A310 Introducción a Curvas Algebraicas

Javier Finat

Índice

Notas previas: Estas notas corresponden a una introducción al Capítulo 0 del módulo A_{31} (Curvas Algebraicas) de la asignatura A_3 (Geometría Algebraica y Analítica). Desde el punto de vista matemático, es necesario tener algunos conocimientos de Álgebra Básica y Geometría Proyectiva.Se incorporan nociones básicas de Topología Algebraica y Álgebra Conmutativa para hacer más autocontneido el texto.

Como es habitual, el material está organizado en cuatro secciones. Cada sección contiene una lista de ejercicios para la autoevaluación de la comprensión del material. Las subsecciones o párrafos marcados con un asterisco (*) presentan una mayor dificultad y pueden omitirse en la primera lectura.

0.1. Prefacio del capítulo B310

Las curvas algebraicas son un tópico muy antiguo. A nivel básico es difícil realizar una contribución relevante. Por lo tanto, no pretendo que el contenido sea original. Las primeras menciones de cónicas (como secciones de un cono) aparecen hace ya 2400 años. La introducción de las coordenadas cartesianas en el siglo XVII fue clave para desarrollar un "diccionario≫" entre figuras geométricas y expresiones algebraicas.

La introducción de coordenadas permitió una comprensión más profunda de los lugares geométricos. La geometría cartesiana sentó las bases para numerosos desarrollos aislados relacionados con configuraciones de puntos y líneas, y sus aplicaciones mecánicas y ópticas a finales del siglo XVII y principios del XVIII.

Los primeros estudios sistemáticos más allá de las cónicas planas se centraron en el estudio de las curvas de tercer grado, realizado esencialmente por I. Newton desde un enfoque métrico, si bien su clasificación resulta redundante para muchos tipos cuando se adopta un enfoque geométrico. Estos studios iniciales abren la puerta para la clasificación de las curvas en implícitas de grado bajo que se aborda a principios del siglo XIX.

(*) Las curvas algebraicas muestran ciertas relaciones entre las curvas planas y espaciales que facilitan la comprensión de las "curvas evolutivas" vinculadas a problemas mecánicos u ópticos. El "control" de estas curvas requiere una parametrización efectiva ligada a características del movimiento o de la interacción descrita en términos de EDP (KdV o KP en frentes biparamétricos d ondas).

La *parametrización de curvas algebraaicas* por funciones regulares (polinomios o funciones holomorfas) con diferenciales l.i. plantea problemas para curvas no-racionales desde principios del siglo XIX. En el caso complejo, las funciones elípticas e hiperelípticas requieren herramientas adicionales asociadas a funciones casi-periódicas sobre retículos $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$. Los primeros estudios de tipo *local* se deben a Jacobi quien introdujo las *funciones theta* (exponenciales a lo largo de las "líneas" que soportan el retículo) para obtener una parametrización. La primera *extensión global* fue llevada a cabo por B.Riemann usando la topología de la superficie real subyacente.

La parametrización explicita (racional o trascendente) permite abordar el ajuste de "formas" mediante polinomios. Este ajuste se puede interpretar en términos de *deformaciones de curvas* de grado $d \leq 3$, conectando con fenómenos de propagación. En particular, las "curvas evolutivas" fueron inicialmente representadas por familias uniparamétricas ("deformaciones" de formas canónicas). Su extensión a curvas de grado $geq4$ se desarrolló más de un siglo después, usando θ-funciones para curvas elípticas e hiperelípticas [1]

Las curvas planas algebraicas se describen de formaimplícita mediante la anulación de un polinomio $f(x, y) = 0$ de dos variables con coeficientes en un cuerpo k. Las curvas alabeadas algebraicas en un espacio de dimensión n se definen localmente mediante $n - 1$ polinomios funcionalmente independientes

[1] Para una presentación reciente de estos aspectos clásicos, véase [Bri86].

en cada punto (es decir, sus diferenciales son l.i. en cada punto). El ejemplo básico es al curva racional normal $\mathcal{C}_d$ de grado d en $\mathbb{P}^d$ definida por la imagen de la d-ésima inmersión de Veronese de grado d de la recta proyectiva dada como:

$$V_{1,d} : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^d \quad | \quad [x_0 : x_1] \mapsto [x_0^d : x_0^[d-1]x_1 : \ldots : x_0 x_1^{d-1} : x^d]$$

que se expresa en el espacio de llegada $\mathbb{P}^d$ con coordenadas homogéneas $z_0 : z_1 : \ldots z_d]$ por la anulación de los menores de tamaño 2×2 de la matriz perssimétrica

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & \ldots z_{d-1} \\ z_1 & z_2 & \ldots z_d \end{pmatrix}_2 \quad \text{es decir} \quad \frac{z_0}{z_1} = \frac{z_1}{z_2} = \ldots \ \frac{z_{d-1}}{z_d}$$

que corresponde a la intersección de cuádricas $Q_{ij} \subset \mathbb{P}^d$ definidas por

$$z_i z_{j+1} - z_j z_{i+1} = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq i < j \leq d-1.$$

Este ejemplo muestra que no es posible definir una curva únicamente con $n-1$ polinomios. El caso más sencillo es la curva racional normal de grado 3 en $\mathbb{P}^3$ dado como la inteersección $Q_{12} \cap Q_{13} \cap Q_{23}$ de tres cuádricas en $\mathbb{P}^3$;; en este caso $Q_i \cap Q_j = \mathcal{C}_3 \cup \ell_{ij}$ donde ℓ_{ok} son 3 rectas con intersección vacía. .Este ejemplo se extiende de forma natural a cualquier curva racional normal de grado d. Estas curvas son las "piezas básicas" para construir "snakes" (curvas racionales con pesos) y las variedades asociadas como B-splines (producto de dos nakes) y T-splines (producto de 3 nakes) [2]

En la Geometría Elemental las curvas algebraicas se consideran inicialmente reducidas (todas sus componentes tienen multiplicidad igual a uno) e irreducibles (solo tienen una componente conexa). Ambas restricciones se eliminan en Geometría Algebraica,. Así, un punto doble (dado por $x^2 = 0$ en la recta $y = 0$) o dos puntos simples en una recta ($x = \underline{+}a$ en la recta $y = 0$) son ejemplos de cónicas no reducidas ó no conexas, respectivamente, en el eje Ox.

En presencia de singularidades, la irreducibilidad local no se cumple: cada rama se considera como una componente desde el punto de vista analítico local. En particular, un nodo ordinario $y^2 = \lambda x^2 + x^3$ o una cùspide ordinaria $y^2 = x^3$ ("especialización" para $\lambda = 0$) tiene dos componentes analíticas en un pequeño entorno del punto singular.

Estas ideas se extienden de formanatural a la Geometría Algebraica de Variedades utilizando métodos algebraicosy trascendentes(vinculados a integrales sobre formas definidas sobre variedades). La unificación entre diferentes aproximaciones ha motivado el desarrollo de un lenguaje algebraico cada vez más abstracto para englobar objetos y resultados procedentes de áreas muy diversas.

Por ello, es conveniente tener siempre presente el caso 1-dimensional. En el estudio de curvas algebraicas con métodos algebraicos confluyen el Análisis Matemático, la Topología de superficies reales, la Teoría de Números, el estudio de

[2] Detalles en el módulo B_{41} (Diseño Geométrico) de B_4 (Informática Gráfica).

polinomios y su lugar de anulación. Las nociones de ideal, anillo y módulo fueron introducidas por la Escuela Alemana (Brill, Dedekind, Kronecker, Noether, Weber) en la segunda mitad del siglo XIX.

El enfoque algebraico proporciona la primera unificación de los métodos utiilizados en Geometría Algebraica y en Teoría de Números. El Teorema de los Ceros y el Teorema de la Base de Hilbert ocupa un lugar central en la fundamentación de la Teoría de Variedades y los desarrollos que han tenido lugar sobre todo a lo largo del s.XX. Permite establecer un diccioinario entre propiedades básicas de tipo algebraico y geométrico-

A pesar de su indudable importancia para resolver problemas de invariantes y de clasificación, este enfoque relega a un segundo plano las profundas conexiones con el Análisis Complejo y con la Topología Algebraica. Como consecuencia aparece una parcelación del saber que es ajena al desarrollo histórico de la Geometría Algebraica y sus relaciones con otras áreas de conocimiento. Un objetivo de la algebrización de la Topología (A.Weil, 1950) es proporcionar un marco para recuperar esas relaciones.

La Geometría Algebraica surge inicialmente como una extensión de los resultados conocidos para cónicas desde la Antigüedad. Una primera aproximación se lleva a cabo en términos del grado d de la curva. El primer caso corresponde a $d = 2$. Una cónica regular general se determina a partir de 5 puntos (o , dualmente, 5 líneas) en posición general en $\mathbb{P}^2$, resolviendo un sistema homogéneo de 5 ecuaciones con 5 incógnitas (6 salvo factor de proporcionalidad) en $\mathbb{P}^5$.

La primera clasificación de las *cúbicas planas* se lleva a cabo por I.Newton (1642-1717) quien, utilizando propiedades métricas y proyectivas da un total de 72 tipos. Los métodos de Geometría Proyectiva redujeron el número de tipos a 3 en $\mathbb{CP}^2$. La introducción demétodos trascendentes de 2 tipos: racionales vs irracionales. La clasificación birracional descompone el segundo tipo en elípticas e hiperelípticas.

Así, p.e. en $\mathbb{A}^2$. una cúbica plana se representa como una combinación lineal

$$Ax^3 + Bx^2y + Cx^2 + Dxy^2 + Exy + Fx + Gy^3 + Hy^2 + Iy + J = 0$$

de los 10 monomios no-homogéneos de grado ≤ 3. Para determinar los diez coeficientes (en realidad, 9 salvo factor de proporcionalidad), se introducen 9 puntos $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$ para $1 \leq i \leq 9$ en "posición general" lo cual da un sistema de 9 ecuaciones en 9 incógnitas $A, \ldots, J$. La resolución de este sistema require invertir matrices de tamaño 9×9, algo que va más allá de la capacidad de ordenadores concencionales. La versión homogénea de esta construcción se formula en términos de

$$\sum_{0 \leq i_k \leq 3} a_{i_0 i_1 i_2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{j_2} = 0 \qquad i_0 + i_1 + i_2 = 3$$

pero la dificultad es la misma. A lo largo del siglo XVIII se desarrollan diferentes sistemas mecánicos para el trazado de curvas cúbicas [3]. Sin embargo, estas descripciones carecían de una principio general aplicable a curvas de grado arbitrario (Euler). En particular, a medida que aumenta el grado, la resolución exacta efectiva por coeficientes indeterminados para polinomios de grado d se convierte en irrealizable desde el punto de vista computacional. Dos estrategias alternativas consisten en

- desarrollar (y clasificar) parametrizaciones locales (algebraicas o trascendentes) que conducen al enfoque birracional basado en cuerpos de funciones, que predomina desde Riemann. Este enfoque es intrínseco, si bien la identificación de la parametrización más adecuada no es elemental.
- calcular "puntos especiales" (singularidades) que imponen "restricciones adicionales" para disminuir el número de "grados de libertad" de la curva, que conduce al enfoque basado en "cuvas adjuntas" (Casteñnuevo) y a la descripción de las curvas en términos de sistemas lineales que pasan por un conjunto finito de puntos (regulares vs singulares) con multiplicidad pre-asignada.

La idea intuitiva de "serie lineal" aparece al extender la parametrización de una línea a un curva, calculando las intersecciones $C \cap \ell_y$ con una familia uniparamétrica de rectas ℓ_t que pasan por un punto $\mathbf{p}$. En particular C puede ser una recta ℓ_0, proporcionando así una parametrización de ℓ_0. Un ejemplo menos trivial está dado por la polar de una cuerva con respecto a los puntos situados sobre una recta (resp. curva) que da lugar a un pencil (resp. net) de curvas. Otros casos sencillos son:

- El haz de rectas $\{\ell_t\}_{t\in\mathbb{A}^1}$ a través de $\mathbf{p} \in C_2$ proporciona una parametrización de C (repasar la generación proyectiva de las cónicas).
- La curva nodal $y^2 = x^2(x+1)$ presenta la misma propiedad tomando $\mathbf{p}$ como el nodo.
- Los haces de circunferencias que pasan por el origen con centro en un punto de $(x-y)(x+y)=0$ que parametrizan la lemniscata de Bernouilli [Sha76].

Sin embargo, para curvas de grado $d \geq 3$ aparecen otros tipos algebraicos de intersección que ya no se pueden parametrizar por (cuerpos de funciones sobre) la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ (curvas "racionales"), aunque sí por polinomios sobre curvas trascendentes. Aunque no exista un Teorema de la Función Implícita, sí se pueden considerar diferenciales l.i. sobre la curva, cuyas integrales proporcionan una parametrización local sobre la curva. Esta idea se debe originalmente a Jacobi, quien introdujo las funciones θ para parametrizar curvas elípticas. La sistematización algebraica se debe a Brill y Noether.

[3] https://sites.google.com/site/tesislinkages/evolucion-historica/histora4

(*) Una *estrategia alternativa* consiste en calcular de forma *aproximada* (en lugar de exacta) las raíces de un polinomio. En el caso *real*, el primer algoritmo general se debe a Sturm (1835), quien introducjo una colección de desigualdades polinomiales (método sugerido inicialmente por Sylvester) para acotar el rango de variaiblidad de las raíces de polinomios en una sola variable.

(*) Este método semi-algebraico fue extendido a continuación por Hermite para el caso de varias variables. La evaluación de los signos de las derivadas sucesivas de los polinomios que definen las desigualdades, permite caracterizar las regiones en las cuales el sistema de inecuaciones tiene un número prefijado de soluciones (complementario del lugar discriminante [4]. Actualmente, forman parte de los métodos que aparecen en las *bases de Groebner* y que utilizan los signos de las derivadas de los polinomios en las soluciones.

0.1.1. Complementos de Geometría Proyectiva

La sistematización de la Geometría Proyectiva Lineal llevada a cabo por la escuela Francesa a principios del siglo XIX culmina con el tratado de Poncelet (1821). Los resultados obtenidos proporcionan un paradigma que da lugar a desarrollos para el análisis de variedades algebraicas de grado bajo, con una especial atención a curvas inmersas en $\mathbb{P}^2$ y superficies inmersas en $\mathbb{P}^3$.

Las dos herramientas fundamentales de la Geometría Proyectiva están ligadas a las operaciones de de proyectar sobre un subespacio y cortar por subespacios. La "genericidad" juega un importante papel en ambos casos. Los análogos en el marco diferenciable corresponden a submersiones e inmersiones cuyas propiedades se han descrito en A_{12} (Linealización). Lamentablemente, en el marco algebraico o analítico la hipótesis de 'suavidad" (smoothness) no se verifia. Por ello, estas operaciones adoptan diferentes formas hasta la actualidad.

En las Escuelas Alemana y Francesa predomina inicialmente el enfoque sintético (basado en configuraciones de puntos y rectas), es decir, independiente de sistemas coordenados (Chasles en Francia; Steiner y Von Staudt en Alemania). Este punto de vista le da cierta independencia con respecto a argumentos basados en expresiones analíticas. De forma complementaria en las Escuelas Italiana (Bertini, Cremona, C.Segre, Veronese) y Británica (Cayley, Salmon), predomina el enfoque analítico.

La descripción anterior no se debe tomar en sentido estricto, pues Pluecker y, más adelante, Hurwitz y Klein utilizan diferentes técnicas basadas en propiedades de funciones analíticas y funcionales integrales definidas sobre curvas algebraicas. Una presentación de los métodos analíticos de la Geometría Proyectiva con breves incursiones a variedades no-lineales de grado bajo se puede ver en [Sem52] [5]. El tratamiento más completo de Curvas Algebraicas Planas hasta mediados del siglo XX se puede ver en [Coo59].

[4] Un caso particular corresponde a la localización aproximada con respecto a sistemas de rectas en un plano afin cuya versión computacional se desarolla en B_{11} (Geometría computacional).

[5] J. Semple and G. Kneebone: *Algebraic Projective Geometry*. Oxford Univ. Press, 1952.

- El *enfoque sintético* culmina en la obra de H.Schubert (1879) quien utiliza argumentos topológicos y de Geometría Sintética para la determinación del número de hipersuperficies de grado bajo con condiciones prefijadas (Geometría Enumerativa). No obstante, debe señalarse que los argumentos sintéticos de "posición general" y topológicos relativos al análisis de "casos degenerados" (para contar propiamente las soluciones con su multiplicidad correspondiente) utilizados frecuentemente no encuentran una formulación rigurosa hasta mucho tiempo después. Este trabajo es impulsado por S.L.Kleiman y W.Fulton a partir de 1977 en el marco de la moderna Teoría de Intersección [Ful84].
- El *enfoque analítico* utiliza expresiones explícitas para deducir propiedades de las variedades algebraicas sin hacer uso del formalismo algebraico desarrollado inicialmente por la Escuela Alemana desde la segunda mitad del siglo XIX. Esto da lugar a una elevada casuística donde resulta difícil identificar el rigor de las demostraciones. Un gran número de resultados de este enfoque se puede ver en los 6 volúmenes de Baker [Bak61] [6] ó el compendio más reciente [Sem49] [7].

En ambos enfoques persiste la duda sobre la validez de los argumentos topológicos relativos a "degeneraciones" que pueden presentar las familias de curvas o, con más generalidad, de variedades algebraicas. El "control" de estas posibles degeneraciones se lleva a cabo en términos de "invariantes" locales. El desarrollo de las herramientas d la Topología Algebraica y Geometríca A_2 por un lado y del Álgebra Local (Conmutativa y Homoloógica) hasta mediados del siglo XX motivan el lanzamiento del Programa de Algebrización de la Topología (A.Weil) que se aborda en el parágrafo §0,1,3

A pesar de las deficiencias señaladas, el enfoque basado inicialmente en variedades inmersas en un espacio proyectivo $\mathbb{P}^r$ muestra una riqueza excepcional que afecta tanto a los métodos (secciones y proyecciones), como a las transformaciones "naturales" entre objetos:

- Las *operaciones básicas* basada en proyecciones sucesivas o secciones se reformulan en términos de morfismos propios entre variedades y criterios de amplitud para evaluar restricciones sobre suvarieades (eventulamente con componentes inmersas). La genericidad se describe en términos de un abierto para la elección de centros de proyección o de subespacios "transversales¡¡.
- Las *transformaciones proyectivas*, además de la razón doble, preservan el grado o la clase, p.e.. Se utilizan para identificar formas canónicas para las que resulta más fácil calcular invariantes. A partir de mediados sel siglo XIX se reemplazan por *transformaciones birracionales* que preservan el cuerpo de funciones racionales $k(X)$ definidas sobre una variedad X (en particular, el género).

[6] H.J.Baker: *Principles of Geometry*, f. Ungar, New York, 1961
[7] J. Semple and L. Roth: *Introduction to Algebraic Geometry.* Clarendon Press, 1949.

En la Geometría Proyectiva las transformaciones lineales están inducidas por la acción del proyectivizado $\mathbf{P}GL(n+1;\mathbb{K}) := GL(n+1;\mathbb{K})/\mathbb{K}^*$ del grupo lineal general- Facilitan los argumentos basados en condiciones de incidencia (resp. tangencia) para configuraciones genéricas de puntos (resp. líneas tangentes) para curvas $C \subset \mathbb{CP}^2$ en el plano proyectivo complejo.

(*) En el caso del plano afín $\mathbb{A}^2$, la versión afín $GL(2;\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ del grupo de las colianeaciones $\mathbb{P}GL(2;\mathbb{R})$ se reemplaza por el grupo especial lineal o unimoudlar (Moebius). La versión discreta $SL(2;\mathbb{Z})$ es clave para el estudio de las curvas elípticas (en términos de funciones doblemente periódicas) y su extensión a las hiperelípticas (funciones múltipelmente periódicas).

Las *transformaciones birracionales* (como extensión de las birregulares) sólo conservan propiedades vinculadas al cuerpo $k(X)$ de funciones racionales sobre X, incluyendo las asociadas a las diferenciales meormorfas. Estas últimas permiten construir el divisor canónico K_X (y sus potencias tensoriales) como el invariante fundamental para clasificar variedades. Un "ejemplo" de transformaciones birracionales viene dado por la *transformación de Cremona*:

$$\mathbb{P}^2 - \rightarrow \mathbb{P}^2 \ \mid \ [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1] \ = \ [\frac{1}{x_0} : \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2}]$$

(triple inversión) con la extensión del símplice estándar (generado por tres puntos de fuga estándar) como "lugar fundamental" para la correspondencia [8]. Las transformaciones cuadráticas ordinarias son una versión afín de las de Cremona.

La Geometría asociada a frentes de ondas se basa en el estudio de las envolventes de las tangentes (evolventes) y las normales (evolutas). habitualmente, presentan singularidades que "evolucionan" dependiendo de los parámetros del sistema. La versión local de las trasnformaciones de Creoman permite interpretar visualmente la resolución de las singularidades más simples [9]

Asociadas a estas construcciones se tienen asimismo otros ejemplos interesantes de transformaciones birracionales $\varphi : C_1 \rightarrow C_2$ (que conectan con aspectos básicos de la Geometría Proyectiva) inducidas por

- la aplicación de *dualidad* $C \rightarrow C^\nu$ definida como el cierre el grafo de $\mathbf{p} \rightarrow t_{\varphi(\mathbf{p})}C \in \mathcal{C}^\nu$ proporciona el punto de partida para un enfoque geométrico de la Cinemática (evolución espacio-temporal de primer orden).
- la aplicación $\psi : C \rightarrow C^e$ (evoluta) en Geometría Diferencial que a cada punto $\mathbf{p} \in C$ le lleva en el centro de curvatura $\mathbf{o_p}$. La curvatura expresa propiedades de las componentes "normales" vinculadas a la Geometría Extrínseca. Por ello, proporciona el punto de partida para la dinámica (interacción con el entorno).

[8] Este "ejemplo" es clave para gestionar el lugar de indeterminación en Reconstrucción Triduimensional B_{22} en Visión Computacional $B2$ y en Navegación Automatica B_{32} en Robótica B_3.

[9] Este argumento se extiende de forma inmediata a transformación cúbica de Cremona (cuádruple inversión) con la extensión del símpllice estándar como lugar fundamental para la correspondencia de Cremona en $\mathbb{P}^3$

Las transformaciones birracionales permiten resolver singularidades y muestran diferentes modelos equivalentes de los mismos "objetos". Por ello, facilitan la puesta en correspondencia entre elementos geométricos (problema de clasificación), incluso en presencia de indeterminación ó de múltiples correspondencias. Por ello, proporcionan algunas de las herramientas fundamentales para los problemas de clasificación en Geometría Algebraica.

En parte II de estas notas las transformaciones birracionales se utilizan para:

1. Identificar simetrías infinitesimales (KdV) o simplificar sistemas de EDP no-lineales a formas más sencillas en Mecánica Computacional de Medios Continuos B_1
2. Suprimir la indeterminación en Reconstrucción 3D o para resolver ambigüedades en seguimiento de objetos móviles B_{23} o en Reconocjmiento de objetos B_{24} a partir de contornos en Visión Compjutacional B_2.
3. Gestionar mapas de visibilidad en presencia de oclusiones parciales, detección de eventos en mapas de perspectiva en Navegación Automática B_{32} en Robótica y automatización de Procesos B_3.
4. Facilitar el pegado de datos locales, propagar los datos en ausencia de ifnromación ó generar nueva información a partir de "modelos similares" en aplicaciones de la IA generativa a Informática Gráfica B_4.

Los métodos basados en transformaciones birracionales y en las operaciones proyectivas usuales ("cortar" y "proyectar") se aplican tanto a variedades particulares como a las dos líneas de trabajo de la Geometría Proyectiva Clásica relativas a *configuraciones de variedades* y al estudio de la *Geometría Extrínseca.*

0.1.2. Geometrías Intrínseca y Extrínseca

Empezamos recordando una distinción básica entre las geometrías intrínseca y extrínseca en GAGA:

- La *Geometría Intrínseca* es independiente de la inmersión, mientras que la Geometría extrínseca depende de la inmersión. El marco general para relacionarlas está dado por la "traslación" de los análogos de los fibrados tangente y normal al marco de la Geometría Algebraica. La geometría Intrínseca se expresa en términos de invariantes birracionales como el género en el caso de curvas, p.e.
- La *Geometría Extrínseca* concierne al estudio de las propiedades que dependen de la inmersión realizada (o asociadas a proyecciones sobre $\mathbb{P}^2$ ó $\mathbb{P}^3$). La Geoemtría Extrnseca se epresa en términos de "caracteres" asociados a algún tipo inmersión como el grado d, la clase d^ν, el número δ de puntos dobles ordinarios, el número κ de cúspides ordinarias (y sus duales).

Las relaciones entre ambas geometrías desemepñan un papel fundamental en GAGA y en Geometría Diferencial, así como sus aplicaciones a otras áreas. Algunas prolongaciones actuales de estas relaciones aparecen en Geometría Enumerativa, la Teoría Geométrica de Invariantes y la Teoría de Moduli.

En el caso de curvas, el grado d y la clase d^* (número de tangentes que se pueden trazar desde un punto exterior) son "caracteres" proyectivos extrínsecos. El género es un invariante birracional intrínseco, es decir, no depende de la inmersión de la variedad en un espacio amgiente.

Las *fórmulas de Pluecker* relacionan los caracteres extrínsecos y elos invairantes inrínsecos, en términos del número de nodos o de cúspides que aparecen para una curva proyectiva plana $C \subset \mathbb{P}^2$. Si $C \subset \mathbb{P}^2$ es una curva plana con δ nodos y κ cúspides ordinarias, la primera fórmula de Plucker es:

$$d^* = d(d-1) - 2\delta - 3\kappa \qquad (1)$$

donde los coeficientes de δ y κ corresponden a la "multiplicidad" con la que deben ser contados estos puntos. Si $\tilde{C}$ es un modelo no-singular de C, admite un embebimiento en $\mathbb{P}^3$ cuya imagen se denota meidante $\mathcal{C}$. Existe una proyección $\pi_{\mathbf{C}} : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2$ talq ue $\pi(\mathcal{C}) = C$.

- Los nodos o puntos dobles ordinarios corresponden a las rectas bisecantes $\overline{pq}$ a $\mathcal{C}$ que pasan por el centro de proyección $\mathbf{C}$ de π.
- Las cúspides ordinarias son la proyección de puntos de tangencia ordinaria a $\mathcal{C}$ de tangentes $t_p\mathcal{C}$que pasan por $\mathbf{C}$ y no cortan a ningún otro punto de $\mathcal{C}$

Los nodos ordinarios se visualizan en términos de las bisecantes que pasan por el centro $\mathbf{C}$ de una proyección central $\pi_{\mathbf{C}} : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2$. La variedad de secantes definida como el cierre de

$$\{\underline{x} \in \mathbb{P}^3 \ \mid \ \underline{x} \in \overline{pq} \quad \text{para } (p,q) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} - \Delta_{\mathcal{C}}\}$$

es irreducible y tiene dimensión 3. En particular, la restricción a una curva alabeada $\mathcal{C}$ de cualquier proyección central $\pi_{\mathbf{C}} : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2$ da lugar a un número finito de nodos sobre la curva plana $C = \pi_{\mathbf{C}}(\mathcal{C})$. Análogamente, la variedad de tangentes definida como el cierre de

$$T_p\mathcal{C} \ := \ \{\underline{x} \in \mathbb{P}^3 \ \mid \ \underline{x} \in t_p\mathcal{C} \quad \text{para algún } p \in \mathcal{C}\}$$

tiene dimensión 2. Por ello, siempre se puede elegir un centro de proyección $\mathbf{C} \in \mathbb{P}^3$ que no pertenezca a la variedad de tangentes (espacio total $T\mathcal{C}$ del fibrado tangente $\tau_{\mathcal{C}}$ en la terminología de la Geometría Diferencial). Obviamente, si el centro de proyección $\mathbf{C}$ se elige sobre rectas multisecantes o tangentes, aparecen puntos singulares con mayor multiplicidad que la correspondiente a nodos o cúspides ordinarios. La segunda fórmula de Pluecker expresa el dual κ^* dle númeor de cúspides en términosde los caracteres de de la curva original:

$$\kappa^* = 3d(d-2) - 6\delta - 8\kappa. \qquad (2)$$

La dualidad entre puntos y líneas del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ y su dual $(\mathbb{P}^2)^*$, da lugar a una expresión del grado en términos de la clase

$$d = d^*(d^*-1) - 2\delta^* - 3\kappa^*, qquad(3)$$

y ánalogamente, se tiene la expresión dual para la segunda fórmula de Pluecker dada por

$$\kappa = 3d^*(d^*-2) - 6\delta^* - 8\kappa^*. \qquad (4)$$

El *género* d de la curva es esencialmente el único invairante birracional. Inicialmente, se definió como la "deficiencia" de C dada por

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \delta - \kappa \qquad (5)$$

un entero positivo que se puede describir en términos duales como

$$g = \frac{1}{2}(d^*-1)(d^*-2) - \delta^* - \kappa^* \qquad (6)$$

Las relaciones entre caracteres extrínsecos d, δ, κ (o sus duales) y el invariante birracional g expresan relaciones másprofundas entre "ciclos" que son el sooporte de dichas "cantidades". En particular, expresarn la relación entre el lugar de ramificación $Ram(\pi)$ en el espaico de partida y su imagen como lugar discrimannt

Estas construcciones se trasladan de forma natural a morfismos(propios o dominantes) más generales $f : X \to Y$ entre variedades de la misma dimensión o, con más generalidad, a fibraciones algebraicas o analíticas. Todas eollas se engloban en el tópico de Fórmulas de Puntos Múltiples que se desarrolla en Geometría Enumerative A_{34} en el marco algebraico.

(*) El estudio de "familias" conexas de curvas de grado fijo d o con singularidades pre-asignadas en un espacio proyectiveo $\mathbb{P}^r$ debe incluir posibles "degeneraciones" y facilitar la "epsecialización" de un elemento "genérico" de la familia en curvas no-reducidas o que puedan presentar componentes inemrsas. Estos requrimientos moivan la introducción de

- La *variedad de Chow* $X_{d,r}$ de las curvas C en $mathbbP^r$ caracterizadas por tener intersección no vacía $L^{r-2} \cap C \neq \emptyset$ con la curva C para subespacios $L * r - 2$ de la Grasmanniana $Grass(r-2, r)$.
- El *esquema de Hilbert* $\mathcal{H}_{d,g,r}$ de las curvas de grado d y género g en $\mathbb{P}^r$ asociado a las curvas con la misma función de Hilbert-Samuel $p(n) = nd - g + 1$.

(*) Ambos “objetos” reproducen la complementariedad entre los enfoques extrínseco (la curva como variuedad de incidencia) e intrínseco (la curva como entidad abstracta). Los puntos de la variedad de Chow (representando curvas) ignoran la información sobre componentes 0-dimensionales de C incluyendo multiplicidad, puntos inmersos o esquemas no-reducidos. Sin embargo, proporcionan una parametrización en términos de los subespacios de codimensión 2 que cortan a C y que determinan un divisor Σ_C en la Grassmanniana $G = Grass(r-2, r)$. Por ello, son un múltiplo del divisor canónico K_G sobre la Grassmanniana; es deci, se expresan como la potencia d-ésima $\mathcal{O}_C(\Sigma_C)$ de la imagen recíproca de la clase del fibrado universal sobre G.

(*) Por el contrario, $\mathcal{H}_{d,gr}$ se describe en términos de las“ hipersuperficies” que contienen a la curva C (en lugar de los subespacios incidentes). Mientras que la varuedad de Chow “hereda” una “estratificación” procedente de la descomposición celular de la Grassmanniana (dual de la Grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^r$).

El esquema de Hilbert presenta una “estratificación inductiva” asociada a valores crecientes de n. Esta simple observación permite desarrollar argumentos de tipo inductivo sobre valores $m \leq n$. Por ello, $\mathcal{H}_{d,g,r}$ es más apropiado para describir posibles compactificaciones del espacio de moduli de curvas.

0.1.3. Aspectos topológicos y analíticos (*)

El modelo topológico de una curva proyectiva compleja algebraica C viene dado por una superficie compacta orientable, denominada superficie de Riemann S_C. La clasificación topológica de superficies compactas se ha realizado en los módulos A_{21} (Teoría de Homotopía) y A_{22} (Homología y Cohomología) de la materia A_2 (Topología Algebraica y Geométrica).

Cualquier variedad compleja es orientable. Por lo tanto, el modelo topológico de la superficie de Riemann viene dado por la suma conexa $\#^g\mathbb{T}^2$ de g toros bidimensionales $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (visualizados como la superficie borde de una rosquilla), donde $g \geq 0$ es el género topológico. En particular, para $g = 0$ se tiene la esfera ordinaria $\mathbb{S}^2$ (también llamada esfera de Riemann). Una ventaja de esta descomposición topológica es el desacoplamiento de los sistemas de ecuaciones y sus soluciones. La aprición de singularidades se traduce en “ciclos evanescentes” que se visualizan como “toros pinchados”.

Las propiedades generales de Topología General (conexividad, compacidad, separabilidad) se abordan usando la estructura topológica subyacente de las curvas algebraicas proyectivas complejas como superficies de Riemann compactas. El caso no-compacto se aborda en Variedades Afines, así como un estudio general de propiedades topológicas (Topología General) en el capítulo 5 de A_{32}.

Las cuestiones de separabilidad son más sensibles con respecto a la topología utilizada, pues la topología de Zariski es menos fina que la topología de los coeficientes. La aparición de componentes inmersas requiere introducir topologías más finas (Grothendieck) sobre el soporte subyacente (esquemas; verA_{33}).

Desde un punto de vista analítico intrínseco, la inmersión canónica $C \hookrightarrow \mathbb{C}^g$ viene dada por el *divisor canónico* K_C. Este divisor está generado por g diferenciales holomorfas l.i. en $M = \#^g \mathbb{T}^2$. Estas diferenciales "representan" (formas cerradas módulo exactas) a las $2g$ formas diferenciales reales. Son las duales de los generadores $a_1, b_1, \ldots a_g, b_g$ del primer grupo de homología).

(*) El divisor canónico K_C es el soporte para las clases de equivalencia lineal de divisores positivos de grado $g-1$ en el espacio proyectivo correspondiente $\mathbb{CP}^{g-1}$ (proyectivizado del espacio de formas diferenciales holomorfas). Así, la superficie de Riemann M asociada a la curva algebraica $\mathcal{C}$ se realiza como una subvariedad analítica irreducible $(g-1)$-dimensional, dada como una hipersuperficie irreducible $W_{g-1} \subseteq J(M$ del toro complejo $\mathbb{T}^g$ asociado al Jacobiano g-dimensional $Jac(M)$.

(*) De hecho, W_{g-1} es birracionalmente equivalente al producto simétrico $(g-1)$-ésimo M^{g-1}/S_{g-1}, es decir, el cociente de la superficie de Riemann M por el grupo simétrico en $g-1$ variables. Así, las clases de equivalencia lineal de divisores en el toro complejo $Jac(M)$ son las mismas que las clases de equivalencia analítica compleja de fibrados complejos lineales en $Jac(M)$.

(*) Utilizando esta equivalencia, se obtiene una descripción explícita de cualquier hipersuperficie de $Jac(M$ como el lugar geométrico cero de una función analítica compleja en el recubrimiento universal $\mathbb{C}^g$ de $Jac(M)$ con propiedades de periodicidad específicas, que se denominan funciones *theta* θ en $\mathbb{C}^g$.

Una cuestión central en la Teoría de Curvas afecta al estudio de *deformaciones* que aquí se aborda en los terminos de [Har82] [10]. Como es habitual, se puede plantear de forma extrínseca (en términos del fibrado normal a una inmersión) o bien de forma intrínseca (la curva como variedad abstracta):

- El *enfoque extrínseco* basado en la *variedad de Chow* $X_{d,r}$ es más intuitivo, pero da lugar a una casuística asociada a la inmersión elegida; una estrategia tipica utiliza las "formas asociadas" (Chow y Van der Waerden) en la variedad de Grassmann correspondiente. Las propiedades universales son las asociadas al fibrado tautológico universal sobre la Grassmanniana. Por ello, ignora las propiedades vinculadas a componentes inmersas. Para recuperarlas sería necesario introducir una estructura graduada más fina asociada a módulos sobre variedades de banderas generalizadas (que incluyan componentes inmerdas).

- El *enfoque intrínseco* utiliza una porpiedad universal del esquema de Hilbert para los morfismos $S- \to \mathcal{H}_{d,g.r}$ que se corresponden biyectivamente con los subesquemas d $\mathcal{C} \subset S \times \mathbb{P}^r$ cuyas fibras sobre S son curvas de grado d y género g. Este enfoque permite visualizar las deformaciones de primer orden del subespquema $C \subset \mathbb{P}^r$ como el espacio tangente de Zariski a $\mathcal{H}_{d,g,r}$ en C. [11]

[10] El enfoque diferencial se desarrolla a partir del módulo A_{43} (Gérmenes de Singularidades de fucniones) de A_4 (Topología Diferencial)

[11] Más formalmente, a partir del haz normal $\mathcal{N} := Hom_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}}(I_C/I_C^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r})$, las deformaciones

0.1.4. Algebraic Curves in Engineering

Some classical applications appear in regard to problems in Geometric Optics and Mechanics. In both cases, there appear transcendent aspects linked to solutions for ODEs linked to propagation models and transmission effect, e.g. In addition, from the last years of the 18th century, algebraic curves and surfaces play a fundamental role in Descriptive Geometry (Monge), which are translated to the Projective Geometry framework after the first synthesis performed by Poncelet (1821).

Typical projective methods based on sections and projections are extended to all branches of Geometry, under different labels. From the algebraic viewpoint,they extend the notions of injective and surjective maps which is naturally adapated to thesmooth, algebraic and analytic frameworks. They are ubiquituous also in Applied Sciences and Engineering, where they are used to enlarge or reduce information. Regular conditions for both of them, must be extended o the singular case, where different "pathologies" can appear.

Some of the most relevant problems for explicit computations involving Algebraic Geometry of Curves are

- Exact vs approximate computation for roots of polynomials, where symbolic vs numerical tools have been developed from the eighties with standards such as Maple V, Macsyma, or Singular between others.
- Common roots for two polynomials, where the Resultant plays a central role. The computation of multiple roots can be understood as a particular case involving a polynomial and its derivative (Discriminant Loci).
- Explicit computations for the intersection of two or more polynomials, where the Bézout theorem is the starting point. Relations between algebraic, differential and analytical approaches for itnersections issues are developed in the module A_{34} (Enumerative Geometry) in strong relation with methods arising from Differential Topology A_4
- Computation of Algebraic invariants and relations between them (syzygeas), beyond finiteness results developed initially by D.Hilbert in the last decade of the 19th century; the first systematic modern approach is performed in [Stu93][12]

Most approaches were initially developed for the complex case. Some applications to Engineering require the development of methods and software tools for the real case, which is usually performed in the Semi-Algebraic framework (to bound the query region for solutions). A classical reference is [Arn89] [13]

Along the part II of these notes, we develop some applications to several Engineering areas including:

de primer orden están dadas por $T_C\mathcal{H}_{d,g,r} = H^0(C, \mathcal{N})$.

[12] B. Sturmfels: *Algorithms in Invariant Theory.* Texts and Monographs in Symbolic Computation, Springer-Verlag, 1993.

[13] D.Arnon: *Computational Methods in Real Algebraic Geometry.* Academic Press, 1989.

- *Computational Mechanics of continuous media* B_1 where they are used for effective parametrization (by using theta functions) o solutions for KP equations involving two interacting wavefronts, e.g., in Computational Dynamics B_{15} or to visualize complex interaction phenomena at molecular level in Advanced Visualization B_{16} (following Bajaj).
- *Computer Vision* B_2 for semi-automatic recognition of objects B_{24} from silhouettes and their lifting (by using projecting cones) to 3D space curves. An invariant-based approach is developed in [Mun91] [14]
- *Robotics and Automation* B_3 where they are used to solve polynomial equations in trigonometric functions for grasping objects by Anchored robots B_{31}, management of polynomial constraints in non-linear Optimization and Control in auotmated environments, and and their extensions to Humanoid Robots B_{35} for a more firenly interaction with human beings.
.
- *Computer Graphics* B_4, including the use of snakes (weighted rational curves) in computational design tools (CAD/CAM) inside Geometric Modelling B_{41}. The evaluation of their deformations is crucial for Quality Control and the correction of deformations b linked to mechanical efforts, e.g. This application requires the in corporation of differential and metric-based methods. Other more classical applications are linked to algebraic tools for animation of characters B_{44}.

In all these applications data estimation plays a central role. Algebraic curves must be fitted to eventually noisy data, in an accurate way as possible. Very often, even projective characters are unknown, and must be inferred along the sampling and query processes. In addition, high degree curves can not be estimated from exact methods (indeterminate coefficients),, and badly with approximate methods (Sturm-Hermite, e.g.). Thus, a basic strategy consists of

1. start with low degree curves by using low-order momenta, e.g.
2. reproject data on candidate curves (multiple regression):
3. remove spurious data by using metric criteria:
4. match candidates by using control elements (points and lines);
5. evaluate incidence and tangency conditions from different loclaizations:
6. accept or reject the result in terms of additional constraints.

The precedent pipeline suggests rational curves as a first candidate, which are determined by the method of indeterminate coefficients in an appropriate space (a symmetric power of the original polynomial ring). This choice eases

[14] J.L.Mundy and A.Zisserman: *Geometric Invariance in Computer Vision*, The MIT Press, 1991.

the extension to higher dimension in terms of the product of two (resp. three) weighted rational curves) gives a rational surface (resp. threeofold) which is called a B-spline (resp. a T-spline [15]). A non-trivial problem is how to generate it by machine tools having in account mechanical constraints.

In more advanced settings, it can be necessary to replace rational curves by elliptic or hyperelliptic curves. In both cases, Theta functions provide a parametrization of curves, which is linked to the integral curves corresponding to l.i. differentials on the curve.

The algebraic approach to "complex shapes or behaviour" (represented by varieties and morphisms between varieties) is appear in a lot of applied sciences and technological areas. However, this reduction does not imply a polynomial complxity for the corresponding algorithms [16]-

Some *advanced applications to Theoretical Physics* are sketched at the end of the module A_{34} (Enumerative Geoemtry) in regard to the number ofrational curves appearing in Superstirng Theory (an attempt to quantize Gravitational Interaction). Algebraic curves are used in the part II of these notes. Some of the most outstanding arise from a reformulation of Algebraic Geometry in terms of Conformal Geometry (angles preservation). *Advanced applications in Engineering* are grouped according each one of the areas included in this part. Next, we give some snapshots for each one of matters appearing the part II:

1. *Computational Mechanics of Continuous Media* B_1 including some advanced topics going from explicit resolution of algebraic differential equations involving propagation and interaction phenomena in Fluids Mechanics (Todda latices, Korteweg-De Vries, KP equations, e.g.)

2. *Computer Vision* B_2 where some problems to be solved involve the automatic recognition of algebraic plane contours, and their deformations by projective or Conformal transformations. S.Petitjean developed in the nineties the Enumerative Geometry A_{34} for Curves and Surfaces in Computer Vision.

3. *Robotics* B_3 involving forward and inverse mechanics for articulated mechanisms with the classical hierarchy (Geometry, Kinematics, Dynamics). It includes "exact" solutions for matrix differential equations (Riccati type, e.g.), and their reinterpretation in terms of Grassman manifolds or more general Flag manifolds for embedded systems.

4. *Computer Graphics* B_4 going from active contours modelling by using snakes, i.e. pieces of weighted rational normal curves fulfilling (exact vs approximate) incidence and tangeny conditions, and the study of their deformations for animation and simulation of characters in multimedia industry by using Computational Conformal Geometry [Gu08] [17]

[15] This terminology is not standard
[16] See the module B_{10} for more details about complexity of algorithms.
[17] X.D.Gu and S.T.Yau: *Computational Conformal Geometry*, Stony Brook Lect, Intl Press, 2008.

The above list is not exhaustive, and different recombinations have been developed in Advanced Visualization B_{16} or advanced applications to Biomedical Imaging, appearing in several modules of B_2 (computer Vision)

0.2. Esbozo del capítulo B310

Además, de esta introducción el capítulo contiene las secciones siguientes:

1. *Curvas algebraicas*: Estructuras algebraicas. Aspectos analíticos. Geometría Birracional. Singularidades.

2. *Tópicos avanzados*: Curvas en Supeficies, Geometría enumerativa de curvas. Invariantes, Espacios de moduli.

3. *Aspectos topológicos*: Integrales de formas sobre curvas. Topología Algebraica. Topología Compleja. Topología de cuervas algebraicas reales.

4. *Algebrizando la topología*: Extendiendo la topología general. Haces y Esquemas, Cohomología para curvas- Aspectos computacionales.

5. *Algunas aplicaciones a Ingeniería* con especial atención a los tópicos desarrollados en la parte II de estas notas: Mecánica de medios continuos B_1, Visión Computacional B_2, Robótica B_3 e Informática Gráfica B_4.

En estas notas se desarrolla un enfoque top-down (basado en modelos) que combina métodos y herramientas procedesntes de diferentes áreas: algebra Básica, Geometría Proyectiva, Topología Conjuntista y Algebraica, ó el Análisis Diferencial e Integral. Aunque todas se extienden a dimensión arbitraria, en este móodulo para fijar ideas nos restringimos a curvas algebraicas (definidas por polinomios) o curvas analíticas (cada rama está definida localmente por desarrollos en serie convergentes).

Se prioriza el enfoque algebraico construido sobre cuerpos k algebraicmente cerrados de característica cero, con el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos como el paradigma central. En algunos casos, se comentan brevemente extensiones de los resultados básicos al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o a cuerpos finitos $\mathbb{F}_q$ de interés para la Teoría de Números. La extensión de los métodos presentados a las Geometrías Semi-Algebraica o Semi-Analítica (localmente definidas por un número finito de igualdades, desigualdadaes y desigualdades estrictas) tiene gran interés para cuestiones de Optimización (parte II de estas notas), pero sólo aparece de forma tangencial.

0.2.1. Aspectos metodológicos

Los primeros estudios de curvas algebraicas fueron desarrollados por Descartes (1595-1650) y Fermat (1601-1665) a mediados del siglo XVII. En estos estudios se describen propiedades de curvas ligadas a problemas mecánicos utilizando *métodos analíticos* basados en la introducción de coordenadas Cartesianas. La expresión algebraica de las relaciones entre las variabless proporcionan los primeros ejemplos para curvas algebraicas definidas por polinbomios.

A finales del siglo XVII ya eran bien concoidos ejemplos de curvas trascendnetes (Leibnitz) en los que las relaciones entre coordenadas cartesianas o polares no están dadas inicialmente por polinomios en dichas variables [18].

A finales del siglo XVII y comienzos del siglo XVIII, Leibnitz (1640-1761) y Newton introducen el *cálculo infinitesimal* para el estudio diferencial e integral de "entidades geométricas". Esta introdución impulsa la necesidad de un estudio más detallado de los polinomios que relacionan las "cantidades" vinculadas a transmisión de fuerzas y momentos, así como aspectos elementales en fenomenos de propagación.

Más allá de las cónicas, los ejemplos de curvas algebraica (1643.1727)s (cisoide, concoide diferentes tipos de cicloides, curvas inmersas en toros, p.e.) estaban motivados por problemas de transmisión en diferentes tipos de mecanismos articulados. En el siglo XVIII se desarrolla un enfoque analítico de tipo infinitesimal, pero el carácter algebraico de las ecuaciones motivó un enfoque algebraico integrado en el siglo XIX.

El *enfoque infinitesimal* utiliza el cálculo del espacio tangente $\Theta_{X,x}$ en cada punto (generado por las derivaciones del anillo local en lenguaje algebraico) y el control de las singularidades que pueden aparecer. Ejemplos típicos de curvas mecánicas con singularidades corresponden a los diferentes tipos de cicloides o de astroides que combinan rotación y traslación a lo largo de una recta o de una cirunferencia, p.e. Estas curvas presentan singularidades simples (nodos y cúspides ordinarios) que es necesario "controlar" en términos de una curvatura variable para las aplicaciones a dispositivos mecánicos [19]

La variación continua de parámetros para familias uniparamétricas $f : \mathcal{X} \to S$ de estas curvas da lugar al estudio de *envolventes* de tangentes (evolventes) o de normales (evolutas). Estas curvas aparecen en Mecánica y Óptica vinculadas a la resolución de EDO asociadas a fenómenos de propagación en medios continuos y homogéneos. Las envolventes habían aparecido ya en los primeros estudios de Óptica Geométrica llevados a cabo a principios del siglo XVIII por Newton y Huygens, entre otros. En [Gei05] [20] se muestran las razones de la ubicuidad de la cicloide en diferentes problemas de Mecáncia y Óptica.

Las envolventes de tangentes o normales (y la resolución del problema inverso) pueden presentar asimismo singularidades. El ejemplo más simple mcorresponde a la evoluta de una parábola que es una cúspide ordinaria (Newton); este ejemplo fue utilizado ya en el siglo XVIII para el diseño de telescopios. Desde el punto de vista mecánico, la aparición de singularidades motiva una exten-

[18] La exposición más completa que conozco se puede ver en [Bri80].

[19] Esta estrategia se aplica a las singularidades que aparecen en la locomoción de Robots Humanoides B_{35} y Animats B_{36} en B_3 (Robótica y Automática).

[20] Geiges: "Christian Huygens and the contact geoemtry", *arXiv*, 2005.

sión al caso singular n de las técnicas de control geométrico para evitar "saltos bruscos" en el funcionamiento de mecanismos articulados. La visualización 3D de la familia $f(x,y;a)=0$ como una superficie en el espacio parametrizado por x,y,a lleva a la descripción de la envolvente como

$$f(x,y:a)=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial a}f(x,y;a)=0$$

que es precisamente el "lugar discriminante" de la proyección sobre el plano $a=0$, donde las "curvas de nivel" $a=cte$ son tangentes a $f(x,y;a)=0$. Esta simple observación muestra una conexión entre aspectos algebraicos (discriminante de una familia de polinomios), analíticos (tangentes a curvas) y diferenciales (lugar crítico de una proyección) vinculados a soluciones de EDO).

Este ejemplo proporciona el punto de partida para las "polares" de una curva como representación de la visibilidad de un objeto desde un pinto exterior y el cálculo de sus propiedades métricas (Salmon, 1903). La extensión a dimensión superior da lugar al estudio de *Variedades Polares* que se aborda en el módulo A_{32} (Variedades Casi-Proyecivas) [21].

Recordemos que la polar desde un punto exterior de una cónica es la recta que conecta los puntos de tangencia. La primera polar de una curva desde **P** (polo) es la recta que envuelve las tangentes exteriores; la segunda polar es una cónica asociada al Hessiano.

(*) Cuando **P** se mueve a lo largo de una recta se obtiene una familia uniparamétrica de polares. Si el polo **P** se mueve a lo largo de una curva plana C parametizada por $(a,b)\in C_d$ (curva directriz) caracterizada por $g(a,b)=0$, se obtiene una familia biparamétricade curvas $f(x,y;a,b)=0$ con su correspondiente lugar discriminante definido por $f(x,y;a,b)=0$, $g(a,b)=0$ y $f_ag_b-f_bg_a=0$.

A partir del siglo XIX se desarrollan diferentes aproximaciones de tipo analítico, topológico, algebraico para el estudioi de las curvas algebraicas. La primera unificación de estos métodos se debe a B.Riemann (1856) quien establece los fundamentos y demuestra los primeros resultados centrales de la teoría de Curvas Algebraicas. En particular, Riemann muestra los primeros elementos del "diccionario perfecto" entre la clasificación superficies compactas, curvas algebraicas y cuerpos de funciones definidos sobre la curva. Este diccionario tiene implicaciones en sus análogos relativos a la teoría de Números que no se aborda en estas notas.

Lamentablemente, este diccionario presenta dificultades adicionales en el caso singular y no se extiende a dimensión superior. No obstante, en el módulo A_{33} veremos las relaciones entre los diferentes aspectos se pueden interpretar en términos de "estructuras superpuestas" (haces de partes principales) que toman valores sobre las funciones regulares asociadas a cada uno de estos contextos. Una versión ingenua de esta idea está ligada a la sucesión exacta

[21] El reconocimiento automático de objetos B_{24} en Visión Computacional usa la evolución de siluetas como proyección del contorno aparente dado por una curva alabeada $\mathcal{C}$ que es el lugar discriminante).

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \to 0 \quad (*)$$

asociada a la aplicación exponencial $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, cuyo núcleo se describe en términos del espacio recubridor universal[22] con hojas parametrizadas por $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{S}^1$ (visualizable como una espiral). Intuitivamente, los aspectos topológicos, geométricos y analíticos están vinculados a los términos que aparecen de forma sucesiva en la sucesión exacta (*).

Los enfoques más antiguos para la clasificación de curvas planas algebraicas se basaban en el grado $d := deg(C)$, comenzando con los valores más bajos correspondientes a cónicas (Apolonio), cúbicas (Newton) o curvas cuárticas (Cayley, Clebsch). Estas últimas proporcionan los primeros ejemplos avanzados de métodos proyectivos (28 líneas bitangentes a una cuártica plana), teoría de invariantes algebraica (Cayley, Salmon) y trascendente (Clebsch), vinculados a género 3 y sus extensiones (superficies de Kummer y variedades abelianas).

La invariancia proyectiva del grado d es clave para las operaciones relacionadas con secciones y proyecciones. Su inversa está dada por la "elevación" de curvas de bajo grado, donde las curvas planas se interpretan como la curva directriz de conoides en un espacio proyectivo. Este enfoque puede considerarse la "prehistoria" de la *clasificación algebraica*. En la mayoría de los casos, utiliza únicamente resultados básicos de factorización (Vieta) y las funciones simétricas elementales correspondientes. En otras palabras, no tiene en cuenta la naturaleza algebraica de curvas más generales dadas en términos de funciones regulares o vinculadas a funcionales integrales no racionales.

Desafortunadamente, el grado no es un invariante birracional. En particular, las cónicas, las curvas nodales o cúspides, y la lemniscata son curvas racionales de grado 2, 3 y 4, respectivamente, que son biracionalmente equivalentes a $\mathbb{P}^1$. Sin embargo, las curvas generales de grado 4 no son racionales. En particular, el cálculo de ≪cantidades simples≫ dadas por integrales (como la longitud de la curva, por ejemplo) se convierte en un problema difícil incluso para algunas curvas racionales. Las primeras contribuciones algebraicas que incorporaron el género se deben a Clebsch (1833-1872), quien demostró que la curva general de grado cuatro tiene género tres.

(*) El cálculo explícito de integrales elípticas ilustra el carácter no trivial del problema que inicialmente se presenta en problemas variacionales (Euler). Estos problemas surgen a pesar del carácter racional de la elipse como curva algebraica. Los problemas aumentan para integrandos con radicales fraccionarios de grado ≥ 4. Además, para emparejar funciones regulares en intersecciones de conjuntos abiertos se requieren cambios de coordenadas inversibles, que solo pueden realizarse en el cuerpo $k(X)$ de fracciones del anillo $k[X]$. Es necesario incorporar "extensiones trascendentes" de $k(\mathbb{C})$ para la correcta gestión de estos problemas. [23]

[22] Ver módulo A_{21} (Homotopía) de A_2 (Topología Algebraica y Geométrica) para detalles.

[23] Algunas observaciones sobre el enfoque trascendente se han presentado más arriba en el parágrafo §0,1,3; para un tratamiento más extenso ver el capítulo A_{317} de este módulo.

0.2.2. Interrelación entre Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica

La introducción de los métodos de Álgebra Conmutativa en la Geometría Algebraica de Curvas se lleva a cabo en dos artículos publicados en 1873 y en 1882, respectivamente. El primero se debe a Brill y Noether, mientras que el segundo se deboe a Dedekind y Weber.

El trabajo de Brill y Noether (1873) que resumió todo el conocimiento adquirido hasta entonces para curvas algebraicas planas y sentó las bases para las investigaciones desarrolladas sobre todo por la geómetras de la Escuela Italiana de Geoemtría Algebraica. En este trabajo se introdujo el concepto fundamental de "serie lineal". En términos generales, una *serie lineal* g_d^r de dimensión r y grado d sobre una curva irreducible C es un conjunto de r grupos de d puntos de la curva obtenidos al intersectarla con otra curva que varía en un sistema lineal de dimensión r.

Max Noether había introducido la noción de *curvas adjuntas* a una curva algebraica plana dada C para abordar el estudio del lugar singular $Sing(C)$ de C en términos de las curvas que pasn por cada punto singular $n_p p$ con una multiplicidad preasignada $n_p - 1$. Esta condición está motivada por el comortamiento de las diferenciales en dicho punto. El teorema de Rieman-Roch había mostrado la necesidad de utilizar las diferenciales para una curva algebraica no-singular para calcular el género g de la curva. Por ello, el enfoque de M.Noether es la extensión natural al caso singular.

Brill y Noether (1873) introducen el concepto de *divisor* D sobre una curva irrecudible plana C como una combinación lineal finita $\sum_p n_p p$ que permite tratar por igual puntos regulares y singulares, evaluando las condiciones adicionales que imponen a las curvas "adjuntas" el paso por dichos puntos múltiples. La intersección de la curva plana C con las curvas adjuntas de M.Noether determina una *serie lineal* g_d^r donde el "orden" r es el número de puntos de cada grupo y la dimensión d es el número de parámetros de los que depende. La serie contiene los puntos singulares (como puntos fijos), y una "intersección excedentaria" de puntos variables que varían en un sistema de "curvas residuales". Una referencia clásica es [Coo31] [24]

(*) El cálculo de invariantes (dimensión, superabundancia, índice de especialidad, en la terminología antigua) de los sistemas de series lineales forma parte del *problema de la postulación* (reducir el número de puntos utilizando condiciones de incidencia sobre puntos singulares). El objetivo de la postulación es determinar si existen "familias de curvas" con características prefijadas dadas por dichos invariantes. Este problema se formula actulamente en términos cohomológicos [25]. El rango del primero grupo de cohomología corresponde a la dimensión del espacio. La no anulación de la cohomología en grado uno indica que existe algún tipo de "obstrucción" a encontrar sistemas lineales verificando las condiciones prefijadas.

[24] J.L.Coolidge: *A Treatise on Algebraic Plane Curves*, Oxford Univ. Press, 1931

[25] Una ventaja del enfoque basado en la cohomología de haces A_{33} consiste en que la postulación se extiende a dimensión arbitraria-

Con la suma definida en la formal natural, los divisores forman un *grupo abeliano* $Div(C)$, donde el cero es el divisor nulo. Si $D_1 D_2 \in Div(C)$, entonces $D_1 \geq D_2$ significa $D_1 - D_2 \geq 0$ (divisor efectivo). un sistema lineal completo $\mid D \mid$ asociado a un divisor es el conjunto de todos los divosres efectivos (no negativos) linealmente equivalentes a D. Esta noción e la adaptación de la noción de serie completa en el marco Brill-Noether.

El lenguaje de divisores facilita un tratamiento simultáneo de las condiciones de incidencia y tangencia (eventualmente excedentarias) correspondientes a secciones (transversales o verificando condiciones de contacto prefijadas) por hipersuperficies. El estudio del exceso de intersección fue realizado por f.Gaeta (1953) en términos de intersecciones con residual finito [26]

(*) En el caso de curvas, ambos lenguajes proporcionan relaciones estructurales entre aspectos geométricos y analíticos. En terminos más modernos, las series lineales o los divisores se reemplazan por secciones de haces. En particular, las clases de isomorfía fibrados lineales (fibrados vectoriales de rango uno) se rrpresentan mediante clases de equivalencia lineal de divisores. Un ejemplo básico corresponde al género como dimensión de un espacio de secciones de un haz.

un enfoque algebraico complementamente diferente (vinculado a la Teoría Algebraica de Números) se desarrolla en el trabajo de Dedkiny Weber (1883). Su idea básica consiste en recuperar el punto de vista original de Riemann, omitiendo cualquier referencia a aspectos trascendentes. En otras palabras, ignorando las integrales y la topología compleja de las superficies de Riemann como el verdadero soporte topológico de los modelos complejos. Su enfoque puede entenderse como una especie de dualidad entre X y el cuerpo $k(X)$.

Con más detalle, en lugar de considerar las superficies de Riemann X como un lugar geométrico de puntos, consideran el cuerpo $k(X)$ de funciones racionales definidas en X. En este marco, $k(X)$ es una extensión de grado finito del cuerpo $k(\mathbb{C})$ de funciones racionales definidas en $\mathbb{C}$, de forma similar a la teoría de números algebraicos (también desarrollada previamente por Dedeking). Este punto de vista se extiende naturalmente a una dimensión superior para una variedad algebraica [27].

El hito siguiente fundamental es el Teorema de los Ceros (Nullstellensatz) de Hilbert :

Teorema.- Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado (como el de los números complejos), denotemo por $\mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ el anillo de polinomios en n variables y por I un ideal en este anillo. La variedad afín $V(I)$ definida por este ideal consiste de todas las n-tuplas $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{K}^n$ tal que $f(\mathbf{x}) = 0$ para todo $f \in I$

El teorema de los ceros de Hilbert nos dice que si p es un polinomio en $\mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ que se anula en la variedad $V(I)$, i.e. $p(\mathbf{x}) = 0$ para todo

[26] Una presentación moderna se puede ver en [Ful84]

[27] Un desarrollo más detallado se presenta en el capítulo A_{311}.

$x \in V(I)$, entonces existe un número natural r tal que pr está en I.

Un corolario inmediato es el "Nullstellensatz débil": si $I \subset R$ es un ideal propio en $k[x_1, x_2, ..., x_n]$, entonces $V(I)$ no puede ser vacío, i.e. existe un cero común para todos los polinomios del ideal. Esta es la razón para el nombre del teorema; que es fácilmente demostrable en esta forma "débil". Nótese qu asumir que el cuerpo k sea algebraicamente cerrado es esencial aquí: el ideal propio $(X^2 + 1)$ en $\mathbb{R}[X]$ no tiene un cero común.

El Nullstellensatz puede ser también formulado como

$$I(V(J)) = \sqrt{J} \quad \text{para todo ideal } J$$

Aquí, $\sqrt{J}$ denota el radical de J e $I(U)$ denota el ideal de todos los polinomios que se anulan en el conjunto U. De este modo, obtenemos una correspondencia biyectiva que revierte el orden entre las variedades afines en K^n y los ideales radicales de $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

La extensión de estos resultados a variedades de dimensión arbitraria con el calculo explícito de invariantes asociados a las "presentaciones" de los ideales correspondientes requiere calcular algún tipo de "resolución" de los módulos correpsondientes. Este desarrollo requiere elementos adicionales de Álgebra Homológica que se introducen en el móudlo siguiente A_{32}

0.2.3. Métodos algebraicos vs trascendentes

El análisis Diferencial e Integral ha jugado un papel esencial en el desarrollo de la Geometría Algebraica desde el siglo XVIII. Los métodos utilizados son una extensión natural de los descritos en Geometría Diferencial de Curvas y Superficies A_{10} o, con más generalidad, de Variedades en los módulos A_{14} (Cálculo Diferencial Exterior) y A_{15} (Integración sobre Variedades), respectivamente.

Para simplificar, suponemos inicialmente que el cuerpo base es el de los números complejos $\mathbb{C}$, donde se suponen conocidos los resultados básicos de la Topología Compleja y la teoría de Funciones Analíticas sobre $\mathbb{C}$.

La existencia de una estructura real subyacente a $\mathbb{C}$ se traduce en un isomorfismo $\mathbb{C} \simeq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ que se expresan en términos de las coordenadas Cartesianas (x, y) o bien de las complejas $(z, \overline{z}$, donde $\overline{z} = x - iy$ es el conjugado de z. Los cambios de carta en las estructuras complejas, inducen cambios de carta en la estructura real subyacente que permiten extender las nociones básicas relativas al Cálulo Diferencial e Integraal.

Las relaciones entre las estructuras real y complejac para el caso global, proceden de la compatibilidad sobre abiertos $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ de un recurbimiento de la curva compleja. Esta compatibilidad está dada por aplicaciones bianalíticos (es decir, biholomorfas en el caso complejo). Los cambios de carta en el caso algebraico están dados por transformaciones birracionales. n el caso más simple están generadas por las colineaciones de $\mathbb{P}^2$ y las transformaciones de Cremona son las piezas básicas (M.Noether).

La inversibilidad para las transformaciones birracionales sobre el cuerpo $k(X)$ de las funciones racionales sobre X motiva la necesidad de contar con funciones regulares dadas por polinomios $p(z)$ y cocientes de polinomios $f(z) = p(z)/q(z)$ como funciones regulares. Sobre $\mathbb{C}$ corresponden a funciones holomorfas y meromorfas, respectivamente que se denotan con la misma notación.

- Los *métodos diferenciales* se describen en términos de propiedades campos de vectores $\mathbf{v}_i$ y sistemas de formas diferenciales ω_j. Se supone que ambas son regulares. Para fijar ideas (y debido a sus mejores poropiedades funtoriales), nos restringimos formas diferenciales.

- Los *métodos tracendentes* en Geometría Algebraica se desarrollan a partir del Cálculo Diferencial e Integral sobre Variedades Complejas. El Cáculo Diferencial utiliza campos vectoriales y formas diferenciales (holomorfas y meromorfas) sobre variedades (ver capítulo 4 para detalles). En el caso real, la cohomología de DeRham A_{14} y la Integración sobre Variedades A_{15} proporcionan el marco general para identificar invariantes de la estructura real subyacente para variedades suaves.

(*) En el caso complejo, la *cohomología de Dolbeault* en el caso complejo, juega un papel similar a la Cohomología de De Rham, proporcionando invariantes para la estructura compleja de X. La *Teoría Hodge* proporciona relaciones entre las estructura compleja y real subyacente. La clave es la introducción de un complejo bigraduado en el los elementos del mismo bigrado $p+q = k$ (constante) están relacionados por operadores de contracción y expansión.

*) La introducción del operador de Laplace $\Delta d \circ d$ sobre variedades complejas, permite identificar representantes "armónicos" (es decir, verificando $\Delta\omega = 0$) para las clases de cohomología. Estos representantes armónicos son soluciones de problemas de tipo variacional. La representabilidad de su clase dual mediante ciclos algebraicos es un problema aún no resuelto (conjetura de Hodge).

(*) La compatibilidad de la estructura compleja con métricas hermíticas se lleva a cabo sobre *Variedades Kaehler*. Las propiedades de estas variedades son invariantes con respecto a la acción simultáneca (intersección) de los grupos clásicos $GL(n;\mathbb{C})$ (Geometría Compleja), $O(2n;\mathbb{R})$ (Geometría Riemanniana) y $Sp(n;\mathbb{C})$ (Geometría Simpléctica). Además, dos de estas estructuras determinan la tercera. Esta idea muestra a las variedades Kaehler como varieades privillegiadas donde es posible desarrollar un "diccionario" entre diferentes tipos de variedades de forma similar a las superficies de Riemann

La *teoría de intersección* es un tópico transversal a todos los módulos que aparece de forma recurrente en todos los módulos de esta materia A_3. Este teoría ilustra algunos de los aspectos de mayor riqueza para visualizr la interrelación entre aspectos locales y globales. Para ello, utiliza métodos algebraicos, diferenciale,s topológicos y analíticos. El primer resultado importante de la Teoría de Intersección es el Teorema de Bézout. La versión para la intersección de dos curvas planas en el plano complejo fue formulada por Bézout

0.2.4. Organización del módulo y aspectos avanzados

El módulo A_{31} (Curvas algebraicas y analíticas) tiene los capítulos siguientes:

1. Métodos algebraicos para curvas.
2. Funciones regulares y racionales.
3. Normalización y Transformaciones birracionales..
4. Cálculo Diferencial e Integral sobre curvas algebraicas.
5. Divisores y sistemas Lineales.
6. Teoría de intersección para curvas algebraicas.
7. Curvas analítica.s y Recubrimientos.
8. Espacios de moduli para curvas algebraicas.
9. Elementos de Criptografía y Teoría de Codigos.

Un enfoque más general para las curvas algebraicas y analíticas utiliza la cohomolorgía de haces y la teoría de Esquemas que se esbozan en la sección 3 y se desarrollan en el módulo A_{33}. A continuación, en la sección 4 se presentan algunas ideas básicas sobre tópicos avanzados relacionados con

- Curvas en Superficies y Deformaciones.
- Geometría Enumerativa de Curvas.
- Relaciones entre invariantes para curvas.
- Esquemas de Hilbert para curvas de género g.

0.3. Referencias para esta introducción

El objetivo de esta subsección es proporcionar algunas indicaciones para que cada persona interesada en estos tópicos pueda selecciona su propia síntesis de acuedo con sus intereses o preferencias. Las refeencias no son exhaustivas, ni tampoco las más recientes. Cualquier sugerencia es bienvenida.

0.3.1. Bibliografía básica

[Ati69] M. Atiyah, I. G. Macdonald: *Introduction to commutative algebra*, 1969, 1994 (trad. esp. en Ed. Reverté)

[Bri86] E.Brieskorn and H.Knorrer: *Plane Algebraic Curves* (English translation of the original German ed, by J.Stillwell), Springer-Verlag, 1986.

[Coo59] J.L.Coolidge: *A treatise on Algebraic Plane Curves*, Dover, 1959.

[Ful08] W.Fulton: *Algebraic curves. An introduction to Algebraic Geometry*, 3rd ed. 2008.

[Gra07] J. Gray: *Worlds Out of Nothing. A Course in the History of Geometry in the 19th Century*, Springer, 2007.

[Gri78] P.A.Griffiths and J.Harris: *Principles of Algebraic Geometry*, J.wWley, 1978.

[Har10] J.Harris: *Introductory algebraic geometry. A first Course*, GTM 133, Springer-Verlag, 2010.

[Rei88] M.Reid: *Undergraduate algebraic geometry*, London Math. Soc. Student Texts 12, 1988.

[Sho06] Shokurov and Danilov (eds): *Algebraic geometry I. Algebraic curves, manifolds and schemes*, I.R. Shafarevich, (ed.), Springer-Verlag, 2006.

[Wal50] R.Walker: *Plane algebraic Curves*, Dover, 1961.

0.3.2. Referencias avanzadas

[Arb85] E.Arbarello, M.Cornalba, P.H.Griffiths and J.Harris: *Topics in the theory of algebraic curves*. Springer-Verlag , 1985. M

[Boc87] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy: *Géométrie algébrique réelle*, vol. 12 of Ergebnisse der Mathematik. Springer-Verlag, 1987.

[Cle03] C. H.Clemens: *A Scrapebook of Complex Curve Theory*. Pleum Press, 1980- The 2nd ed is published by American Mathematical Society, 2003.

[Gun76] R.C.Gunning: *Riemann Surfaces and Generalized Theta Functions*, Erg. der Math und ihrer Grenzgebiete 91, Springer-Verlag, 1976

[Har66] R. Hartshorne: *Residues and duality*, LNM20, Springer-Verlag 1966

[Har77] R.Hartshorne: *Algebraic geometry* Springer-Verlag, 1977.

0.3.3. Applicaciones a otras áreas

[Gu08] X.D.Gu and S.T.Yau: *Computational Conformal Geometry*, Stony Brook Lect, Intl Press, 2008.

[Mun91] L.Mundy and A.Zisserman: *Geometric Invariance in Computer Vision*, The MIT Press, 1991.

0.3.4. Recursos Software

- MAPLE V
- Singular
- .... any suggestion is welcome

Final remark: Readers which are interested in a more complete presentation (in Spanish language) of this chapter or some chapter of this module A_{31} (Algebraic and Analytic curves), please write a message to javier.finat@gmail.com.