)$, que están dados por las funciones simétricas en los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ de A ; es decir, las raíces del polinomio característico $|A - \lambda I_N|$.

Una primera dificultad radica en que la forma canónica del polinomio característico $P(\lambda)$ varía de acuerdo con la elección del punto base $x \in M$ (la variedad suave M debe ser reemplazada por una variedad semi-analítica estratificada X en el caso general).

En el caso más simple, el control de las variaciones en las $k + 1$ raíces del polinomio característico se lleva a cabo en el caso más simple en términos de las singularidades A_k asociadas al lugar discriminante correspondiente a la restricción al hiperplano $\sum \lambda_{i=0}^k = 0$ de la acción del grupo simétrico S_{k+1} .

En casos más generales, es necesario reemplazar el grupo de permutaciones por un grupo de reflexión que permita incorporar la acción del grupo alternado. Nótese que este enfoque es compatible con la descomposición del álgebra tensorial en sus componentes simétrica y antisimétrica, pero con la ventaja añadida de controlar la evolución de las formas canónicas en términos de singularidades de funciones (módulo A_{43}).

2.4. Pegando datos

La versión estática basada en modelos (enfoque top-down) para el pegado de datos locales utiliza cartas locales (U_i, φ_i) donde los U_i son abiertos de un recubrimiento $\mathcal{U}$ de un espacio topológico X y las φ_i son C^r -equivalencias entre los abiertos U_i y sus imágenes.

Además, sería deseable que el pegado se pudiera llevar a cabo de forma automática; esta condición está motivada por necesidades procedentes de varias áreas de Ingeniería (ver más abajo §3.3 para una introducción). Es importante destacar que en aplicaciones prácticas deseamos pegar no sólo variedades, sino estructuras adicionales para las que, frecuentemente, sólo disponemos de información parcial, incompleta o con elevado nivel de incertidumbre.

Desde el punto de vista computacional, este enfoque top-down (habitual en cualquier Geometría) no es constructivo pues el conjunto de índices $i \in I$ puede ser infinito y la verificación de la C^r -equivalencia para la restricción de φ_i tiene una complejidad habitualmente no-polinomial. La restricción al caso compacto, permite trabajar con recubrimientos abiertos *finitos*.

Por otro lado, en relación con el caso relativo (comportamiento de morfismos), este enfoque ignora la presencia de singularidades que aparecen asociadas a las funciones más simples en relación con las variedades más simples (función altura para una esfera, p.e.).

Por todo ello, es necesario desarrollar estrategias complementarias que permitan incorporar singularidades para el pegado entre objetos ideales (variedades y aplicaciones), así como datos discretos, actualizando las estructuras resultantes.

Ello requiere introducir diferentes tipos de campos —escalares, vectoriales, tensoriales— que puedan explicar diferentes aspectos de los objetos y sus relaciones en entornos “poco estructurados”. En particular, es necesario trabajar a *diferentes niveles de detalle* (LoD: Levels of Detail) y con diferentes tipos de primitivas geométricas que sean computacionalmente implementables (PL o algebraicas a trozos, p.e.).

En otras palabras, es necesario diseñar una estrategia de realimentación entre los enfoques top-down (basados en primitivas geométricas y morfismos entre

dichas primitivas) y bottom-up (basadas en “hechos” o características) que permita incorporar información cambiante a modelos habitualmente incompletos.

El ajuste de modelos dinámicos asociados a soportes “variables” requiere un estudio más detallado de los diferentes tipos de deformaciones que se pueden aplicar sobre diferentes tipos de C^r -estructuras que presenten condiciones de compatibilidad entre sí. Este estudio se lleva a cabo usando campos –escalares, vectoriales, tensoriales– según un orden de complejidad creciente.

En este módulo 1 sólo se aborda el caso correspondiente a campos escalares con un estudio detallado de los cambios en la topología de la variedad asociados a funciones de Morse. Estas funciones presentan el tipo de singularidades más simple (cuadráticas ordinarias) que puede aparecer que se extiende en los módulos 3 y 4 a Singularidades de Funciones y de Aplicaciones, respectivamente. La extensión a campos vectoriales o, con más generalidad, tensoriales se lleva a cabo en el módulo 2 (Fibrados Vectoriales) de esta materia A4.

2.4.1. PL-modelos

Los PL-modelos típicos están dados por diferentes tipos de mallas (triangulares o cuadrangulares) generalizadas. La relación entre mallas, incluyendo su evolución espacio-temporal, se describe en términos de PL-morfismos o, en el caso dinámico, de distribuciones $\mathcal{D}$ de PL-campos vectoriales con soporte sobre la malla.

Para controlar la compatibilidad entre mallas relacionadas a través de un morfismo se introducen condiciones de compatibilidad que han sido descritas en el módulo 2 (Homología y Cohomología) de la materia A2 (Topología Algebraica). Básicamente, consiste en que las PL-estructuras pueden colapsar o expandirse, pero manteniendo las relaciones de incidencia “naturales” entre elementos de diferentes dimensiones. *La gestión computacional de esta información se muestra en el módulo 2 (CAT: Computational Algebraic Topology) de mis apuntes sobre la materia B1 (Computational Dynamics).*

Dos *ejemplos típicos* a tener en mente consiste en la información proporcionada por un sistema de sensores para un Fluido (no necesariamente perfecto) o bien los inputs procedentes de una colección de cámaras sincronizadas que están capturando a uno o varios agentes en movimiento de cara a la generación de un modelo 3D que pueda ser actualizado en tiempo real (navegación automática de vehículos, p.e.).

Para resolver ambos problemas se requiere una realimentación entre las nubes de datos discretos que evolucionan a lo largo del tiempo, las PL-estructuras a bajo nivel asociadas (mallas triangulares deformables) y los modelos dinámicos que permitan predecir y seguir la evolución del sistema como un todo.

2.4.2. Modelos funcionales

Los modelos funcionales utilizan la topología asociada a los conjuntos de nivel asociados a una función definida sobre un espacio topológico X (una variedad diferenciable compacta M , en el caso más favorable) o bien un funcional $\mathcal{F}$ definido sobre un espacio de funciones (un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en el caso más favorable).

En ambos casos, se habla de *campos escalares* y el primer paso de la estrategia general consiste en calcular los valores críticos para la función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ó el espectro correspondiente a los autovalores (método SVD) del funcional $\mathcal{F}$ definido sobre $\mathcal{H}$.

En la material A2 (Topología Algebraica) se ha mostrado cómo llevar a cabo el pegado de estructuras superpuestas (compatibles con la topología de la variedad base) asociadas a diferentes tipos de funcionales utilizando la cohomología. Por ello, los diferentes tipos de cohomología (a valores constantes o bien a valores en espacios de C^r -funciones ó módulos construidos sobre dichos espacios) proporcionan el lenguaje natural para formular en términos globales el problema del “pegado” de datos locales.

La extensión de este tipo de métodos a campos (vectoriales o tensoriales) más generales que los funcionales es un reto que se aborda a partir de la segunda mitad del s.XX. Para ello, se sigue un doble enfoque:

- *Enfoque top-down* (basado en modelos): Nuevamente, la herramienta formal para el pegado de distribuciones (vectoriales o tensoriales) es la cohomología a valores en un haz que representa dichas distribuciones; en particular, la anulación de la cohomología representa la inexistencia de obstrucciones a la resolución de un sistema (en el caso diferenciable o algebraico) o bien a la prolongación de soluciones (en el caso analítico).
- *Enfoque bottom-up* (basado en características): Las distribuciones de datos agrupados por “paquetes” (habitualmente desconectados entre sí) requieren el desarrollo de herramientas que permitan discriminar entre tipos básicos (usando Análisis Discriminante en sus versiones diferencial y estadística). Nuevamente, se presenta una dicotomía entre métodos diferenciales asociados a modelos de propagación (extendiendo los modelos de difusión-reacción), por un lado, y métodos integrales (asociados a operadores de convolución) para el caso discreto, por otro.

Para superar esta dicotomía es necesario incorporar aspectos diferenciales e integrales en modelos integro-diferenciales, por un lado, y mostrar cómo se modifican los inputs (features) y su agrupamiento en “parches” en función de la actualización de la información.

Una aproximación estática a este problema en relación con restauración de imagen ha sido llevada a cabo en [Cue03] ⁴⁵ La extensión de este método a

⁴⁵ E.Cuesta and J.Finat: “Image processing by means of a linear integro-differential equation”, IASTED Conf. (Benalmádena, Spain), 2003.

formas volumétricas $3D$ (caso estático), secuencias de vídeo digital $1d + 2D$ ó vídeo $3D$ (conocido también como modelado $1d+3D$) aún no se ha desarrollado.

2.4.3. Modelos vectoriales

A diferencia del caso anterior, el lugar crítico de un campo vectorial (o de su forma dual) o con más generalidad de una distribución $\mathcal{D}$ de campos vectoriales (o del sistema $\mathcal{S}$ dual de formas) ya no tiene por qué ser un conjunto de puntos aislados.

La topología de estos modelos para el caso 2D real continuo es bien conocida y se analiza en términos de los retratos de fase con una colección bien conocida de tipos sobre el espacio cotangente (espacio de las fases en la terminología de Poincaré). La extensión al caso de superficies reales o complejas presenta una complejidad bastante mayor ⁴⁶

El análisis de distribuciones de campos o de sistemas de formas correspondientes a dimensión 3 o 4 presentan una dificultad mucho mayor con una gran cantidad de problemas abiertos. Desde el punto de vista topológico, la aplicación de los principios de transversalidad conduce de forma natural al estudio de haces (pencils, nets y webs) de formas diferenciales. Este estudio fue iniciado por Blaschke (caso real) y Chern (caso complejo) como extensión natural de las cuestiones de transversalidad comentada en la segunda subsección de esta sección.

A la vista de la diversidad topológica en los fenómenos observados y de las soluciones correspondientes a sistemas multi-paramétricos, es necesario controlar el lugar singular de la distribución $\mathcal{D}$ ó del sistema $\mathcal{S}$ y su evolución espacio-temporal. Dicho lugar singular se describe como lugar de dependencia de las secciones de una foliación $\mathcal{D}$.

En la práctica, las soluciones se pueden interpretar en términos de fenómenos de propagación o de difusión-reacción (en relación con el medio en el que tiene lugar la propagación) que es necesario modelar y clasificar. Para ello, se introducen métodos que faciliten la “discriminación” entre los C^r -tipos que pueden aparecer.

La noción de “campos vectoriales con esquinas” introducida por R.Thom (1969) proporciona una conexión con el enfoque discreto presentado en el primer apartado (PL-modelos) de esta subsección. Dicha conexión utiliza la noción de “submersión controlada” que permite remapear poligonales integrales asociadas a PL-campos. Una idea similar se ha aplicado recientemente en relación con la descripción de “curvas de sutura” para mapas de texturas utilizados en operaciones de renderización semi-automática para modelos volumétricos de objetos

⁴⁷

⁴⁶ Ver el módulo 6 (Sistemas Dinámicos) para detalles y referencias adicionales.

⁴⁷ Estos tópicos son más avanzados y se abordan en la materia B4 de mis apuntes sobre Informática Gráfica.

El “alineamiento” de trozos que se re-configuran (en ocasiones perdiendo información) dependiendo de características del movimiento y de la escena es un problema bastante difícil de resolver para el que aún no se dispone de resultados generales. Requiere una realimentación con el Reconocimiento Semi-automático basado en información parcial o incompleta que aún está pendiente de desarrollar.⁴⁸

2.4.4. Modelos tensoriales

El control simultáneo de campos escalares, campos vectoriales y sistemas de formas se lleva a cabo en términos de *campos tensoriales*. Desde un punto de vista formal, un campo tensorial de tipo (r, s) es un producto multilineal de r formas diferenciales y s campos vectoriales; es decir, estamos considerando de forma simultánea sistemas que evolucionan y funcionales que evaluamos sobre parte de dichos sistemas.

Los campos tensoriales son ubicuos en Física y en Ingeniería, tanto en aspectos relativos a medios continuos como discretos. Los modelos estructurales básicos relativos a la Mecánica de Medios Continuos (en sus aspectos geométrico, cinemático y dinámico) son esencialmente bien conocidos con desarrollos importantes desde finales del s.XVIII (Euler, Bernouilli, Gauss, Huygens, Lagrange) hasta mediados del s.XIX (Legendre, Riemann, Hamilton, Navier, Stokes).

La unificación en un marco general de tipo multilineal es obra sobre todo de la Escuela Italiana de Geometría Diferencial (Bianchi, Ricci, Levi-Civita) que proporcionan el aparato conceptual general para la formulación de la Mecánica Clásica que culmina en la Relatividad General de Einstein.

En particular todos los problemas relacionados con la Mecánica de Medios Continuos (Elasticidad, Viscosidad, Plasticidad) para Fluidos Perfectos se pueden reformular en términos de deformaciones asociados a diferentes “tensores de estructura”, incluso aunque no se tenga información explícita sobre la resolución de las ecuaciones a las que afectan.

Un caso particularmente interesante en relación con aplicaciones TIC (ver §3,3 para más detalles) concierne a las propiedades radiométricas (texturas, radiancia, reflectancia de objetos con respecto a la luz) que se describen en términos de diferentes tipos de tensores sobre una superficie.

Sin embargo, la caracterización de la integrabilidad, la resolución explícita de las ecuaciones estructurales o su aproximación en el caso no-integrable, no se desarrolla hasta bien entrada la segunda mitad del s.XX. Las cuestiones relacionadas con la integrabilidad y su variabilidad dependiendo de las deformaciones realizadas corresponden a la Topología Diferencial.

De forma complementaria, la resolución exacta o la aproximación al caso no-integrable mediante una discretización del problema (FEM: Finite Element

⁴⁸ Los modelos ocultos de Markov (HMM) proporcionan una aproximación basada en campos que se desarrolla en el módulo 6 (Sistemas Dinámicos) de esta material A4 (Topología Diferencial)

Methods, p.e.) se enmarcan dentro del Análisis Numérico. A finales de los noventa se presenta una convergencia entre métodos numéricos y topológicos en términos de la Topología de operadores integro-diferenciales que aún está en fase de desarrollo.

Algunos *retos interesantes* relacionados con la recuperación de la “forma” (restauración automática) para secuencias de vídeo, volúmenes complicados (en términos de mapas de curvatura) o volúmenes deformables generados a partir de nubes móviles $\mathcal{N}(t)$ de puntos 3D.

Una estrategia general de tipo analítico para abordar estos problemas se ha introducido en [Cue03] para imágenes estáticas. La extensión de esta metodología a los tres casos citados requiere el reconocimiento de aspectos de la “forma” (mapas y flujos de curvatura) que permitan ajustar los valores más apropiados para el parámetro que controla la difusión (en ausencia de aristas) ó la reacción (en presencia de aristas).

3. Aplicaciones a otras áreas y retos

La Topología pasa por ser una de las ramas más abstractas (junto con la Teoría de Números) de las Matemáticas. A pesar de esta opinión generalizada, la cantidad creciente de aplicaciones desarrolladas desde los años ochenta ha motivado el abandono de esta opinión. A lo largo de diferentes subsecciones se presenta una muestra forzosamente incompleta y muy esquemática de aplicaciones a diferentes áreas que utilizan las ideas básicas presentadas a lo largo de la sección anterior.

3.1. Aplicaciones a Física Teórica

Una de los problemas centrales en Física Teórica es la unificación entre los diferentes tipos de interacción que se presentan en la Naturaleza. Una primera aproximación se lleva a cabo en el primer apartado.

3.1.1. Un esquema general

Dependiendo de la escala a la que se trabaje, hay cuatro tipos de interacción que se etiquetan como gravitatoria, electromagnética, débil y fuerte.

- La unificación entre las tres últimas se ha llevado a cabo en los años sesenta del s.XX en el marco de la Mecánica Cuántica y dan lugar al llamado *modelo estándar*.
- La *Gran Unificación* concierne a una formulación hipotética común de la interacción gravitatoria con el modelo estándar. Por ello, se supone que es necesario describir una “cuantización apropiada” de la interacción gravitatoria que proporcione el soporte para dicha integración. Existen varias aproximaciones para las GUT (Great Unification Theories) que aún no han sido validadas experimentalmente debido a la desorbitada cantidad de energía que se requiere [Woi06]⁴⁹.

Desde el punto de vista topológico que proporciona el marco para esta materia A4 (Topología Diferencial) la unificación se puede formular en términos de diferentes tipos de campos que generan las fuerzas (responsables de la interacción) y, por consiguiente, los “desplazamientos” (descritos en términos de conexiones sobre un fibrado) de “objetos geométricos” (descritos en términos de tensores).

Para desarrollar este esquema, es necesario estudiar los diferentes tipos de

- *soportes* dados por C^r -variedades: diferenciables M , algebraicas o analíticas X ;

⁴⁹ P.Woit: *Not even wrong*. Basic Books, 2006.

- *campos*: escalares, vectoriales y tensoriales, responsables de la interacción;
- *estructuras superpuestas* generadas por los campos: fibrados, fibraciones, foliaciones, haces sobre los soportes;
- *morfismos* (aplicaciones no siempre definidas, necesariamente) entre soportes y entre estructuras asociadas;
- *desplazamientos* a los que puedan lugar los campos descritos en términos de conexiones (afines vs métricas) sobre un fibrado (vectorial, principal, o alguna extensión).

3.1.2. Acotando el problema

Los *objetivos generales* correspondientes a espacios y aplicaciones son la clasificación y la caracterización en términos de C^r -invariantes. En una segunda fase, se pretende analizar los fenómenos de (in)estabilidad que puedan surgir en relación con la interacción de unos campos con otros o con el entorno. Ambos problemas son muy generales y exceden el marco de una Topología Diferencial Básica como la que se presente en este módulo.

1. Los modelos más simples para los campos asociados a interacciones son espacios homogéneos por la acción de un grupo G . Sobre estos espacios las condiciones topológicas habituales (estabilidad, transversalidad de los “trasladados”) se verifican de forma automática. La clasificación diferenciable de las variedades complejas $1D$ proporciona los patrones básicos para la interacción más sencilla que es la electromagnética con $U(1)$ como grupo estructural. La unificación llevada a cabo por Maxwell del electromagnetismo en 4 leyes se ha expuesto en términos de formas diferenciales en el módulo 4 de Geometría Diferencial.
2. Los modelos ideales para las interacciones débil y fuerte se describen en términos de fibrados principales con grupo estructural $SU(2)$ y $SU(3)$, respectivamente. La formulación G -invariante sobre fibrados principales es bastante más sofisticada que para el caso $G = U(1)$. La descripción de partículas elementales requiere elementos avanzados de la Teoría de Representación de Grupos y su interpretación geométrica en términos de la aplicaciones momento. Una primera aproximación se presenta al final del módulo 2 (Fibrados).
3. La formulación analítica del modelo estándar (unificación de las interacciones electromagnética, débil y fuerte) se basa en la minimización de un funcional de acción $\mathcal{A}$ relativo a la curvatura de una conexión (regla de diferenciación covariante) sobre el espacio de conexiones de un fibrado G -principal. Este problema variacional es una extensión natural de los presentados en Topología Diferencial en relación con la extensión de la Teoría

de Morse a geodésicas o superficies minimales (como puntos críticos de un funcional de longitud o de energía. Los aspectos básicos de la Teoría de Morse se presentan en el capítulo 6 de este módulo.

4. La minimización del funcional de acción $\mathcal{A}$ (Yang-Mills) sobre el espacio de conexiones ω de un fibrado principal requiere un estudio de la topología del espacio de conexiones. Esta cuestión afecta a la geometría de los espacios de moduli; debido a su carácter más avanzado no se comenta en estos materia ⁵⁰

3.1.3. Utilidad de la TD Básica

De acuerdo con lo indicado más arriba, algunas de las ideas motrices que “articulan” la Topología Diferencial Básica (TDB) son las de estabilidad, transversalidad, deformaciones y pegado de datos para evaluar si un objetos topológico tiene una C^r -estructura o no.

La estructura de algunos espacios homogéneos (esferas, espacios proyectivos, toros, grassmannianas o simétricos (similares a los anteriores pero con distribución irregular de la materia o de campos) proporciona un soporte para multitud de fenómenos. Un ejemplo está dado por la Geometría de los Twistors de Penrose que se modela sobre los α - y los β -planos que dan la reglación de la cuádrice 4-dimensional Q_K de Klein en $\mathbb{P}^5$ como modelo geométrico de la Grassmanniana $Grass(1, \mathbb{P}^3)$ de rectas en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$. Otros ejemplos más sofisticados afectan a las curvas racionales $\simeq \mathbb{P}^1$ (cuerdas) contenidas en las variedades que son solución para el modelo más común de cuantización del espacio-tiempo.

Las trayectorias que describen las partículas se modelan inicialmente como nudos (clases de caminos cerrados simples) contenidos en esferas o toros 2D. La superposición de la dinámica asociada a diferentes tipos de interacción se representa mediante estructuras superpuestas a dichos embebimientos, incluyendo la información relativa al espacio complementario de (paquetes de) nudos. Los invariantes topológicos asociados se describen en términos de clases características de fibrados que representan los diferentes tipos de interacción. ⁵¹

Los invariantes topológicos que permiten caracterizar a las partículas (como soporte o como generadores de campos) son invariantes de la C^r -estructura o de un fibrado construido sobre la variedad soporte. Por ello, la unicidad o la finitud en el moduli de C^r -estructuras que son compatibles con dichas interacciones juegan un importante papel en cuestiones de clasificación.

⁵⁰ Ver no obstante, el módulo 7 (Una formulación geométrica de la Física Teórica) en el que confluyen los 6 módulos de cada una de las materias.

⁵¹ El cálculo de estos invariantes se lleva a cabo en el módulo A_{42} .

3.1.4. Algunos retos

Desde principios de los años sesenta, ha tenido lugar una convergencia entre la Topología Diferencial y la Física Teórica. Esta convergencia afecta a aspectos globales y locales de ambas áreas de conocimiento.

Desde el punto de vista global, uno de los resultados más espectaculares concierne a la unificación de las interacciones electromagnética, débil y fuerte entre partículas. Esta unificación se lleva a cabo en términos de un principio variacional común dado por el funcional de curvatura de una conexión (Yang-Mills) sobre el espacio de conexiones en el fibrado principal que proporciona el marco general para dichas interacciones.⁵²

El cálculo de invariantes topológicos para los fibrados principales proporciona las claves para la clasificación de los diferentes tipos de interacción mencionados anteriormente. Esta unificación recibe el nombre de Modelo Estándar y es posible gracias a la estructura cuántica común a los tres tipos de interacción mencionados.

Este esquema de razonamiento es compatible con los diferentes modelos de propagación y tipos de interacción, gracias a la estructura geométrica infinito-dimensional subyacente a la Mecánica Cuántica.⁵³

El mayor reto es la unificación del modelo estándar con la interacción gravitatoria. Para ello, es necesario desarrollar una cuantización de la Gravedad. El candidato que presenta un desarrollo matemático más elaborado se basa en la Teoría de Cuerdas sobre Espacios Supersimétricos, cuyos fundamentos se introducen en el módulo 7 que completa los 6 módulos de cada una de las materias A_i .

3.2. Aplicaciones a otras ciencias

Los métodos de Topología Diferencial se aplican en diferentes áreas científicas en las que se presentan variación espacio-temporal de modelos o de comportamientos. Algunos ejemplos de dichas variaciones corresponden a cambios de estado en el medio reacciones químicas, transiciones de fase en Física o Ingeniería, fenómenos auto-organizativos en Biología, modelado de comportamientos (cooperativos vs competitivos) en Ecosistemas, detección de eventos (singularidades de campos) para aplicaciones de TIC, construcción de modelos que presentan algún tipo de fibración en Materiales, control de la dinámica de procesos en cualquier área de Teoría Económica (Micro, Macro, Economía Internacional, Finanzas), etc.

En una introducción como ésta, es imposible dar una aproximación rigurosa a los tópicos mencionados. Por ello, tan sólo se esbozan algunas ideas básicas

⁵² Ver final del módulo A_{42} para detalles y referencias.

⁵³ La primera formulación se debe a Von Neumann; para una presentación más moderna ver el apéndice “Fundamentos Geométricos de la Mecánica Cuántica” al módulo A_{12} (Linealización) de la materia A_1 (Geometría Diferencial)

para cuatro de ellas, dejando las demás para desarrollos más detallados en otras subsecciones. Las aplicaciones a Ingeniería se detallan sobre todo en las materias B_1 (Computational Mechanics), B_2 (Robotics), B_3 (Visión Computacional) y B_4 (Computer Graphics).⁵⁴

3.2.1. Ciencias de la Tierra

Los cambios de estado en el medio pueden deberse, a la presencia de fuerzas internas o externas o a la interacción de diferentes fenómenos como los que tienen lugar en la atmósfera, la influencia de los diferentes campos de tipo mecánico (rotación de la Tierra, p.e.), magnético (polaridad, p.e.) o radiométrico (influencia de la radiación solar, p.e.); la interrelación con los océanos o con la contaminación ambiental, entre otros.

Los diferentes tipos de campos y sus bifurcaciones proporcionan modelos matemáticos simplificados que facilitan una comprensión de aspectos básicos de dichos fenómenos. La incorporación de características heterogéneas para la materia (en términos de granulometría, p.e.) permite modelar la composición interna en relación con las variaciones observadas en la respuesta a la propagación de ondas en medios no-homogéneos (anisotropía, p.e.).

La identificación de diferentes capas (por resonancia, georádar u otros métodos), así como la evaluación de las fuerzas internas que actúan sobre modelos multicapa proporcionan un modelado indirecto de aspectos geomorfológicos. De acuerdo con los principios básicos de la Mecánica de Medios Continuos, los regímenes básicos de tipo continuo son de tipo laminar, turbulento o caótico.

Por otro lado y como resultado de la acción de fuerzas sobre medios anisótropos, se presentan discontinuidades o fracturas en los medios, incluso aunque inicialmente presentaran características de tipo laminar (subducción de placas). Un ejemplo típico está dado por la aparición de fallas en Geomorfología en relación con el comportamiento de los pliegues (sinclinal vs anticlinal). La catástrofe más sencilla asociada a una singularidad de tipo A_2 recibe el nombre de “pliegue” precisamente por la analogía con el comportamiento observado en la tectónica de placas⁵⁵

Los regímenes que pueden aparecer en la Mecánica de Medios Continuos están separados por “niveles críticos” asociados a la dinámica de sistemas en Ciencias de la Tierra. Aún es necesario especificar una función de energía (o de entropía) para este tipo de fenómenos en medios estratificados⁵⁶.

El número de Reynolds es el parámetro crítico que proporciona una primera aproximación a la descripción de transiciones entre diferentes regímenes, pero aún se desconocen muchos aspectos relacionados con la dinámica interna. La desigual distribución de la materia puede dar lugar a discontinuidades (como

⁵⁴ Las introducciones están disponibles en <https://www.mobivap.es/miembros/javier-finat/>

⁵⁵ Ver módulo 3 (Singularidades de Funciones) para más detalles.

⁵⁶ Las cuestiones relacionadas con medios estratificados se abordan en el módulo 5 (Estratificaciones) de esta materia $A4$ (Topología Diferencial).

explosiones, p.e.) y fenómenos caóticos. El modelado de las erupciones volcánicas y el comportamiento de ríos de lava proporcionan ejemplos de ambos.

3.2.2. Química

Las variaciones en la composición de la materia a diferentes niveles (subatómico, atómico, molecular), la interacción variable con otras materias dependiendo de la energía aplicada (junto con sus correspondientes niveles críticos), la liberación de componentes que generan y transmiten cargas (desagregación y recomposición), dan lugar a diferentes tipos de interacciones que modifican de forma espontánea el comportamiento de los diferentes agentes presentes a escala atómica o molecular.

Desde el punto de vista físico existen muchos tipos de energía vinculados a diferentes campos que generan cambios en la composición. Los tipos más conocidos son de tipo mecánico (presión, fricción, diferentes tipos de densidad, velocidad en la (des)agregación, p.e.), termodinámico (calentamiento que modifica la forma sin romperse, p.e.) y electromagnético con aspectos de tipo óptico (con fenómenos de dispersión tanto más complejos cuanto más rugosa es la materia, p.e.) ó eléctrico (separación

Todos estos aspectos se pueden abordar en términos de Topología Diferencial Básica mediante la introducción de variedades inhomogéneas y anisótropas, funciones definidos sobre variedades, deformaciones (causadas por esfuerzos internos o externos) y fenómenos de bifurcación (asociados a puntos críticos de campos o distribuciones).

La complejidad que presentan los fenómenos de (des)agregación en el comportamiento de materiales aún no tiene un correlato en términos de la Topología de Singularidades (módulos 3 y 4). En algunos casos se dispone de modelos de bifurcación para reacciones químicas, pero a pesar de los avances que han tenido lugar desde los años setenta, aún son más los fenómenos cuyos modelos matemáticos son desconocidos.

3.2.3. Biología

Los procesos de propagación son una fuente permanente de inspiración para los aspectos topológicos de fenómenos dinámicos. Entre ellos, destacan los modelos de difusión-reacción en los que la propagación de una onda (representada por un campo o, con más generalidad, una distribución) reacciona con un modelo anisótropo dando lugar a todo tipo de irregularidades.

Las irregularidades que aparecen a los niveles más bajos están estrechamente relacionadas con la especialización en diferentes funciones. Dos cuestiones difíciles que afectan a la Topología Diferencial están relacionadas con los fenómenos de auto-organización y la rapidísima replicación (modelos de tipo proliferante) que dan lugar a la creación de tejidos o incluso órganos, y por el lado contrario, el desarrollo de infecciones o de tumores.

Para los *fenómenos de auto-organización* se tienen diferentes modelos de propagación con versiones computacionales [Koh98] de gran interés para Sistemas Expertos. En un marco dinámico, las configuraciones significativas para fenómenos de propagación o de auto-replicación celular son, por lo general, estables y con bajos niveles de energía.

Sin embargo, las configuraciones activas no tienen niveles mínimos de energía (asociadas a configuraciones en equilibrio), pues si lo tuvieran no interactuarían con el entorno. La “baja energía” que es característica de los modelos biológicos (procedentes de micro-reacciones químicas) da lugar a que los posibles efectos de tipo turbulento o caótico se disipen ó den lugar a degeneraciones que el propio sistema habitualmente elimina.

De forma complementaria, las condiciones relativas a configuraciones moleculares con niveles subóptimos para la energía son cruciales para el *diseño de fármacos* que puedan auto-adaptarse al desarrollo de una enfermedad (como ocurre p.e. con el caso de la malaria, p.e.). Una primera aproximación ingenua a este tipo de problemas podría utilizar elementos de “morsificación” para los niveles de energía que permitieran transiciones con mínimo coste entre estados adyacentes ⁵⁷.

La *generación automática de formas* sobre tejidos que se expanden presenta una complejidad bastante mayor. Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos se puede plantear como un crecimiento fractal que se replica a diferentes escalas. Sin embargo este modelado no explica la diversidad morfológica, ni tampoco la selección automática (controlada genéticamente) de “direcciones privilegiadas” a lo largo de las cuales se desarrolla el crecimiento.

En algunos casos particulares especialmente sencillos, se ha detectado que la presencia de asimetrías en compuestos a nivel celular o en los comportamientos (reacciones químicas) de los elementos que intervienen proporcionan criterios para la generación de formas muy especializadas por replicación direccional. Este fenómeno pondría de manifiesto la presencia de “modelos generadores de formas” a nivel celular o molecular, aunque no explicaría aún cuestiones relacionadas con la formación de órganos o de organismos enteros.

3.2.4. Medicina

Desde el punto de vista topológico, un reto actual es mostrar la utilidad de los fenómenos de *bifurcación equivariante* en relación con la formación de órganos ó por el contrario, el desarrollo de enfermedades infecciosas o de tumores en el interior de individuos. Para entender la relación que guarda esta hipótesis con la Topología Diferencial hay que retroceder a mediados del s.XX.

En la Topología Diferencial Clásica de comienzos de la segunda mitad del s.XX, se se ha puesto el acento en cuestiones relacionadas con la homogeneidad al menos local. Ello ha dado lugar a una extensa literatura sobre estructuras

⁵⁷ Una aproximación a estas cuestiones en el marco de “arreglos de esferas” se presenta al final del módulo 1 (Geometría Computacional) de la materia B1 (Computational Mechanics)

inicialmente G-homogéneas que, posteriormente, se ha trasladado a espacios localmente simétricos o, más recientemente (años noventa) a espacios esféricos.

Un caso especialmente favorable que se aborda corresponde a los Fibrados Principales que son una pieza clave para las Teorías de Unificación en Física Teórica que han sido introducidos al final de la subsección anterior ⁵⁸

De forma paralela, los cambios morfológicos se describían en términos de singularidades de campos (escalares y vectoriales) que, inicialmente, no guardaban relación con las condiciones de homogeneidad local. El desarrollo de una Teoría de Bifurcación Equivariante desde finales de los setenta proporciona una conexión estructural entre los fenómenos localmente simétricos y las singularidades que son responsables de cambios morfológicos.

La “ruptura de simetrías” en fenómenos de Bifurcación Equivariante proporciona la noción clave para desarrollar dicha interrelación. La aparición de bifurcaciones en cascada para sistemas dinámicos extremadamente simples (aplicación logística, p.e.) proporciona un ejemplo elemental para crecimientos exponenciales basados en la replicación de un modelo básico.

Actualmente, se ignoran relaciones entre aspectos funcionales o morfológicos asociados a estos modelos de difusión-reacción. Asimismo se ignora por qué algunos de estos procesos de propagación son capaces de auto-adaptarse y autorregular su crecimiento. Los mapas auto-organizativos de Kohonen proporcionan algunos de los modelos más interesantes donde se solapan fenómenos de propagación espacio-temporal con inteligencia embebida en dispositivos inteligentes.

3.3. Métodos topológicos en Ingeniería

Dos familias importantes de métodos en Ingeniería están asociados al análisis de los tipos topológicos correspondientes a deformaciones (típicas en Mecánica de Medios Continuos) y a la representación de patrones asociados a movimientos articulados (típica en multicuerpos como los robots multipatas, p.e.). En ambos casos, la modificación de la forma o de las apariencias da lugar a una gran diversidad morfológica que se trata de modelar en términos de diferentes tipos de campos.

De una forma muy simplificada, los campos escalares afectan a una representación de formas estáticas, los campos vectoriales a una representación del movimiento y los campos tensoriales a deformaciones de objetos, superposición de estructuras adicionales o evaluación simultánea de funcionales cambiantes.

Por ello, algunas de las aplicaciones más avanzadas corresponden a la captura y representación de movimientos llevados a cabo por actores. El modelado de la percepción más inmediata afecta a deformaciones reales asociadas al movimiento de la ropa o de las apariencias de la piel que aparecen vinculadas (en términos de productos tensoriales) a propiedades radiométricas (color, texturas, reflectancia de las superficies) sobre las que incide, se absorbe y se refleja la luz.

⁵⁸ Ver el módulo *A₄₂* (Fibrados) para detalles y referencias.

Además de las representaciones vinculadas a las apariencias, para obtener modelos estructurales es necesario generar representaciones esqueléticas cambiantes. Desde el punto de vista geométrico estas representaciones se pueden describir en términos de los “nervios” de entornos tubulares (retracción del fibrado normal). Un problema no elemental es el “enlazado automático” de las representaciones que afectan tanto a la estructura interna como a las apariencias.

En términos más abstractos, este tipo de modelado se describe en términos de campos vectoriales o campos tensoriales, cuya integración da lugar a flujos asociados a objetos eventualmente cambiantes. En el caso de una cámara móvil, aparece un flujo de imagen (para secuencias de video) o de escena que es una extensión natural del flujo introducido en los últimos capítulos del módulo A_{11} (Variedades Diferenciables) de la materia A_1 (Geometría Diferencial). En el capítulo 8 (Application of Basic Differential Topology to IST) de este módulo A_{41} se presenta una versión más actualizada de algunas de las extensiones comentadas en este párrafo incluyendo algunas referencias recientes.

En ausencia de marcas sobre el objeto y para escenas complejas, es bastante difícil realizar un seguimiento simultáneo de los puntos de control significativos (junturas múltiples, máximos de intensidad). Entre otras cosas, salvo para algunos casos particulares, se ignora cuáles son las ecuaciones del movimiento. Esta dificultad para estimar (incluso de forma aproximada) las trayectorias individuales de puntos de control sugiere un enfoque topológico que combina ++hechos cinemáticos” relativos a “paquetes de trayectorias”.

3.3.1. Dinámica de Fluidos

El desarrollo de la Dinámica de Fluidos desde el siglo XVIII proporciona una gran cantidad de indicaciones y modelos que son relevantes para el tratamiento aproximado de información cinemática asociada a objetos con apariencias cambiantes, independientemente de las fuerzas que lo producen. En el primer apartado se esbozan algunas ideas que permite extender el enfoque geométrico presentado en el módulo A_{13} (Cálculo Tensorial) de la materia A_1 con algunos aspectos básicos de la topología de campos tensoriales.

Los resultados tipo KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) representan algunas de las aportaciones más notables en relación con la topología de los paquetes de trayectorias en sistemas no-lineales. La versión original más completa se encuentra publicada por primera vez en [Arn63]⁵⁹. Algunas de las aportaciones más relevantes están relacionadas con

- el análisis de soluciones casi-periódicas para sistemas no-lineales, incluyendo herramientas para detectar regiones estables e inestables;

⁵⁹ V.I. Arnol'd: “Proof of a Theorem of A. N. Kolmogorov on the Preservation of Conditionally Periodic Motions under a Small Perturbation of the Hamiltonian”. *Uspehi Mat. Nauk* 18, 13-40, 1963.

- la caracterización de las regiones integrables en términos de toros que pueden presentar diferentes tipos de anudaciones;
- la clasificación topológica de las soluciones, incluyendo la extensión de los ciclos periódicos y separatrices observados en el plano al caso tridimensional;
- la reformulación en términos de variables “angulares” que permiten conectar con enfoques vinculados a la Geometría Conforme o la Geometría Simpléctica, ilustrando profundos aspectos relacionados con la geometría de la aplicación momento (clave para la unificación de diferentes aspectos de la Mecánica Analítica);
- las relaciones entre los aspectos invariantes vinculados a la acción de los difeomorfismos (modelo para deformaciones “localmente simétricas”) y la conservación de “cantidades geométricas” para fluidos ideales vinculadas a la acción del grupo especial lineal;
- el análisis de la (in)estabilidad con respecto a “pequeñas perturbaciones”.

Todos estos aspectos presentan una compleja interacción entre aspectos topológicos, geométricos y dinámicos que se presentan con más detalle en el módulo B_{15} (Computational Dynamics) de la materia B_1 (Computational Mechanics).

3.3.2. Robótica

Algunas de las primeras aplicaciones de la Topología a Robótica se han esbozado en la introducción a la materia A_2 (Topología Algebraica). Conciernen inicialmente a aspectos tales como

- la *planificación de movimientos* en relación con generación semi-automática de trayectorias libres de colisiones con obstáculos para vehículos autónomos;
- el *diseño de modelos de interacción* entre diferentes entidades autónomas para sistemas inteligentes basados en redes de sensores;
- la *gestión automática de redes complejas* en relación con diferentes tipos de infraestructuras para redes eléctricas, de agua, de comunicaciones ó provisión de servicios, p.e.;
- la *gestión distribuida de grandes volúmenes de datos* mediante hipergrafos ponderados incluyen operaciones de pegado, segmentación, recomposición, contracción, expansión, p.e.

La variabilidad de las condiciones relativas al entorno o a los agentes con los que se pueden presentar diferentes tipos de interacción requiere un marco diferencial más amplio en el que podamos representar y gestionar variaciones

de orden bajo ≤ 2 (en presencia de incertidumbre), así como herramientas de visualización avanzada que permitan intervenir de forma interactiva para modificar los comportamientos en función de (una simulación de) las respuestas obtenidas.

Así p.e. y en relación con el primer tópico, la colección de movimientos llevados a cabo por un robot se pueden abordar desde el punto de vista topológico como una colección de trayectorias para los puntos de control, incluyendo los efectores finales (end-effectors) vinculados a los extremos de las articulaciones en relación con operaciones de locomoción ó bien de aprehensión y agarre. La Topología Diferencial proporciona un marco para incorporar efectos dinámicos sobre dichas trayectorias que faciliten una interacción controlada con el entorno.

En particular y para minimizar riesgo, es importante que el robot evite colisiones, mantenga siempre su estabilidad, facilitando el control de las diferentes componentes para recuperar estabilidad a lo largo de trayectorias y equilibrio estático en los extremos asociados a la realización de una tarea. Ello plantea problemas relacionados con la estabilidad genérica de trayectorias probadas como estables y la gestión de singularidades que pueden aparecer (ver la materia B_2).

Desde una perspectiva más general, la realimentación entre señales y acciones a llevar a cabo como respuesta (mediante “comandos”), requiere una integración de información en torno a patrones más estructurada y al mismo tiempo flexible que la existente hasta ahora. Los aspectos estructurales conciernen a una representación del conocimiento; la flexibilidad afecta a la capacidad de respuesta y su modificación dependiendo del tipo de interacción con el entorno o con otros agentes.

Lla realimentación entre señales y acciones constituye el núcleo del Ciclo Percepción-Acción (PAC) que es una extensión de la realimentación clásica entre los espacios de configuraciones $\mathcal{C}$ y de trabajo $\mathcal{C}$ de un robot $\mathcal{C}$. Esta realimentación se aborda desde diferentes perspectivas complementarias, extendiendo el Análisis Armónico (como marco para la unificación de los diferentes tipos de señales) con la topología correspondiente a diferentes tipos de campos, incluyendo los campos tensoriales (como representación intrínseca de espacios interno y externo) con e.⁶⁰

3.3.3. Visión Computacional

El análisis de la diversidad morfológica sobre secuencias de vídeo de aspectos capturados por cámaras digitales es uno de los problemas más difíciles de la Visión Computacional (ver módulo B_3 para detalles y referencias). Para figuras planas cuyo borde está dado por curvas “simples” (es decir, curvas cerradas y sin auto-intersecciones) se dispone del funcional de Mumford-Shah que permite minimizar la distancia con respecto a un patrón geométrico (módulo transformaciones topológicas que conserven alguna de las propiedades habituales).

⁶⁰ Este enfoque es transversal a diferentes módulos de la materia B_2 (Robotics).

De forma complementaria, la métrica de Peterson-Weil sobre el espacio de moduli de curvas planas proporciona una medida de la proximidad entre “formas” vinculadas a propiedades formales de los bordes de las regiones. La proximidad entre formas asociada al reconocimiento semi-automático está vinculada a la resolución de un problema variacional (funcional de Mumford-Shah) que ha sido comentado anteriormente. Interesa extender este enfoque para modelar apariencias cambiantes vinculadas a superficies o bien a sólidos. La topología de los campos juega un papel fundamental en relación con ambas cuestiones.

El estudio de formas canónicas de las singularidades permite identificar patrones básicos para la evolución de datos asociados a diferentes localizaciones del observador. Los materiales y las técnicas presentadas en los módulos A_{43} (Singularidades de Funciones) y A_{44} (Singularidades de Aplicaciones) proporcionan una aproximación jerarquizada, así como una descripción de las posibles degeneraciones que pueden aparecer asociadas a la proyección del contorno aparente sobre el plano de imagen.

Desde un punto de vista formal más avanzado, la variación de las formas cambiantes se aborda en términos de la Geometría del Lugar Discriminante asociado a una proyección genérica sobre el plano de imagen. Una presentación de propiedades geométricas (enfoque basado en polaridad) se ha presentado en el módulo A_{34} (Geometría Enumerativa) de la materia A_3 (Geometría Algebraica). El estudio topológico local de las formas canónicas que pueden aparecer se desarrolla en el módulo A_{44} (Singularidades de Aplicaciones), mientras que las propiedades globales del Lugar Discriminante se presentan desde el punto de vista topológico en el módulo A_{45} (Estratificaciones).

3.3.4. Informática Gráfica

La simulación del movimiento o la animación de personajes (characters) proporciona una de las fuentes iniciales de inspiración para la aplicación de técnicas de Topología Diferencial en relación con la deformación de plantillas. Además, una vez elaborado un modelo geométrico o cinemático, es necesario incorporar sobre el modelo diferentes capas radiométricas. Esta incorporación se lleva a cabo en términos del Álgebra Multilineal.

La animación semi-automática de personajes debe ser capaz de capturar aspectos simplificados de la cinemática de uno o más personajes en escena. Ello requiere representaciones de complejidad creciente. Estas representaciones incorporan elementos basados en modelos (enfoque top-down) con elementos procedentes del procesamiento y análisis de las secuencias de vídeo.

De acuerdo con el enfoque general topológico basado en diferentes tipos de campos, el modelado de escenas o de personajes se lleva a cabo en términos de campos escalares; el modelado de movimientos o deformaciones aparentes en términos de campos vectoriales; el modelado de deformaciones reales o la superposición de efectos radiométricos en términos de campos tensoriales. Este mismo esquema se utiliza para la visualización de cada uno de dichos aspectos.

Un *reto* consiste en automatizar la generación de los diferentes tipos de campos. Esta cuestión afecta tanto a los aspectos geométricos (estimación paramétrica o implícita, p.e.) como radiométrica (comportamiento de la luz como distribución sobre la superficie y su entorno, p.e.). Asimismo, afecta a la variación de dichos aspectos en función del movimiento de cámara, del movimiento de los objetos o de las deformaciones asociadas a la interacción con el entorno.

El ajuste entre formas eventualmente cambiantes se lleva a cabo utilizando principios de tipo variacional. Hay diferentes candidatos como funcionales integrales de tipo variacional, que nuevamente responden al mismo esquema descrito para campos. Así p.e. tenemos diferentes funcionales de energía (como campos escalares sobre fibrados vectoriales, p.e.), diferentes funcionales asociados a distribuciones (gradiente, rotacional, divergencia, p.e.), o bien diferentes funcionales asociados a tensores métricos (longitud, área, volumen.... o bien curvaturas).

En cualquier caso, el problema a resolver es siempre el mismo: Calcular los extremos un funcional sobre una variedad (que representa las condiciones frontera) eventualmente variable. Por ello, el marco natural es la extensión de la Teoría de Morse que se presenta en el capítulo 6.

3.4. Aplicaciones en Ciencias Sociales

Esta subsección está dedicada inicialmente a cuestiones bastante más sencillas que las presentadas en la subsección anterior; no obstante, el modelado de aspectos relacionados con la Ingeniería del Conocimiento y, sobre todo, los aspectos topológicos vinculados a Sistemas Expertos presentan una elevada dificultad que se comenta al principio de la subsección §3.4.

Las aplicaciones iniciales más espectaculares relacionadas con Ciencias Sociales están relacionadas con la Teoría Económica. Paradójicamente, son las más inútiles, pues cualquier atisbo de racionalidad por parte de los diferentes agentes (públicos y privados) que toman decisiones en los diferentes terrenos económicos (Micro- vs Macroeconomía, Comercio Internacional ó Finanzas) es pura coincidencia.

Esta aparente esquizofrenia tiene una explicación muy sencilla pues los agentes privados toman iniciativas desde posiciones de ventaja (la competencia perfecta ya era una ilusión cuando fue formulada a finales del S.XVIII) y se valen de toda clase de instrumentos para inclinar la balanza de las decisiones políticas a su favor. A pesar de ello, la maximización del beneficio privado característica de cualquier sistema capitalista proporciona un punto de partida de interés para entender la dinámica de los sistemas dinámicos a diferentes niveles y su articulación en mercados cada vez más interrelacionados.

3.4.1. Sistemas de Información Geográficos 3D

La referencia para un SIG tridimensional está dada por un mapa de elevación digital (DEM) que no es sino una distribución discreta para un mapa de alturas $(x_i, y_i, h(x_i, y_i))$ asociado a una colección finita $\mathcal{S}$ de puntos $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$ para $1 \leq i \leq N$. Asociada a esta colección de puntos se puede generar de forma automática un modelo continuo en el que los puntos detectados son los vértices de una triangulación irregular ó TIN (Triangular Irregular Network) que corresponde a una PL-superficie.

La construcción es similar si se reemplazan la altura $h_i = h(x_i, y_i)$ por la profundidad $d(x_i, y_i)$ con respecto a la localización de una cámara o bien por una distribución de energía $E(x_i, y_i)$ sobre $\mathbf{p}\mathcal{S}$. La introducción de movimiento para la cámara o bien la variabilidad en las condiciones ambientales y la respuesta de los dispositivos (activos o pasivos) motiva la necesidad de desarrollar PS-modelos que aproximen las PL-distribuciones y sean más fáciles de gestionar.

Desde el punto de vista de la Topología Diferencial, las PS-estructuras resultantes se pueden interpretar como una aproximación suave sobre la que es posible definir diferentes tipos de campos (escalares, vectoriales, tensoriales) que facilitan el modelado de procesos dinámicos, incluyendo posible interacción por parte de agentes individuales o de entidades encargadas de la supervisión.

En particular, las deformaciones en los campos escalares asociados a las funciones de Morse comentadas (altura, profundidad, energía) dan lugar a una dinámica interpretable en términos de “pandeo” que requiere una formulación tensorial.

La versión dual de la triangulación plana (Delaunay) correspondiente a $h(x_i, y_i) = 0$ es un grafo planar al que se llama diagrama de Voronoi $\mathcal{V}$. Los nodos de dicho grafo se pueden interpretar como atractores, los vértices como repulsores y los vértices de las aristas que no contienen atractores, ni son repulsores, son puntos de silla.⁶¹

Esta descripción diferencial asociada a una interpretación suave de los elementos de un diagrama de Voronoi introduce los elementos básicos de la Teoría de Morse para gestionar una dinámica que localmente es de tipo gradiente. Esta dinámica proporciona un modelo básico para evaluar la entalpía (transferencia de energía entre sistemas adyacentes), así como el incremento de la entropía del sistema.

La variación agregada en los niveles de energía ponderados es la responsable de la dinámica simplificada del sistema. El control óptimo de esta variación para sistemas bajo incertidumbre es un problema de gran interés con diferentes ramificaciones en áreas más aplicadas de Ingeniería. En particular, la variación en dichos niveles de “energía” proporciona modelos básicos para fenómenos dinámicos de gran complejidad relacionados con catástrofes medioambientales como incendios ó inundaciones, p.e.

⁶¹ Este enfoque se desarrolla en el módulo B_{11} (Geometría Computacional) de la materia B_1 (Mechanics of Continuous Media).

3.4.2. Paradigmas de la Teoría Económica

Algunos de los paradigmas más frecuentes en Teoría Económica son la Teoría del Equilibrio General, la Teoría de las Expectativas Racionales

Los desarrollos matemáticos subyacentes han proporcionado un aura de “cientificidad” a dichos paradigmas. Ello ha permitido a los autores que les formalizaron la obtención de un Premio Nobel para cada uno de ellos. Sin embargo, los tres son falsos, pues son inconsistentes con la realidad más inmediata.

Debido a una política neoliberal predominante, al chantaje ejercido por los intermediarios financieros y a la servidumbre de la mayor parte de los gobiernos con respecto a los intereses de dichos intermediarios financieros, nos conducen una y otra vez a la inestabilidad en los mercados financieros (cuando no el caos) y, como consecuencia, en todos los demás mercados. Obviamente y por razones políticas, la salida económica siempre es a beneficio de dichos intermediarios, pero otra política es posible ⁶²

Los modelos matemáticos para modificar esta situación a favor de la mayor parte de la población son conocidos. Basta aplicar mecanismos de control que sean “transversales” a las soluciones procedentes de una dinámica turbulenta o caótica. El mayor problema actual es que no hay voluntad política de hacerlo, ni tampoco una coalición de agentes a diferentes escalas (nacional, europea, internacional) para el desarrollo de dicha política.

Desde un punto de vista geométrico, los modelos ideales de Estática Comparativa utilizados en las áreas más relevantes de la Teoría Económica (Micro-, Macro-Economía, Economía Internacional y Finanzas) son casos particulares de Foliaciones. En particular, en los casos de microeconomía más sencillos, el efecto sustitución (resp. renta) se representa mediante un desplazamiento sobre (resp. en una dirección transversal a) la hoja de la foliación. Bajo hipótesis de convexidad para las hojas, el equilibrio es único. De forma complementaria, los shocks repentinos debidos a factores políticos o económicos, se representan como perturbaciones de las hojas de la foliación que dejan de ser convexos, lo cual da lugar a múltiples soluciones de equilibrio.

A menudo, sólo se dispone de información parcial (siempre incompleta) relativa a un número de datos que inicialmente se suponen no correlacionados en sentido estadístico. Por ello, la estimación en cada instante de dichos datos genera subespacios k -dimensionales L^k de un espacio ambiente n -dimensional V (correspondiente a “todos” los bienes); es decir, representan un elemento variable de la Grassmanniana $Grass(k, N)$ de subespacios k -dimensionales de V . La existencia de soluciones de equilibrio sobre estos modelos ideales es una obviedad en términos de puntos fijos para aplicaciones de la Grassmanniana en sí misma, que son los ceros para EDO sobre los espacios de matrices que permiten representar la dinámica sobre una Grassmanniana.

En otras palabras, dicho espacio homogéneo proporciona un marco para

⁶² Ver el módulo 6 de mis apuntes sobre la materia B_5 (Teoría Económica. Una aproximación diferencial).

incorporar la evolución espacio-temporal. Este marco, permite analizar la estabilidad o diseñar estrategias de control para modelos bajo información incompleta; en este caso, los sistemas dinámicos “genéricos” sobre Grassmannianas están dados por ecuaciones tipo Ricatti. En la práctica, la dependencia de unos datos con respecto a otros (correlación) o la influencia de unos subsistemas en otros, sugiere la introducción de una dinámica similar sobre variedades de banderas que permiten (des)agregar y analizar las influencias mutuas de subsistemas en términos del espacio tangente a variedades de banderas $\mathcal{B}(r_1, \dots, r_h)$ donde $(r_1, \dots, r_h)$ es una partición de N

3.4.3. ingeniería del Conocimiento

La gestión semi-automática del conocimiento para sistemas de complejidad creciente requiere incorporar modelos y herramientas para organizar grandes volúmenes de datos de acuerdo con diferentes criterios, extraer la información más significativa (variantes de estrategias SVD) y proporcionara una asistencia a la toma de decisiones (simulación y optimización). Todos estos procesos (organización, extracción, gestión, toma de decisiones) se puede entender como un sistema dinámico que debe adaptarse a condiciones cambiantes. La Topología Diferencial proporciona un soporte para representar y gestionar la variabilidad o incluso la presencia de cambios cualitativos en dichos procesos.

Los organismos vivos han desarrollado estrategias adaptativas con una complejidad creciente a entornos cambiantes. Por ello, los modelos biológicos son una permanente fuente de inspiración. Desde los años setenta se han desarrollado múltiples aproximaciones relacionadas con

- *Autómatas Celulares* de complejidad creciente combinando diferentes variantes del caso $1D$, fenómenos de replicación o auto-reproducción;
- *Modelos adaptativos* (más allá de modelos iniciales tipo estímulo-respuesta) a condiciones cambiantes con comportamientos de tipo colaborativo vs competitivo, o una combinación de ambos;
- *Diferentes tipos de memoria, conocimiento y comportamiento*, que combinan patrones determinista vs probabilista (en el marco de la Teoría de Juegos, p.e.)

Todos ellos, requieren herramientas de Topología Diferencial que facilitan la adaptación a fluctuaciones, cambios bruscos o fenómenos de elevada complejidad como los descritos en la Dinámica de Fluidos. En particular, las transiciones entre regímenes laminares, turbulento y caóticos, se presentan en diferentes áreas de conocimiento, con consecuencias a veces catastróficas para la vida diaria. Por ello, es importante disponer de modelos híbridos que permitan detectar y actuar en relación con fenómenos de propagación tanto en el caso continuo (modelos de difusión-reacción, p.e.) como discreto (modelos de replicación, incluyendo eventualmente bifurcaciones en cascada, p.e.).

El aprendizaje automático de algunas tareas requiere una traducción formal de rutinas y procedimientos que afectan al reconocimiento de patrones vinculados a objetos (representables como PL o PS-variedades, p.e.) y sus transformaciones (representables como campos o, con más generalidad, morfismos entre estructuras superpuestas). La concatenación de rutinas requiere una realimentación entre mini-tareas que responden a lógicas elementales (de clases o proposicional de primer orden, p.e.). Cada una de ellas se puede representar como un nodo de una red representa mediante un hipergrafo (eventualmente con ciclos) cuyas aristas se activan en función de “valores críticos” para diferentes tipos de funcionales definidos sobre la red.

Desde 2015 existen herramientas computacionales disponibles en la web que facilitan el soporte para desencadenar dichos procesos de forma automática. La más conocida es TensorFlow que no debe confundirse con la noción de Flujo Tensorial tal y como se ha descrito en el módulo A_{13} (Cálculo Tensorial) de la materia A_1 (Geometría Diferencial). No obstante, la automatización en las respuesta es un riesgo que es preciso controlar tal y como ponen de manifiesto fenómenos cada vez más frecuentes en los mercados de valores, incluyendo la especulación automática en mercados financieros. Por ello, una supervisión humana de Sistemas Expertos es absolutamente imprescindible para minimizar los riesgos asociados a este tipo de herramientas computacionales.

3.4.4. Sistemas Expertos

Una dificultad importante para un diseño biológicamente inspirado de la Ingeniería del Conocimiento se debe a la escasez de información sobre las representaciones intrínsecas que utiliza el cerebro humano para realimentar los aspectos propioceptivos (asociados a la arquitectura interna) con los sistemas sensoriales estereoeceptivos (vinculados a representaciones del mundo exterior).

En todas las fases mencionadas en el apartado anterior, los Sistemas Expertos juegan un papel fundamental. La mayor parte de ellos se basan en variantes de Redes Neuronales Artificiales (ANN: Artificial Neural Networks, en lo sucesivo). Las ANN están compuestas por estructuras que conectan las “células básicas” (neuronas representadas por nodos de la red) de al menos 3 capas. La capa de entrada recoge y almacena los inputs (información procedente de sensores, p.e.), mientras que la capa de salida proporciona los comandos o acciones a realizar en relación con el procesamiento de la información realizado por las capas intermedias.

El número $r \geq 1$ de capas intermedias es variable, dando lugar a Redes con $r + 2$ capas. Existen diferentes topologías para el diseño de la red que se pueden representar como “trenzas” (tresses, braids) permitiendo bifurcaciones en nodos. En ausencia de información previa, la inicialización de la red se lleva a cabo de forma aleatoria (procedimiento poco eficiente y claramente mejorable). La evaluación de los resultados obtenidos con respecto a los esperados, da lugar a un error que se trata de minimizar. Ello se lleva a cabo modificando los pesos en

las nodos de las capas internas de la red y observando nuevamente los resultados obtenidos correspondientes a simulaciones sucesivas. Una vez alcanzada una solución óptima se fijan los pesos correspondientes a cada neurona de la red en relación con la tarea a realizar.

La arquitectura precedente responde a un esquema reticular que es una representación discreta de un cuboide sobre la que se pueden diseñar diferentes tipos de campos tensoriales. Esta estructura era ampliamente utilizada en los años ochenta para modelar e imitar procedimientos de aprendizaje semi-automático (de tipo supervisado o no). Algunos inconvenientes de este enfoque respondían a la lentitud en la convergencias para procesos de aprendizaje, las dificultades para incorporar eventos repentinos (tipo mutaciones, p.e.), la imposibilidad de modificar los pesos una vez que la red estaba entrenada y la difícil reutilización del entrenamiento en función de datos nuevos que modifiquen de forma significativa los inputs considerados inicialmente como válidos.

Para remediar esta situación, a finales de los ochenta y principios de los noventa se desarrollan varias estrategias complementarias que “superponen” estructuras adicionales a las ANN originales. Algunas de las más conocidas relacionadas con los inconvenientes ya citados, corresponden a Algoritmos Genéticos, Programación Evolutiva y Mapas Auto-Organizativos. Nuestra contribución consiste en que todos ellos se pueden considerar como una versión discreta de diferentes tipos de PL-campos (campos con esquinas, en la terminología de Thom, 1969) que interpretamos como secciones, no necesariamente regulares (pueden presentar bifurcaciones) de un fibrado ⁶³

El desarrollo reciente de herramientas de *Deep Learning* utiliza un elevado número de capas y modelos no-lineales para el aprendizaje automático (supervisado o no). Este nuevo paradigma incluye todos los anteriores y abre unas perspectivas hasta hace poco insospechadas para la gestión de información multimedia sobre diferentes soportes digitales. ⁶⁴

⁶³ Este enfoque se desarrolla en los últimos capítulos de varios módulos de la materia B_2 (Robotics).

⁶⁴ Para más detalles y referencias ver el último capítulo del módulo B_{34} (Reconocimiento) de la materia B_3 (Visión Computacional).

4. Contenido del módulo 1

En el primer módulo *Topología Diferencial Básica* se revisan algunos conceptos de Topología y de Análisis que proporcionan el soporte para abordar el problema de clasificación diferenciable de variedades desde el punto de vista diferenciable. Este módulo está orientado a plantear algunos de los problemas centrales de la Topología Diferencial esbozando las diferentes metodologías (local y global) que se desarrollarán a lo largo del Curso.

En particular, el estudio topológico correspondiente a las estructuras superpuestas a variedades se desarrolla en el módulo 2 (Fibrados y sus generalizaciones); el estudio de (los gérmenes eventualmente singulares de) funciones (resp. aplicaciones) se desarrolla en el módulo 3 (resp. 4); el estudio de aplicaciones entre variedades con más generalidad morfismos entre estructuras superpuestas se desarrolla en el módulo 5; por último, una introducción a los aspectos dinámicos relacionados con los tópicos anteriores se desarrolla en el módulo 6.

4.1. Objetivos del módulo

A diferencia del caso topológico en el que

La clasificación topológica se lleva a cabo en términos de homeomorfismos. Esta clasificación afecta tanto a espacios topológicos X como a aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ entre espacios (mediante acción izquierda-derecha, típicamente). Esta clasificación da lugar a espacios de clases (moduli) “demasiado amplios”. Además, salvo casos muy sencillos (correspondiente al caso $1D$) no se dispone de criterios efectivos para identificar si dos espacios generales son homeomorfos o no, ni siquiera para el caso de variedades.

En el extremo opuesto, la clasificación de variedades diferenciables se lleva a cabo por la acción de difeomorfismos, es decir, homeomorfismos diferenciables con inversa diferenciable. Este criterio es mucho más estricto que la clasificación topológica (modulo homeomorfismo); aún así, la construcción explícita de difeomorfismos es un problema bastante difícil.

Una estrategia frecuente para construir difeomorfismos consiste en pegar datos locales obtenidos a partir de la integración de campos vectoriales, verificando si el resultado del pegado es efectivamente un difeomorfismo o no. Esta estrategia plantea el problema del “pegado” de (las soluciones de) campos vectoriales o, con más generalidad, de (las variedades integrales de) distribuciones $\mathcal{D}$ de campos que es un problema altamente no-trivial, debido entre otras cosas a la aparición de singularidades tanto para campos como para funciones.

4.1.1. Herramientas topológicas para la Geometría

En la materia A_2 se han presentado herramientas vinculadas a las Topologías Algebraica y Geométrica. Ambas son relevantes para la Topología Diferencial.

Las condiciones de suavidad para el soporte y las C^∞ -aplicaciones entre variedades, permiten simplificar de una forma drástica la combinatoria de descomposiciones simpliciales de forma similar al enfoque basado en descomposiciones celulares.

En particular, la Teoría de Morse (capítulo 6) proporciona una herramienta muy potente para el cálculo de la (co)homología de variedades compactas M en términos de descomposiciones celulares. Este enfoque se ha extendido a situaciones mucho más amplias en las que los valores críticos de un campo escalar se reemplazan por valores críticos de un funcional integral asociado a un problema de tipo variacional.

4.1.2. Motivaciones geométricas y analíticas para la TD

La introducción del campo gradiente asociado a una función de Morse es ejemplo básico no sólo para identificar valores críticos, sino para visualizar el efecto dinámico asociado a las singularidades del campo gradiente en términos de la topología de campos construidos sobre variedades. Esta idea tan simple se puede extender en varias direcciones que afectan a distribuciones de campos vectoriales o sistemas de formas diferenciales sobre una variedad.

La clave para la interpretación geométrica consiste en interpretar los campos como diferentes tipos de deformaciones sobre C^r -variedades. En contexto, los problemas de clasificación corresponden no sólo a estudiar las deformaciones de variedades ó de aplicaciones entre variedades, sino los tipos diferentes (dentro de la correspondiente C^r -categoría) de deformaciones que se pueden definir en términos de campos. Esta cuestión afecta a la cohomología de campos que se ha introducido más arriba y se desarrolla con más detalle en los módulos siguientes.

Otras aplicaciones de interés vinculadas a los contenidos de este módulo A_{41} aparecen en relación con la visualización de las técnicas de cobordismo para el pegado de formas con diferentes topologías, o de forma complementaria, de “cirugía”. Estas cuestiones afectan a la reconstrucción o, de forma complementaria, a la descomposición de objetos deformables con topología complicada.

Las aplicaciones al Reconocimiento de Formas se presentan en el módulo B_{34} de la materia B_3 (Computer Vision); las aplicaciones a la producción de contenidos multimedia se presentan en la materia B_4 (Computer Graphics and Multimedia Applications).

4.1.3. Algunas conexiones con la Física Teórica

En apartados anteriores se ha destacado el papel de construcciones realizadas sobre fibrados en relación con cuestiones de unificación dentro del modelo estándar (unificación de interacciones electromagnética, débil y fuerte) y las expectativas para incorporar una versión cuántica de la interacción gravitatoria en relación con las GUT (Great Unification Theories). Este tópico muestra re-

laciones entre aspectos topológicos y geométricos que ocupan un lugar central en un gran número de desarrollos que han tenido lugar desde los años setenta del s.XX y se prolonga hasta la actualidad.

De forma complementaria, hay tópicos de la Topología Diferencial Básica que proporcionan una relación más directa entre aspectos topológicos y analíticos, en relación con los operadores sobre espacios de Hilbert (entendidos como “procesos”) y el cobordismo entre variedades $(m - 1)$ -dimensionales en un espacio tiempo. Esta relación juega un papel central en [Bae09] ⁶⁵

La interpretación de los procesos (operadores en espacios de Hilbert) como morfismos es una extensión natural motivada por desarrollos similares en las diferentes Geometrías. Sin embargo, el uso que hacen Baez y Stay de herramientas lógicas (reminiscente del lenguaje de esquemas) es de una potencia formidable que merecería mayor atención, sobre todo en relación con paradigmas recientes de computación que puedan facilitar una implementación computacional de cuestiones que se consideraban como intratables hasta hace muy poco.

4.1.4. Anticipando algunas conclusiones

La Topología Diferencial (TD) ha tenido un desarrollo paralelo a los tópicos más avanzados de la Física Teórica desde los años sesenta del s.XX. Desde finales de los ochenta, se asiste a una convergencia cada vez mayor entre modelos de la TD y tópicos avanzados de investigación en Ingeniería. Queda aún un largo camino por recorrer, pues aún se ignoran aspectos básicos de Deformaciones de Variedades Singulares y sistemas dinámicos sobre variedades algebraicas o analíticas.

La mayor parte de las herramientas desarrolladas a lo largo de los cincuenta y sesenta del siglo XX suponen que la variedad soporte es suave y está fijada. La necesidad de analizar procesos complejos en sistemas con una topología variable (incluyendo componentes que pueden colapsar o expandirse) plantea una colección de retos para los que aún no se tiene respuesta.

Es necesario avanzar en las interrelaciones entre las estrategias habituales (top-down vs bottom-up) y métodos de diferente naturales (“determinista” vs probabilista). Para ello, hay que redefinir aproximaciones híbridas para los diferentes módulos de esta materia TD y sus aplicaciones a áreas de Ingeniería para las cuales sólo se dispone de herramientas aún bastante toscas.

En la parte II de estos apuntes se presentan materiales relacionados con algunas áreas significativas tales como Mecánica de Medios Continuous, Robótica, Visión Computacional o Informática Gráfica. Estos tópicos cubren sólo algunos aspectos de la enorme riqueza potencial de la TD a estos tópicos, pero hay otros muchos aspectos relacionados con Biomedicina, Redes de sensores, ó Gestión de Información que proporcionan motivaciones adicionales

⁶⁵ J.C.Baez and M.Stay: “Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone”, 2009.

4.2. Descripción detallada del módulo 1

El *módulo 1* de esta materia A_4 (Topología Diferencial) está orientado a presentar las herramientas básicas para resolver problemas de clasificación tanto absolutos (clasificación de variedades) como relativos (clasificación de morfismos). Para ello, se introducen técnicas locales y globales relacionados con los problemas de clasificación mencionados en la subsección anterior.

De acuerdo con los objetivos descritos en la subsección anterior, A continuación se enumeran los capítulos de este módulo, comentándose a continuación algunas de las ideas básicas subyacentes.

4.2.1. Aplicaciones diferenciables

Se repasan de forma sintética algunas propiedades básicas de las aplicaciones diferenciables, insistiendo en la interpretación del caso regular, es decir, correspondiente a aplicaciones de rango máximo. Un caso particularmente importante está relacionado con los embebimientos pues su imagen proporciona subvariedades de una variedad ambiente.

Se presta especial atención al caso de variedades compactas, mostrando condiciones adicionales para que la imagen por una aplicación $f : N \rightarrow P$ entre variedades “suficientemente general” sea una subvariedad. Se muestra la utilidad de este enfoque para construir subvariedades en otras categorías (algebraica vs analítica, sobre todo).

La linealización global dada por la diferencial de la aplicación f motiva la introducción de morfismos con “buenas propiedades” asociadas a la linealización dada por la diferencial df de f . Se reinterpreta esta construcción en términos geométricos utilizando los fibrados tangentes y su versión dual dada por el cotangente que resulta especialmente útil en el caso singular (donde no existe el fibrado tangente).

Se analizan con detalles las nociones de inmersión y submersión, mostrando bajo qué condiciones adicionales la imagen directa o la imagen inversa es una subvariedad. Esta última motiva una introducción intuitiva a la noción de transversalidad para subvariedades que más adelante se extiende a espacios de funciones.

Se concluye mostrando el resultado fundamental es el Teorema de Severi-Whitney que proporciona embebimiento de variedades compactas y, por consiguiente, un soporte topológico para justificar los argumentos de posición general.

4.2.2. Topología Diferencial de Espacios Funcionales

El objetivo general de este capítulo es mostrar algunos resultados generales de espacios de aplicaciones y discutir la aproximación mediante aplicaciones suaves a aplicaciones de clase C^r .

Las “buenas propiedades” que presentan las aplicaciones suaves descritas en el capítulo anterior sugieren la cuestión a de aproximar aplicaciones más generales que tengan propiedades genéricas tan favorables como sea posible. Algunas de las cuestiones más relevantes afectan a la “densidad” (o más bien el carácter “residual” del complementario) y la interpretación de la genericidad en términos de estabilidad o bien de transversalidad.

Se introducen las *Topologías débil y fuerte* que extienden al espacio de jets los resultados básicos sobre linealización de aplicaciones. La introducción de estas topologías permite demostrar la densidad de inmersiones y embebimientos. Ello plantea la necesidad de mostrar procedimiento efectivos para construir deformaciones genéricas dadas por aplicaciones cuya diferencial es regular

Este objetivo conduce de forma natural al estudio de diferentes nociones de estabilidad dependiendo del tipo de acción (topológica, algebraica, diferencial) y una comparación entre los tipos resultantes asociados a cada una de dichas acciones ⁶⁶.

El estudio de aplicaciones cuya linealización tiene “buenas propiedades” (diferencial regular), plantea el problema de la aproximación que requiere argumentos de densidad para la topología débil o compacta-abierta.

4.2.3. Transversalidad de aplicaciones

La transversalidad relativa a un morfismo tiene múltiples aplicaciones en Geometría para justificar los argumentos de posición general. Permite reducir problemas relacionados con puntos que presentan elevada multiplicidad de intersección, reemplazándolos con puntos simples. Esta aproximación simplifica el cálculo de invariantes locales en el caso diferenciable, gracias a la flexibilidad que presentan las deformaciones en dicha categoría.

El problema similar en el caso algebraico resulta bastante más complicado y requiere una formulación más sofisticada de la multiplicidad de intersección que se aborda en el módulo A_3 (Geometría Algebraica) ⁶⁷

Por coherencia con el resto del módulo nos restringimos al marco diferenciable. En este contexto, las propiedades de “contacto” en relación con el cálculo de invariantes y los problemas de aproximación se resuelven introduciendo los espacios de jets.

Formalmente, están dados por gérmenes (clases de equivalencia obtenidas pasando al límite proyectivo) de polinomios de Taylor asociados a las componentes de una aplicación. Esta descripción permite describir localmente los k -jets en términos del álgebra simétrica de un anillo de polinomios (asociados a diferenciales simétricas, es decir, verificando la regla de Schwarz).

⁶⁶ En los módulos 3 y 4 se desarrolla la estabilidad infinitesimal

⁶⁷ Para una aproximación histórica al problema ver el capítulo 1 del módulo 5 (Geometría Enumerativa) de la materia A_3 (Geometría Algebraica).

Los espacios de jets proporcionan una aproximación formal de tipo polinómico al estudio infinitesimal (modulo la acción de grupos de difeomorfismos) de gérmenes de aplicaciones. El resultado fundamental de este capítulo es el Teorema de Multitransversalidad (Thom) para espacios de jets de aplicaciones que es una extensión a álgebras simétricas de los resultados descritos para la linealización de aplicación.

El Teorema de Multitransversalidad permite refinar los argumentos de genericidad y de estabilidad presentados para la linealización de aplicaciones utilizando la truncación formal y extendiendo la acción infinitesimal definida sobre los espacios tangentes a formas que presentan un contacto de orden superior. La existencia de una estructura natural de contacto sobre los espacios de jets permite re-introducir el enfoque geométrico y esbozar algunas aplicaciones a la Mecánica Analítica.

Los resultados de genericidad asociados a la linealización de aplicaciones se extienden a “aproximaciones” de orden $k \geq 2$ que se estudian formalmente en términos de k -jets (desarrollos de Taylor formales truncados en orden k). El estudio de condiciones de genericidad se aborda en términos de condiciones de multi-transversalidad en espacios de k -jets, con el Teorema de R.Thom como resultado centrado.

4.2.4. Estratificaciones de Thom-Boardman

La falta de genericidad para aplicaciones se aborda en términos de estratificaciones asociadas a la diferencial de una aplicación $f : N \rightarrow P$ entre variedades. De una forma intuitiva, una estratificación es una descomposición de una variedad singular en unión disjunta de “estratos” dados como unión de variedades diferenciables.

La utilización de la aplicación de Gauss generalizada $g : M \rightarrow Grass(m, N)$ para un valor N suficientemente grande (Teorema de Severi-Whitney), permite mostrar una conexión estructural (debida esencialmente a R.Thom) de los ciclos asociados a la estratificación por el rango con la descomposición celular de la Grassmanniana $Grass(m, N)$ en términos de los ciclos de Schubert.

El ‘pegado’ de estas subvariedades se realiza a lo largo de la frontera, lo cual motiva la introducción de diferentes condiciones (topológicas, algebraicas, analíticas) para controlar la forma de “pegar” los datos locales. Sólo se consideran los casos más “sencillos” asociados a una estratificación por el rango de la matriz jacobiana asociada a la diferencial de una aplicación (Thom-Boardman).

4.2.5. Teoría de Morse básica

La Teoría de Morse básica permite reconstruir la topología de cualquier variedad compacta M a partir del comportamiento de funciones de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Se caracterizar a las funciones de Morse (puntos críticos no-degenerados) y se

demuestra que forman un conjunto denso en $C^r(M, \mathbb{R})$ para $r \geq 1$ para la topología compacta abierta.

Se muestra la forma canónica de las funciones de Morse para un pequeño entorno de cada punto crítico y se reinterpreta la condición de no-degeneración de la forma cuadrática $Hess(f)(p)$ en cada punto crítico $p \in M$ en términos de la topología del campo gradiente (normalizado) ∇f .

Se concluye mostrando algunas extensiones y aplicaciones sencillas de la Teoría de Morse en relación con problemas de tipo variacional (extremos de funcionales definidos sobre espacios de funciones). Se muestra una reinterpretación geométrica asociada a la minimización de la distancia (geodésicas) ó del área (superficies minimales).

4.2.6. Elementos de Cirugía y Cobordismo

Se introducen las nociones básicas para mostrar estrategias de pegado que permiten recuperar la clasificación de superficies para el caso compacto. Se plantea la extensión al caso no-compacto y se muestran algunas propiedades básicas relacionadas con clasificación en dimensión superior.

4.2.7. Some applications to IST

Along this chapter we sketch some basic ideas involving applications of Basic Differential Topology to the four areas of the part II of these notes, involving

1. *Computational Mechanics of Continuous Media* B_1
2. *Computer Vision* B_2
3. *Robotics* B_3
4. *Computer Graphics* B_4

4.2.8. Some applications to Economic Theory

In this last chapter we give some basic consequences of Basic Differential Theory to Economic Theory which is organized around four areas

1. *Microeconomics*
2. *Macroeconomics*
3. *International Economy*
4. *Financial Economics*

4.3. Algunos retos seleccionados

Los retos más difíciles son los mencionados en la introducción del capítulo. Así p.e. el modelado de un órgano interno complejo (corazón, pulmones, cerebro) o de nubes en movimiento, presenta una complejidad aún mayor que la de sistemas de partículas en Física Teórica. Una razón procede de la imposibilidad de repetir bajo condiciones controladas de Laboratorio el comportamiento de las diferentes componentes que aparecen y las patologías asociadas a las interrelaciones entre diferentes componentes. Algunos métodos y herramientas topológicas han sido introducidas en los módulos A_{25} (Three-Manifolds) y A_{26} (Four-Manifolds) de A_2 (Topología Algebraica y Geométrica). Sin embargo, aún no se dispone de modelos satisfactorios para los fenómenos mencionados.

Por ello, en esta subsección nos limitamos a modelos simplificados de objetos o de fenómenos locales procedentes de otras áreas de Matemáticas o de Física Teórica. En las subsecciones anteriores han aparecido una gran cantidad de retos motivados por desarrollos en Física e Ingeniería, que se desarrollan con más detalle en las materias B_j de la parte II de estos apuntes. En esta subsección se recupera un enfoque más “teórico”, comentando aspectos vinculados a materias de la parte I.

4.3.1. Deformaciones. Invariantes topológicos. Nudos y Túneles.

Desde el punto de vista relativo, la clasificación topológica de variedades se aborda en términos de la clasificación inmersiones y embebimientos. Los casos más sencillos corresponden a los embebimientos de S^1 en el plano $\mathbb{R}^2$ que da lugar al estudio de *curvas simples* (crucial para problemas de Reconocimiento en Visión Computacional usando siluetas) o bien en el espacio $\mathbb{R}^3$ que da lugar a la *Teoría de Nudos*.

Se comentan las herramientas básicas (métricas, topológicas, algebraicas) y se muestran algunas aplicaciones. Un caso bastante más complicado corresponde al estudio de “túneles” para variedades 3-dimensionales en $\mathbb{R}^4$ dados como el complementario de un pequeño entorno tubular simple (sin autointersecciones) de una curva. Este caso muy simple de describir pero bastante difícil de resolver está relacionado con el programa de geometrización de W.Thurston planteado a principios de los ochenta.

4.3.2. Transversalidad en otras categorías

La insistencia en cuestiones de transversalidad en el marco diferenciable, está justificada por los resultados de densidad presentados en el capítulo 2. Sin embargo, la extensión de esta idea en otros contextos geométricos (como los correspondientes a la Geometría Algebraica o Analítica) presenta alguna dificultad adicional.

Una estrategia complementaria consiste en introducir diferentes tipos de acciones (algebraicas o analíticas) que permitan demostrar resultados de transversalidad genérica para órbitas de baja codimensión

El problema resulta más complicado en la categoría de espacios funcionales y operadores definidos sobre dichos espacios. En este caso, la construcción de fibraciones de k -jets asociadas a los espacios de secciones $\Gamma(U, E|_U)$ de una fibración $\xi = (E, \pi, B)$ presenta una dificultad mayor que requiere usar elementos de Álgebra Multilineal y algunos rudimentos de Análisis Global.

La aplicación de este enfoque a la teoría de operadores diferenciales sobre diferentes tipos de espacios funcionales es un tópico que se inicia a finales de los sesenta y continúa hasta ahora. El interés geométrico de este tipo de problemas radica en que dichos espacios son el soporte donde se lleva a cabo diferentes problemas de optimización vinculados a la minimización de funcionales de tipo integral.

4.3.3. Estructuras simpléctica y de contacto sobre espacios

Desde principios del s.XIX, la formulación geométrica de la Mecánica Analítica se ha llevado a cabo en términos de las Geometrías Simpléctica (Lagrange) en dimensión par ó de Contacto (Legendre) en dimensión impar.

En términos algebraicos se caracterizan por la conservación de una 2-forma simpléctica ω con forma canónica $\sum_i dq_i \wedge dp_i$, ó de una 1-forma de contacto α con forma canónica $\sum_i p_i \wedge dq_i$ verificando que $\omega = -d\alpha$. Ambas formas están definidas sobre el espacio total del fibrado cotangente Ω_M^1 sobre una variedad suave M que, por definición, es el dual τ_M^* del fibrado tangente $\tau_M = (TM, \pi, M)$ sobre M .

Las *lagrangianas* (resp. *legendrianas*) son, por definición, las subvariedades integrales de dimensión máxima para la 2-forma ω (resp., la 1-forma α). Dichas subvariedades proporcionan el soporte para representar la propagación de frentes de onda asociados a las ecuaciones estructurales de Hamilton-Jacobi en ausencia de fuerzas externas.

La proyección de dichas subvariedades sobre el espacio base M del fibrado da lugar a singularidades cuya clasificación ha sido completada por V.I. Arnold y su escuela a mediados de los ochenta. Los casos más “simples” aparecen en relación con la clasificación de cáusticas; éstas se definen como las envolventes de las normales a la variedad que representa el borde del objeto sobre el que incide el frente de ondas. Los primeros estudios sobre cáusticas se deben a Newton y Huygens.

Las estructuras simpléctica y de contacto son dos construcciones universales que se pueden realizar sobre variedades suaves de dimensión par e impar. Interesa extender estas construcciones al caso de variedades topológicas más generales, incluyendo la presencia de singularidades. En el módulo 3 (resp. 4) se desarrolla la clasificación de singularidades de gérmenes de funciones $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ (resp.

aplicaciones $f : N \rightarrow P$) para los casos diferenciable $\mathcal{E}$ y analítico $\mathcal{O}$. El álgebra Local básica proporciona un lenguaje común para tratar de manera unificada los casos diferenciable y analítico en cualquier dimensión. Veámoslo con más detalle:

Se denota mediante $\mathcal{E}_n$ (resp. $\mathcal{O}_n$) al anillo local de gérmenes de funciones diferenciables $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. analíticas $f : \mathcal{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$). Dicho anillo local tiene a $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ como ideal maximal, donde $(x_1, \dots, x_n)$ denota un sistema de coordenadas locales en el punto. Por ello, el anillo local de gérmenes de funciones hereda una estructura natural de álgebra graduada como suma directa $\bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{m}^k / \mathfrak{m}^{k+1}$ donde cada sumando representa las formas homogéneas de grado exactamente igual a k en las coordenadas locales $(x_1, \dots, x_n)$ de cada punto de la variedad.

La expresión de cualquier germen de aplicación f en términos de sus componentes $(f_1, \dots, f_p)$ permite dotar al conjunto de aplicaciones diferenciables $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ (resp. analíticas $f : \mathcal{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$) de una estructura de $\mathcal{E}_n$ -módulo al que se denota como $\mathcal{E}(n, p)$ (resp. $\mathcal{O}(n, p)$) que es isomorfo de forma natural a la suma directa $\mathcal{E}_n^p := \mathcal{E}_n \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_n$ (resp. $\mathcal{O}_n^p := \mathcal{O}_n \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_n$) de p copias de $\mathcal{E}_n$ (resp. $\mathcal{O}_n$).

La mayor parte de las singularidades no son estables por deformación, lo cual da lugar a una evolución morfológica que se traduce en cambios cualitativos que afectan a aspectos funcionales del sistema. La descripción del espacio universal (unfolding) de las deformaciones genéricas para $f \in \mathcal{E}_n = \mathcal{E}(n, 1)$ (resp. $f \in \mathcal{O}_n = \mathcal{O}(n, 1)$) se lleva a cabo en el módulo 3. La descripción de las deformaciones genéricas para gérmenes de aplicaciones $f \in \mathcal{E}(n, p)$ (resp. $f \in \mathcal{O}(n, p)$) se lleva a cabo en el módulo 4.

La Teoría de Bifurcación proporciona un marco general y una jerarquía natural para la clasificación de los diferentes fenómenos vinculados a sistemas dinámicos de tipo conservativo; es decir, que “derivan de un potencial” que denotamos mediante ∇f (resp. Df) para gérmenes de funciones (resp. aplicaciones).

Un primer *reto* consiste en estudiar la topología de los fenómenos de bifurcación asociados a Lagrangianas o Legendrianas correspondientes a funcionales más generales (diferentes tipos de curvatura, p.e.) presenta aún muchos aspectos desconocidos. Otros retos más complicados que requieren elementos adicionales de sistemas dinámicos (módulo 6) están relacionados con el acoplamiento de sistemas con diagramas de bifurcación conocidos.

4.3.4. Extendiendo la aplicación momento

Una gran parte de fenómenos que ocurren en la Naturaleza presentan diferentes tipos de simetrías (continuas o discretas) que pueden manifestarse como asociadas a algún tipo de C^r -estructura geométrica; los casos más relevantes corresponden a las Geometrías diferenciable $r = \infty$, algebraico $r = \text{rat}$ ó analítico $r = \omega$. El tratamiento invariante de estas propiedades se puede describir en

términos puramente topológicos ($r = 0$ ó infinitesimales).

La conservación de alguna “cantidad” geométrica (longitud, ángulo, área, volumen o algebraica (formas cuadráticas o bilineales) se expresa en términos de su invariancia con respecto a un grupo clásico G que es un subgrupo o un grupo cociente del $GL(n; \mathbb{K})$. El primer caso clásico corresponde al funcional de energía total de un sistema (newton) que se interpreta como un funcional con una componente lineal y otra cuadrática sobre el fibrado tangente τ_M de una variedad M .

El enfoque basado en la energía total de un sistema se extiende a otros funcionales Lagrangianos asociados a principios de tipo variacional como los correspondientes a funcionales de curvatura sobre el espacio de conexiones sobre un fibrado principal. Este enfoque se desarrolla al final del módulo 2.

Para resolver los funcionales integrales mencionados, es conveniente adoptar un enfoque basado en la identificación de simetrías locales. Además de evitar una casuística descomunal, este enfoque permite re-introducir una formulación invariante (independiente de la localización del observador p.e.).

La *Aplicación Momento* proporciona un caso completamente general que es compartido tanto por la Mecánica Clásica tradicional, como por Teorías de tipo cuántico.

4.4. Referencias

A lo largo de la introducción a la Topología Diferencial se han incluido unas cuantas referencias a algunos de los artículos más significativos en relación con los tópicos presentados. En esta subsección “sólo” se comentan referencias bibliográficas que se han adoptado como las fuentes más frecuentes para el desarrollo de los capítulos del módulo. Obviamente, es realmente difícil ser original en la exposición de los aspectos básicos de la materia. La originalidad, caso de haberla, está más bien en las aplicaciones propuestas.

4.4.1. Referencias básicas para el módulo 1

Los manuales más próximos al enfoque geométrico de la Topología Diferencial que se desarrolla en este módulo son:

[Bro82] T.Bröcker and K.Jänich: *Introduction to differential topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982

[Gui74] V. Guillemin and Pollack: *Differential Topology*, Prentice Hall 1974.

[Mil97] J Milnor: *Topology from the Differentiable Viewpoint* (rev. ed.) Princeton University Press, 1997.

[Rol76] D Rolfsen: *Knots and Links*. Publish or Perish, 1976. Recently reprinted by the AMS.

4.4.2. Referencias complementarias

Otros manuales de gran interés y que se utilizan también en otros módulos más avanzados son:

- [Bre93] G.E.Bredon: *Topology and Geometry*, Springer-Verlag 1993.
- [Gam91] R.V.Gamkrelidze (ed.): *Geometry I*, Enc. of Math. Sciences, Vol. 28, Springer-Verlag, 1991.
- [Hir94] M.W. Hirsch: *Differential Topology* (corr reprint of the 1976 ed), GTM 33, Springer-Verlag, 1994.
- [Mil63] J Milnor: *Morse Theory*. Ann. of Math Studies 51. Princeton Univ. Press, 1963.
- [Nov96] S.P.Novikov (ed.): *Topology I*, Enc. of Math. Sciences, Vol. 12, Springer-Verlag, 1996

Para algo más que una introducción histórica y aplicaciones a la Física ver (de gran utilidad también para el módulo 2)

- [Die89] J.Dieudonné: *History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*. Birkhäuser, 1989.
- [Nak90] M.Nakahara: *Geometry, Topology and Physics*, Adam Hilger, 1990.

4.4.3. Referencias para aplicaciones en Ingeniería

Sólo se incluyen las referencias bibliográficas que tienen un carácter más matemático. De forma intencionada no se han incluido aspectos computacionales; para estos últimos, ver el módulo B_{13} (Computational Differential Topology) en la materia B_1 (Computational Mechanics). Asimismo, tampoco se han incluido los desarrollos más específicos relacionados con aplicaciones de la TD a Robótica B_2 , Visión Computacional B_3 ó Informática Gráfica B_4 .

- [Guc83] J.Guckehheimer and P-Holmes: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
- [Cas87] J.Casti: *Linear Dynamical Systems*, Academic Press, 1987.
- [Nic86] J.Nicolis: *Dynamics of Hierarchical Systems*, Springer-Verlag, 1986
- [Tan81] A.Tannebaum: *Invariant and Systems Theory: Algebraic and Geometric Aspects*, Springer-Verlag, LNM 845, 1981.

4.4.4. Referencias para aplicaciones en otras Ciencias

Sólo se consideran algunas referencias clásicas relacionadas con aspectos biológicos y químicos vinculados a la Topología Diferencial, omitiendo los tópicos relacionados con ANN y sus extensiones.

- [Dem84] J.Demongeot, E.Goles and M.Tchuente, eds: *Dynamical Systems and Cellular Automata*, Academic Press, 1985.

- [Fis85] P.Fischer and W.Smith (eds): *Chaos, Fractals and Dynamics*, Marcel Dekker, 1985
- [Hop79] F.Hoppenstadat (ed): *Nonlinear Oscillations in Biology*, Amer. Math Soc, Providence, R.I., 1979.
- [Nic89] G.Nicolis, and I.Prigogine: *Exploring complexity: An introduction*. W. H. Freeman, 1989.
- [Ros79] S.Rose: *The Chemistry of Life*, Penguin, London, 1979.
- [Smi82] J.M.Smith: *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge, Univ. Press, 1982.