

Una Introducción a la Geometría Algebraica

Javier Finat

3 de enero de 2022

Índice general

0.1. Introduction	4
0.1.1. Caracterizando la Geometría Algebraica	7
0.1.2. Métodos y Modelos	11
0.1.3. Herramientas	18
0.1.4. Relaciones con otras áreas matemáticas	30
0.2. Antecedentes y evolución	39
0.2.1. Algunas motivaciones históricas	40
0.2.2. El problema de la clasificación	44
0.2.3. El enfoque local	51
0.2.4. El enfoque global	58
0.3. Algunas aplicaciones	62
0.3.1. Geometría Algebraica en Ingeniería	62
0.3.2. Informática y Ciencias de la Computación	75
0.3.3. Ciencias de la Naturaleza	79
0.3.4. Ciencias Sociales y Biomédicas	84
0.3.5. Modelo estándar y Gran Unificación	92
0.4. Estructura del Curso	99
0.4.1. Módulo 1: Curvas algebraicas	100
0.4.2. Módulo 2: Variedades algebraicas	103
0.4.3. Módulo 3: Esquemas, haces y cohomología	105
0.4.4. Módulo 4: Superficies y ciclos algebraicos	107
0.4.5. Módulo 5: Geometría Enumerativa	109
0.4.6. Módulo 6: Variedades tridimensionales	111

Previous remark.- These notes correspond to a draft of the chapter 0 of the matter A_3 (Algebraic and analytic Geometry). They have been originally written to try of reconstructing bridges between GAGA and some applications to other scientific and technological areas. Thus, they are far from usual schemes-based approaches and nearer to other more classical ones, which incorporate historical aspects to motivate advanced developments.

Prerequisites: From the mathematical viewpoint, it is necessary to be familiar with Basic Algebra and (Affine, Projective) Geometry. It is convenient to have some knowledge of Complex Analysis and Commutative Algebra, but most results will be introduced along these notes.

0.1. Introduction

En esta sección se desarrolla una primera aproximación a los objetivos, herramientas y métodos de la Geometría Algebraica. En una primera aproximación, la Geometría Algebraica trata del estudio de “objetos geométricos” no-lineales mediante técnicas algebraicas ó trascendentes. Esta descripción tan vaga permite diferenciarla del Álgebra Geométrica que, de una manera muy tosca, puede ser descrita como el estudio de “objetos algebraicos” multilineales mediante técnicas geométricas. La extensión de la Geometría Conforme proporciona un soporte común a ambas materiales.

En términos más precisos, la Geometría Algebraica trata inicialmente de estudiar los lugares definidos por la anulación de un número finito de polinomios $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ para $1 \leq i \leq p$, donde k es el cuerpo de coeficientes y x_j son variables independientes (también llamadas indeterminadas) para $1 \leq j \leq n$. Diferentes generadores pueden dar el mismo soporte como lugar de anulación. El ejemplo más simple está dado por un punto, en particular, el origen de coordenadas. Por ello, es conveniente dar una representación intrínseca del lugar geométrico, es decir, que sea minimal e independiente- La independencia es tanto con respecto al sistema de coordenadas como a los polinomios cuya anulación define el lugar geométrico.

La representación intrínseca está dada por el ideal $(f_1, \dots, f_p)$ generado por los polinomios f_i en el anillo de polinomios $k[x_1, \dots, x_n]$ en n variables. Al lugar definido por dicha anulación se le llama una *variedad algebraica* que denotaremos mediante X con ideal denotado mediante I_X o $I(X)$. En el module A_{44} se desarrolla un enfoque complementario en términos de la aplicación $F: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$ cuyas componentes son $f_1, \dots, f_p$. Esta simple observación favorece el transvase entre Geometría Algebraica y Topología Diferencial.

El soporte geométrico inicial para estudiar este tipo de variedades es el espacio afín n -dimensional sobre el cuerpo k que denotamos mediante $\mathbb{A}_k^n$ con espacio vectorial subyacente $V = k^{n+1}$. Por ello, a las variedades definidas como el lugar de ceros de familias finitas de polinomios se les llama *Variedades Algebraicas Afines*. La situación más simple corresponde a variedades irreducibles y reducidas correspondiente a ideales primos sin componentes inmersas.

Si $d_i := \deg(f_i) > 1$: denota el grado de f_i (exponente del término de mayor orden con coeficiente no nulo), interesa estudiar las características del conjunto de soluciones $\cap_{i=1}^p$ del sistema $f_1 = \dots = f_p = 0$. El caso $d = 1$ se ha estudiado en Geometría Básica con métodos del Álgebra Lineal usando el Teorema de Rouché-Frobenius. La extensión de este resultado a grados $d_i \geq 2$ es altamente no trivial.

Los objetos más sencillos de los que se ocupa la Geometría Algebraica tienen grado bajo $d = 2$ (cónicas, cuádricas, etc), $d = 3$ (cúbicas), $d = 4$ (cuárticas), etc. En particular, la Geometría Algebraica incluye el estudio de todos los objetos dados por polinomios de grado bajo tanto racionales (snakes, B-splines, p.e.) como no-racionales (incluyendo funciones trigonométricas o la exponencial, p.e.,

así como sus inversas). Incluso para el caso racional, la intersección puede ser muy complicada. Un ejemplo relativamente simple está dado por la intersección de dos cuádricas (superficies racionales) que da una curva elíptica.

Sobre $\mathbb{C}$ (o con más generalidad cualquier cuerpo algebraicamente cerrado k), el Teorema de Bezout proporciona una primera solución: El grado es el producto de los grados, es decir,

$$\deg(\cap_{i=1}^p V(f_i)) = \prod_{i=1}^p d_i = \prod_{i=1}^p \deg(V_i) \quad \text{donde } d_i = \deg(V_i) = \deg V(f_i)$$

La “demostración” original se basaba en el principio de degeneración y cálculo de parámetros para las colecciones de rectas en las que degenera cada curva. Obviamente, este argumento no es aceptable como demostración rigurosa, pero los intentos de justificación (inicialmente dentro de la Geometría Enumerativa A_{35}) han dado lugar a la moderna Teoría de Intersección [Ful84]¹, una de las cumbres de la Geometría Algebraica. La formulación correcta de la multiplicidad de intersección (formalización del grado de intersección) llevada a cabo por J.P.Serre ha requerido más de cien años para su correcta formulación²

Los intentos de formalización del “principio de degeneración” dan lugar a la Teoría de Ciclos. La necesidad de poner los ciclos en “posición general” lleva al estudio de transformaciones (lineales, racionales, algebraicas, diferenciales, analíticas, topológicas) que actúan sobre los ciclos (Moving’s Lemma de Chow para equivalencia racional). De este modo, los diferentes grupos de transformaciones proporcionan la clave inicial para estudiar los objetos geométricos de forma intrínseca vs extrínseca (dependiente de la inmersión).

En particular, la acción de las transformaciones lineales más simples (colineaciones o transformaciones proyectivas) dan lugar a la Geometría Algebraica Proyectiva que se extiende de forma natural a otros Grupos Clásicos. Permiten relacionar objetos con apariencia muy diferente; un ejemplo típico bien conocido está dado por la clasificación (real vs compleja) de las cónicas en el plano Euclídeo $\mathbb{E}^2$, Afín $\mathbb{A}^2$ ó Proyectivo $\mathbb{P}^2$, tanto para el caso real como el complejo. La extensión de este enfoque a grupos más generales en el contexto de la Geometría Algebraica da lugar a la Teoría de Grupos Algebraicos [Spr98]³ y a la Teoría Geométrica de Invariantes que se comenta más abajo.

Los comentarios precedentes muestran el interés de la resolución de (sistemas de) ecuaciones de grado bajo para el estudio de propiedades de variedades algebraicas. Desde un punto de vista algebraico, los primeros estudios sistemáticos se inician en el Renacimiento con métodos basados en resolución por radicales (Cardano). Si se atiende al grado, la clasificación de las cónicas (secciones de un cono) era conocida por los matemáticos griegos; las cúbicas fueron clasificadas por Newton a principios del siglo XVIII. El problema empieza a complicarse a partir de grado 4 (ultimo caso resolvable por radicales). La utilización de

¹W.Fluton: *Intersection Theory*, Springer-Verlag, 1984

²Ver el capítulo 1 de A_{35} para una aproximación histórica.

³T.A.Springer: *Linear Algebraic Groups (2nd ed)*, Birkhauser, 1998

un cuerpo algebraicamente cerrado como $\mathbb{C}$ es crucial para reducir la casuística creciente que aparece en las primeras aproximaciones a la clasificación; esta reducción se lleva a cabo usando el Teorema Fundamental del Álgebra.

El grado es un invariante por transformaciones lineales y por las operaciones básicas (secciones y proyecciones) en Geometría Proyectiva. Sin embargo, no es un invariante por transformaciones (bi)racionales que afectan a (los cuerpos de) funciones definidas sobre curvas o variedades algebraicas de dimensión superior. No obstante, los ejemplos básicos correspondientes a polinomios de grado bajo se utilizan en multitud de aplicaciones entre las que se puede destacar Ingeniería Mecánica, Informática Gráfica o en representaciones de formas complicadas utilizadas en Arquitectura o en Ingeniería Civil, p.e.; más abajo se presentan algunas aplicaciones de forma más detallada.

La Geometría Algebraica se ocupa del estudio de propiedades “intrínsecas” del conjunto de soluciones de ecuaciones algebraicas, es decir, de propiedades que no dependen del sistema de coordenadas elegido o, más recientemente, del cuerpo elegido. La descripción de variedades en términos de ideales es el primer paso del enfoque intrínseco. En el caso clásico (cuerpos de característica cero como los reales o los complejos), la introducción de morfismos entre variedades o conjuntos algebraicos (que incluyen el caso correspondiente a una misma variedad sometida a una transformación) proporciona el lenguaje apropiado para el estudio de propiedades intrínsecas y su relación con propiedades sencillas de otras variedades conocidas.

Para curvas planas, algunas propiedades extrínsecas se expresan en términos del grado d (que corresponde geoméricamente al número de puntos de intersección de una curva con rectas genéricas), o la clase d'' (número de rectas tangentes que se pueden trazar desde un punto exterior). En general, la clase es el grado de la variedad dual (definida como la envolvente de hiperplanos tangentes para hipersuperficies). El grado y la clase son caracteres proyectivos, pues corresponden a “secciones” de la curva plana que se visualizan en términos de secantes o de tangente (como límites de secantes). De forma complementaria, la proyección de una curva alabeada sobre un plano da lugar a caracteres (puntos dobles o cuspidales, en correspondencia con secantes o tangentes múltiples).

Todos estos datos son caracteres proyectivos “extrínsecos”, es decir, dependen de la inmersión de la curva en el plano o en el espacio, en relación con el observador. Desde mediados del siglo XIX se hizo patente la necesidad de desarrollar un enfoque intrínseco, es decir, independiente de la localización del observador. Las relaciones entre aspectos intrínsecos y extrínsecos (fórmulas de Pluecker para el caso de curvas) juegan un papel fundamental en las aplicaciones clásicas y, más recientemente, en Visión Computacional B_2 en relación con el reconocimiento de objetos B_{24} .

Para fijar ideas, en los párrafos siguientes nos restringimos inicialmente a variedades afines que resultan más fáciles de visualizar. La comparación entre variedades algebraicas se lleva a cabo mediante *morfismos* $f : X \rightarrow Y$ con sus correspondientes aplicaciones inducidas $f^* : k(Y) \rightarrow k(X)$ dadas por $f^*(g) := g \circ f$. Como las variedades se caracterizan en términos de cuerpos de funciones,

dichos morfismos f deben ser racionales, es decir, están bien definidos en el complementario de un cerrado (lugar de anulación del denominador).

Por ello, se habla de morfismos racionales, es decir, dados localmente por cocientes de polinomios. Esta simple observación da lugar a que los objetos a clasificar no sean sólo variedades, sino morfismos entre variedades. Dependiendo de las propiedades algebraicas a estudiar tendremos diferentes “categorías” que corresponden a estructuras adicionales superpuestas a las variedades.

Las estructuras que se superponen a variedades algebraicas afines o proyectivas pueden ser de tipos muy diferentes, pero siempre responden a varios tipos básicos extendiendo de diferentes formas la noción de trivialidad local $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$ que aparece en fibrados vectoriales, siendo F la fibra genérica. La noción de fibrado vectorial ha sido introducida en Geometría Diferencial de Variedades A_1 .⁴

De acuerdo con esta idea se tienen fibrados vectoriales ξ ó principales $\mathcal{P}$ sobre X , o con más generalidad, prehaces ó haces $\mathcal{H}$ o fibraciones o foliaciones $\mathcal{F}$, por citar sólo algunas de las más usuales. La consideración de estas estructuras superpuestas facilita los problemas de caracterización y clasificación, proporcionando un lenguaje muy potente para la obtención de invariantes basados en la cohomología.

0.1.1. Caracterizando la Geometría Algebraica

Según el programa de Erlangen (F.Klein, 1873), cualquier Geometría se caracteriza por el estudio de propiedades invariantes por la acción de un grupo G . Las Geometrías Lineales están asociadas a un grupo estructural G que es un subgrupo clásico del grupo lineal general $GL(n; \mathbb{K})$; dicho grupo estructural deja invariante una forma bilineal B o bien una forma cuadrática Q (representación coordenadas de la métrica).

Este enfoque se extiende tanto a la topología general que estudia propiedades invariantes por la acción del grupo infinito-dimensional de los homeomorfismos, como a las geometrías no-lineales asociadas a difeomorfismos (Geometría Diferencial), transformaciones bianalíticas (Geometría Analítica) ó transformaciones birracionales (Geometría Algebraica).

La estructura de los C^r -grupos de dimensión infinita asociados a la Topología o las Geometrías No-Lineales es muy complicada. Las relaciones entre los diferentes tipos de estructura (diferencial, algebraica, analítica) sobre una variedad topológica X son un tópico importante de investigación. Para empezar, salvo casos muy sencillos, una variedad topológica no tiene por qué tener ninguno de los tipos de estructura mencionados. La caracterización de condiciones de compatibilidad entre diferentes C^r -estructuras se aborda en Topología Diferencial A_4 .

⁴Un desarrollo más detallado incluyendo invariantes se lleva a cabo en Topología Diferencial A_4

En esta subsección se comentan los objetivos generales y específicos de la Geometría Algebraica, tanto en su versión de variedades como de esquemas. Para ello, se adopta inicialmente una extensión del enfoque de Klein, es decir, la Geometría Algebraica aparece como el estudio de las propiedades que resultan invariantes por la acción del grupo de transformaciones birracionales. Como las transformaciones birracionales están dadas por cocientes de polinomios del mismo grado, ello implica que dos variedades birracionalmente equivalentes son isomorfas fuera de un “subconjunto” correspondiente al lugar de ceros del numerador o del denominador.

Objetivos generales

El *objetivo general de la Geometría Algebraica* es proporcionar herramientas para resolver los problemas de *caracterización* y *clasificación* de variedades o, con más generalidad, estructuras algebraicas sobre variedades X . Como la clasificación se lleva a cabo módulo equivalencia birracional y las funciones racionales definidas sobre X forman un cuerpo $k(X)$, la equivalencia birracional entre X e Y está dada por un isomorfismo $k(X) \simeq k(Y)$ entre los cuerpos de funciones racionales.

El caso más simple corresponde a las curvas racionales, es decir, birracionalmente equivalentes a la recta proyectiva compleja $\mathbb{CP}^1$. Es fácil comprobar que la circunferencia, el nodo simple, la cúspide ordinaria o la lemniscata de Bernoulli son curvas racionales. Sin embargo, dada una curva plana arbitraria, encontrar un procedimiento (computacionalmente implementable) para verificar si es racional o no, es un problema no-trivial. Debido a esta dificultad en las técnicas de modelado B_{41} para Informática Gráfica B_4 , se parte directamente de curvas racionales (snakes, típicamente) para construir variedades racionales (B-spines, T-splines) como producto de dos o tres curvas racionales-

La caracterización tan simple de la equivalencia birracional da entrada a los métodos de Álgebra Básica correspondiente al estudio de las extensiones del cuerpo base k correspondientes a los diferentes tipos de “objetos geométricos” (curvas inicialmente). A diferencia de las transformaciones lineales que aparecen en los grupos clásicos, las transformaciones birracionales pueden contraer o expandir elementos correspondientes al lugar de ceros de los polinomios que aparecen. Uno de los ejemplos más simples e ilustrativos está dado por las *transformaciones de Cremona* que son transformaciones cuadráticas dadas por

$$\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2 \quad | \quad [x_0 : x_1, x_2] \mapsto [x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1]$$

cuyo “lugar fundamental” está dado por la referencia estándar dada por los puntos $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ (y su dual). La extensión de este enfoque a variedades de dimensión superior presenta serios problemas salvo para el caso más simple de cuádricas que son birracionalmente equivalentes al plano vía la proyección estereográfica. Sin embargo, el plano y la cuádrica no son isomorfas. Dejan de serlo en el lugar de tangencia de la proyección, lo cual da entrada

al estudio del Lugar Discriminante (terminología común a Álgebra Básica y a Geometría Algebraica) para entender las relaciones entre los diferentes tipos de equivalencia.

Para abordar el problema de la clasificación se desarrollan diferentes métodos relacionados con el estudio de morfismos birracionalmente $f : X \rightarrow Y$ (definidos fuera de un cerrado) sobre las variedades X descritas como conjuntos de puntos. La *noción de punto* en Geometría Algebraica tiene un significado diferente dependiendo del marco elegido:

- *Marco afín* (o con más generalidad casi-proyectivo) en el que las variedades se construyen mediante el “pegado” de abiertos que son birracionalmente equivalentes a abiertos de $\mathbb{A}_k^n$. Dichos abiertos son los complementarios de cerrados definidos por la anulación de una cantidad finita de polinomios que generan un ideal I . En este caso, un punto es un ideal maximal $\mathfrak{m}_n$ generado localmente por un sistema de parámetros $(f_1, \dots, f_n)$ (que representan hipersuperficies cortándose transversalmente en el punto) que se toman como coordenadas locales y se denotan mediante $(x_1, \dots, x_n)$. Esta noción es la utilizada a lo largo del module A_{31} .
- *Marco de esquemas* en el que los puntos están dados por un ideal primo $\mathfrak{P}$ de un anillo A . Al conjunto de ideales primos de A se le denota mediante $\text{Spec}(A)$; en este caso, un punto es un elemento $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(A)$. Con esta noción, un “punto esquemático” puede representar un “punto ordinario” (dado por un ideal maximal), una curva, una superficie, etc; es decir, la dimensión topológica del soporte puede ser estrictamente mayor que uno. Asimismo, la descomposición primaria irredundante de un ideal primo $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1^{r_1} \dots \mathfrak{P}_k^{r_k}$ en sus componentes primarias $\mathfrak{P}_i$ que aparecen con multiplicidad r_i permite tratar puntos con componentes inmersas correspondientes a subvariedades no-reducidas, algo que no puede aparecer en el marco afín.

A la topología cuyos cerrados están definidos localmente por la anulación de una cantidad finita de polinomios se le llama la *topología de Zariski*. Aunque fue introducida inicialmente para variedades algebraicas afines o casi-proyectivas, la topología de Zariski se extiende de forma natural al caso analítico, así como a la Teoría de Esquemas, si bien la utilización en este último caso es más complicada y requiere un mayor conocimiento de herramientas de Álgebra Local.

Objetivos específicos

Los *objetivos específicos* afectan al estudio de propiedades de los objetos algebraicos básicos (solución de sistemas de ecuaciones algebraicas) que están dados por variedades (curvas, superficies, sólidos, etc) ó con más generalidad esquemas X , y las relaciones entre dichos objetos. Dichas relaciones se expresan en términos de morfismos que, en general, son aplicaciones racionales. Para ello,

se utilizan estructuras superpuestas (fibrados, fibraciones o con más generalidad haces).

En general, los morfismos utilizados para comparar objetos en Geometría Algebraica son racionales, es decir, están dados localmente por cocientes de polinomios; por ello, están definidas en el complementario de un cerrado correspondiente al “lugar de ceros del denominador”. En particular, las aplicaciones regulares están dadas localmente por polinomios que se pueden interpretar como cocientes f/g con $g \in \mathbb{K}$. La Geometría Algebraica Clásica define objetos módulo equivalencia birracional, mientras que la Teoría de Esquemas define objetos módulo equivalencia birregular. El análisis módulo equivalence (birracional o birregular) de objetos (variedades o esquemas) mediante morfismos se etiqueta como un *estudio relativo*, es decir, con respecto a un morfismo cuyo espacio de partida o de llegada es la variedad/esquema X .

La *caracterización de una variedad algebraica* X módulo equivalencia birracional tiene como invariante fundamental el cuerpo de fracciones $k(X)$. Por ello, los invariantes algebraicos son invariantes de $k(X)$, módulo transformaciones birracionales. Además de estos invariantes algebraicos, se tienen caracteres proyectivos, invariantes diferenciales o invariantes analíticos. Todos ellos juegan un papel muy importante para distinguir propiedades relativas a un embebimiento de la variedad en el espacio proyectivo (supuesto que exista dicho embebimiento) o bien relativas a propiedades de estructuras adicionales superpuestas (diferenciales o analíticas, típicamente).

Los *problemas de caracterización y de clasificación de objetos algebraicos* (variedades y morfismos) son, en general, muy difíciles. La caracterización intrínseca del espacio proyectivo fue realizada por Fraenkel en los 1980s; ni siquiera se conoce una caracterización intrínseca de variedades homogéneas como las variedades de Grassmann o las de banderas, p.e.. Por ello, en esta materia no se aborda el problema de la caracterización. La clasificación sigue estrategias similares a las presentadas en Geometría Diferencial A_1 ó en Topología Algebraica o Geométrica A_2 .

Una idea básica para abordar el problema de la clasificación consiste en superponer estructuras (diferenciales, algebraicas, analíticas) con invariantes más fácilmente calculables, y comparar los resultados correspondientes a cada tipo de estructura. Las estructuras superpuestas pueden ser fibrados vectoriales ξ , (pre)haces $\mathcal{H}$, fibraciones, distribuciones de campos $\mathcal{D}$ o sistemas de formas $\mathcal{P}$ (con sus correspondientes soluciones (dadas por foliaciones $\mathcal{F}$), p.e. De una forma muy simplificada, las condiciones de trivialidad topológica local de las estructuras superpuestas facilita el calculo de invariantes sobre el espacio total que, al contraer la fibra, proporcionan invariantes sobre la base.

Para variedades regulares (no singulares), la *Topología (Algebraica, Geométrica, Diferencial)* proporciona herramientas generales que son útiles para abordar los dos problemas centrales (caracterización y clasificación) en las categorías diferencial, algebraica y analítica. Sin embargo, en presencia de singularidades o variación del haz estructural $\mathcal{O}_{X,x}$ de funciones regulares dependiendo del punto base $x \in X$, el enfoque basado en calcular la cohomología a valores en

un haz constante no proporciona resultados apropiados. Es necesario incorporar la posibilidad de variación del dominio en el que toman valores las funciones que puede soportar diferentes estructuras algebraicas (grupo, anillo, módulo, cuerpo, p.e.) que dependen del punto base elegido.

Por ello, se adopta la cohomología $\check{H}(X, \mathcal{H})$ de Čech a valores en un haz $\mathcal{H}$ que representa los sistemas de tensores (funciones, distribuciones, sistemas diferenciales) a resolver. Este formalismo incluye la variación de la estructura algebraica básica (cuerpo, anillo, módulo, grupo) que asociamos en cada punto. Las relaciones entre las diferentes cohomologías proporcionan criterios para calcular invariantes que permiten discriminar entre propiedades topológicas, diferenciales, algebraicas o analíticas. El *ejemplo más simple* está dado por la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}^* \rightarrow 0$$

asociada a la aplicación exponencial $\exp : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}^*$ que permite relacionar aspectos topológicos (a coeficientes en $\mathbb{Z}$) con los relativos a las estructuras compleja y analítica, respectivamente.

El *desarrollo de herramientas* para alcanzar los objetivos específicos están relacionados con otras áreas tales como el Álgebra Conmutativa y Homológica, la Topología Algebraica y Diferencial o el Análisis de Funciones de Una y Varias Variables, especialmente en el caso complejo. Estas herramientas se aplican a los diferentes módulos que se describen en la tercera sección de esta introducción. Afectan a la construcción de estructuras superpuestas y el cálculo de invariantes asociados a dichas estructuras.

0.1.2. Métodos y Modelos

El estudio de propiedades relativas al soporte o bien a las funciones (o campos más generales) definidos sobre el soporte da lugar a la dualidad entre el enfoque morfológico y el funcional. Esta dualidad se ha desarrollado tanto en Geometría Diferencial A_1 , como en Topología Algebraica y Geometría A_2 . La dualidad entre Homología y Cohomología desarrollada en A_2 se traduce en una dualidad entre ciclos (rationales, algebraicos, homológicos, numéricos) y cociclos (duales de los ciclos) en Geometría Algebraica.

Desde un punto de vista formal (o con más precisión formal), el enfoque funcional asociado a cociclos tiene “mejores propiedades” que el enfoque morfológico basado en ciclos. Ello motiva que se priorice el enfoque cohomológico para el cálculo de invariantes asociados tanto al espacio base, como a las estructuras superpuestas (fibrados, haces, fibraciones). Como contrapartida, la interpretación de los invariantes es más difícil.

No obstante, la idea intuitiva consiste en interpretar el cociclo como una representación funcional de la solución de un sistema de ecuaciones. Cuando el cociclo es no-nulo, ello se traduce en la existencia de “algún tipo de obstrucción” a la resolución del problema (incluyendo la prolongación de soluciones en el

caso analítico). La justificación rigurosa y general de estas afirmaciones requiere elementos de Teoría de Intersección cuyo tratamiento sistemático se lleva a cabo en el módulo A_{35} .

En relación con posibles aplicaciones, una distinción básica en Ingeniería y otras Ciencias Aplicadas considera dos tipos de modelos a los que se etiqueta como *top-down* (de arriba hacia abajo) y *bottom-up* (de abajo hacia arriba). Estos tipos de modelos responden a una concepción platónica (la investigación como descubrimiento ó iluminación de algo pre-existente) o por el contrario experimental (la investigación como emergencia de patrones cada vez más abstractos a partir de “ejemplos significativos”) que es común a todas las ramas del saber y que da lugar a una mutua fertilización en casi todas las áreas.

Lamentablemente, esta realimentación es difícil de detectar en Geometría y muy especialmente en Geometría Algebraica, aunque no quiere decir que no exista, como se mostrará más abajo. Como siempre, el desarrollo de aplicaciones que incluyen herramientas cada vez más avanzadas va por delante de las mutuas descalificaciones entre los experimentalistas y los teóricos puros. La clave para la mutua interacción radica en la aproximación basada en “campos” (representantes de cociclos) y su discretización. Este enfoque es similar al que se presenta en Física y en otras áreas científicas o tecnológicas.

Lamentablemente, algunas de las figuras más sobresalientes en Geometría Algebraica en los años sesenta y setenta proclamaron la falta de aplicabilidad de la Geometría Algebraica a otras áreas del conocimiento como una de sus mayores “virtudes”, llegando a afirmar que, aunque las hubiera, no debían ser mostradas. Según esta ideología el enfoque debe ser siempre lo más general posible, desarrollando las herramientas algebraicas necesarias para ello e ignorando cualquier tipo de aplicación.

El paradigma de esta aproximación es el desarrollo de los *Éléments de Géométrie Algébrique* (EGA) y los *Séminaires de Géométrie Algébrique* (SGA) llevados a cabo por A.Grothendieck y sus discípulos a lo largo de los años sesenta, cuya influencia llega hasta la actualidad. Una espléndida introducción a este enfoque y bastante más legible que los escritos originales es el libro de R.Hartshorne, publicado por primera vez en 1977.

La aproximación basada en esquemas proporciona la primera fundamentación rigurosa de la Geometría Algebraica y la Teoría Algebraica de Números, en un marco unificado. Sin embargo, carece de utilidad para la mayor parte del conocimiento en otras áreas. Para evitar que se convierta en una actividad parasitaria es necesario llevar a cabo una reformulación conectando con la actualización de los problemas que dieron lugar al desarrollo de la Geometría Algebraica y que ha sido relegado en los manuales de la segunda mitad del siglo XX-

Por ello, en estas notas se desarrolla un enfoque diferente para la materia A_3 . Las herramientas procedentes del Álgebra Local, la Topología Algebraica y Diferencial, o el Análisis en varias variables complejas proporcionan el lenguaje apropiado para formular y resolver problemas que aparecen no sólo en

Matemáticas, sino en otras áreas científicas o tecnológicas. Este objetivo lleva a una reformulación del problema más básico como el modelado tanto morfológico como funcional. Para fijar ideas, inicialmente suponemos que el cuerpo base es $\mathbb{C}$.

Tipos de modelado

En el *modelado top-down*, se parte de conceptos muy generales que no requiere motivación o justificación y se desarrolla la Teoría que en algunos casos se ilustra mediante “ejemplos” que aparecen como casos particulares de dicha Teoría. El paradigma de este enfoque que aspira a la “totalidad” (versión omnicomprendensiva de toda la Geometría Algebraica y Analítica en la Teoría de Esquemas) está dado por los EGA y los SGA, mencionados más arriba.

En el *modelado bottom-up* se parte de una colección de “ejemplos significativos” en baja dimensión, se construyen los conceptos y se demuestran los resultados básicos de la forma más elemental posible. Una vez comprendidos, se intentan motivar las extensiones conceptuales a dimensión superior o problemas cada vez más sofisticados mediante la introducción de herramientas más avanzadas. Las mejores referencias para este enfoque son los libros de I.R.Shafarevich [Sha74] y el de P.Griffiths and J.Harris [Gri78] que desarrollan una aproximación algebraica y trascendente, respectivamente (ver más abajo).

En el modelado híbrido se trata de desarrollar una realimentación entre los dos modelos descritos. La mejor referencia para este enfoque híbrido es [Har77], donde se alternan de forma muy hábil capítulos relativos a los dos tipos de modelado, intercalando ejemplos y, en algunos casos, motivaciones que son muy difíciles de rastrear en los trabajos de Grothendieck y su escuela.

Métodos algebraicos

Una diferencia importante con respecto a la Geometría Diferencial aparece en relación con la existencia de singularidades para las variedades más simples (como p.e. $xy = 0$ en el plano que es unión de los dos ejes coordenados que es una variedad algebraica, pero no diferenciable).

Si X es una variedad afín irreducible definida por una colección finita de polinomios $f_1, \dots, f_r$, se dice que $x \in X$ es un punto regular si la matriz jacobiana $Jac(F)(x)$ tiene rango máximo donde $F = (f_1, \dots, f_r)$; en caso contrario, se dice que x es un punto singular. Al conjunto de puntos regulares de X se le denota mediante $Reg(X)$ ó bien X^0 . Al conjunto de puntos singulares de X se le denota mediante $Sing(X)$ o en ocasiones mediante $\Sigma_X = X \setminus X^0$.

Métodos trascendentes

Los métodos trascendentes son los que dependen de la topología del cuerpo base, en particular, de los complejos. El desarrollo del Análisis de Funciones

de Varias Variables Complejas desde finales del s.XIX hasta mediados del s.XX proporciona una ingente cantidad de resultados que permiten relacionar las propiedades topológicas de las integrales de formas diferenciales con las propiedades de los ciclos algebraicos sobre los que se realiza la integración. Aunque las motivaciones más importantes proceden del estudio de las soluciones de operadores diferenciales sobre variedades (diferenciales, algebraicas, analíticas), desde el punto de vista algebraico el núcleo central está dado por la Teoría de Intersección que inicialmente se formula para el caso regular complejo (Lefschetz, Hodge) y más adelante se extiende a esquemas (SGA6; Fulton, 1984).

Lefschetz extiende la dualidad de Poincaré al caso complejo y demuestra importantes propiedades relativas a la iteración del cálculo con secciones hiperplanas (típico de la Geometría Proyectiva). La naturaleza topológica de las herramientas utilizadas pone de manifiesto la necesidad de extender el marco conceptual (anticipando las nociones de amplitud introducidas en los sesenta) de manera que sea compatible con ciertas deformaciones, así como la necesidad de una representación algebraica intrínseca de este tipo de propiedades (en términos de diferentes tipos de adjunción).

La rigidez del caso algebraico con respecto a deformaciones y la necesidad de contar con parametrizaciones locales en el entorno de singularidades motivan una extensión al caso analítico. En el caso regular, esta cuestión afecta al estudio de las soluciones de operadores diferenciales sobre variedades algebraicas no-singulares. Los desarrollos sobre Teoría de Hodge (medalla Field en 1954) llevados a cabo inicialmente por K.Kodaira en su tesis (1949) y a principios de los cincuenta plantean un nuevo escenario cohomológico para resolver problemas que afectan a las soluciones de operadores definidos sobre variedades algebraicas (medalla Field en 1966).

A lo largo de los años siguientes, K.Kodaira y D.C.Spencer llevan a cabo un estudio de las deformaciones de estructuras complejas sobre variedades. Su enfoque se puede reformular actualmente en términos de (clases de) morfismos sobre variedades asociados a diferentes tipos de campos (secciones del fibrado tangente holomorfo). Este enfoque permite conectar fácilmente con cuestiones de moduli ⁵

- La descripción de las deformaciones “permitidas” se lleva a cabo en términos de la obstrucción a pertenecer a una misma clase en términos de grupos de cohomología para haces (en el sentido de J.P.Serre).
- Dos estrategias típicas para identificar clases de equivalencia en los espacios de moduli consisten en utilizar “espacios clasificantes” para variedades (estrategia similar a la utilizada en Topología Diferencial) o bien introducir relaciones entre invariantes de las estructuras superpuestas (clases características asociadas a fibrados, p.e.) que permitan garantizar algún tipo de “estabilidad” para las estructuras “genéricas”.

⁵Grosso modo, un espacio de moduli es el conjunto de clases de equivalencia de objetos por una relación $\sim$; en el contexto de esta materia, los objetos serán habitualmente “variedades” (con más generalidad, esquemas) o estructuras (fibrados o haces) sobre dichos objetos.

La Teoría de Deformaciones (asociadas a distribuciones tensoriales, p.e.) $\mathcal{D}_T$ y la de los Espacios de Moduli $\mathcal{M}$ (procedentes de la introducción de diferentes relaciones de equivalencia), desempeñan un papel fundamental en la elaboración por parte de A.Grothendieck y su escuela de la Teoría de Esquemas. Interesa dotar al espacio de moduli de una estructura tratable en términos de la Geometría Algebraica. El enfoque basado en Variedades Regulares no proporciona buenos resultados, pues por “especialización” (via deformaciones o morfismos más generales), adquieren singularidades o componentes inmersas. A continuación se introducen algunas observaciones mínimas sobre la topología correspondiente al caso singular.

A pesar de la resolución de singularidades en característica cero (Hironaka, 1963), persisten las dificultades para la prolongación analítica en presencia de singularidades y el estudio de integrales sobre ciclos evanescentes (que “colapsan” a un punto) y que dan lugar a las Teorías Mixtas de Hodge. Las obstrucciones a la deformación de ciclos se evalúan en términos de la cohomología a valores en haces de campos vectoriales que describen dichas deformaciones (Kurahishi).

La demostración por Hironaka (1963) de la existencia de una desingularización para cualquier variedad n -dimensional compleja permite extender los métodos topológicos tanto relativos a la topología global de variedades (Lefschetz, Hodge) en términos de la moderna Teoría de Intersección (Fulton), como los relativos a la topología local de las deformaciones (Kodaira-Spencer) y las obstrucciones a la deformación (Kuranishi).

La aplicación explícita de estos principios a los diferentes tipos de superficies (clasificadas inicialmente por Castelnuovo y Enriques) o de threefolds (con multitud de problemas abiertos) son áreas de investigación en la actualidad. El estudio de clases de estructuras superpuestas (fibrados, fibraciones, haces) sobre variedades ó con más generalidad de baja dimensión requieren la combinación de diferentes estrategias y está aún en sus comienzos.

Métodos híbridos

Los métodos topológicos en Geometría Algebraica ó Analítica (GAGA) son híbridos porque presentan un solapamiento de propiedades algebraicas y trascendentes. Los métodos topológicos en GAGA fueron diseñados inicialmente utilizando la topología real o compleja. El desarrollo de la topología conjuntista en el segundo cuarto del siglo XX da lugar a un enfoque independiente del cuerpo base con propiedades formales relativas a colecciones de abiertos o cerrados. La topología más natural para la Geometría Algebraica está definida por cerrados que son el lugar de anulación de una familia finita de polinomios (Zariski). En este caso, la unión finita de cerrados es un cerrado y la intersección arbitraria de cerrados es un cerrado.

Las *propiedades topológicas básicas* como la conexividad o la compacidad, juegan un papel importante, tanto desde el punto de vista del estudio de componentes como del comportamiento de especialización de propiedades entre puntos

genéricos y puntos “especiales” (eventualmente singulares). Para controlar estas propiedades es necesario adoptar el enfoque relativo, es decir, en relación con el comportamiento de estas propiedades por morfismos entre variedades algebraicas. Estas propiedades son importantes para el estudio de clases de variedades (moduli) o de sistemas de ecuaciones definidos sobre las mismas (fibrados o, con más generalidad, haces).

En la primera mitad del s.XX tienen lugar un gigantesco desarrollo de la Topología Algebraica y Geometría que permite abordar el estudio topológico de las variedades reales o complejas, conectando los enfoques local y global, así como las estructuras definidas (recubrimientos, fibrados vectoriales o principales, fibraciones) sobre ellas ⁶.

La potencia de las técnicas topológicas y el alcance de los resultados, así como el desarrollo paralelo del Álgebra Conmutativa (Van der Waerden, Chevalley, Samuel, Zariski) a mediados del s.XX, proporcionan diferentes motivaciones para el lanzamiento de un programa de investigación a largo plazo por A.Weil a principios de los cincuenta orientado hacia la algebrización de la Topología de Variedades. El *programa de Weil* (algebrización de la Topología de Variedades) es impulsado sobre todo por J.P.Serre (medalla Fields en 1954) y A.Grothendieck (medalla Fields en 1966) y su escuela, a lo largo de los años sesenta y culmina en la demostración de la versión algebraica de los teoremas de Lefschetz por P.Deligne (medalla Fields en 1978).

Desde una perspectiva topológica más clásica, la introducción de métodos homológicos y cohomológicos sigue diferentes trayectorias que afectan al soporte (complejos celulares A_{23}) o a los operadores (complejos de haces definidos sobre el soporte A_{33}). De forma complementaria, la adaptación de métodos homológicos a los grupos de homotopía de orden superior $\pi_n(X)$ (realizada en la década de los cincuenta) proporciona el soporte para la topología de los grupos clásicos (Bott). Este tipo de resultados juega un papel fundamental en la Teoría de Espacios Clasificantes y su interrelación con las teorías de (co)bordismo A_{24} .

El cálculo explícito de la cohomología de espacios homogéneos en los casos real (Stiefel-Whitney) y complejo (Chern) proporciona invariantes para (clases módulo isomorfismo de) fibrados sobre variedades de baja dimensión (curvas y superficies sobre todo). La introducción de los espacios clasificantes en Geometría Algebraica (variedades de Grassmann y de banderas) permite reformular la Geometría Enumerativa A_{35} en un contexto híbrido donde se desarrolla una mutua interrelación entre la Geometría Algebraica y la Topología Diferencial (Kleiman y su escuela).

La extensión de los métodos topológicos al caso singular presenta serias dificultades. Algunos de los precedentes más relevantes aparece en relación con las degeneraciones que puede presentar la matriz de períodos (Riemann) que se puede resolver usando la variedad de cuádricas completas ⁷. En dimensión

⁶Para más detalles ver los correspondientes módulos de Topología Algebraica A_2 y A_{42} (Fibrados) de Topología Diferencial

⁷La equivalencia entre diferentes estrategias se puede ver en la parte I de la tesis de JF

arbitraria el método de los ciclos evanescentes (Lefschetz) es clave para entender degeneración o regeneración de ciclos en el entorno de singularidades; las aplicaciones a fenómenos con una dinámica fluctuante se abordan en el módulo B_{15} (Computational Dynamics).

El primer tratamiento sistemático para abordar los cambios en la topología de variedades (utilizados frecuentemente en la Geometría Algebraica Italiana) surge inicialmente como una extensión de la Teoría de Morse. Si M es una variedad compacta y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse (puntos críticos aislados no-degenerados), la topología de M se construye mediante adjunción de células $e^k, \partial e^k \simeq (\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ cuya dimensión depende de la signatura de la matriz Hessiana $Hess(f)(\underline{x})$ en cada punto crítico $\underbrace{x}_{\in M}$ de f .

En el caso singular, en lugar de adjuntar células, se adjuntan datos tangenciales y normales de Morse que se construyen usando estratificaciones con “buenas propiedades” geométricas. Esta teoría fue desarrollada inicialmente por Goresky y MacPherson en los ochenta [Gor87]; algunos aspectos básicos se presentan en A_{35} (Enumerative Geometry) y otros más avanzados en A_{45} (Stratifications). Algunas conexiones con aspectos combinatorios (Geometría Tórica, Geometría Tropical) se comentan más abajo.

La geometría de las singularidades se aplica de forma casi inmediata a cuestiones centrales de Física Teórica utilizando la dualidad clásica partícula-onda en términos de la creación vs aniquilación de partículas, ó de la contracción vs expansión de campos. Estos principios responden a la dualidad entre aspectos morfológicos y funcionales que se ha desarrollado en varios módulos de Topología Algebraica A_2 y que reaparece en Topología Diferencial A_4 como una extensión Local vs Global del Análisis Diferencial vs Integral.

Esta estrategia juega asimismo un papel fundamental en la parte II de estas notas (Mathematical Engineering) en relación con modelos para la interrelación entre aspectos discretos y continuos. El enfoque clásico superpone PL-modelos a nubes discretas. Las técnicas de Modelado basadas en la Geometría Algebraica de variedades racionales (snakes, B-splines, T-splines) permiten extender los PL-modelos a PA-modelos (PA: Piecewise Algebraic) con una mayor flexibilidad y mejor adaptación a objetos curvados.

El enfoque basado en el pegado de variedades algebraicas de grado bajo se desarrolla en el módulo B_{41} de Computer Graphics B_4 , donde se incorpora herramientas de captura (image- or range-based information), Deformaciones de Variedades Algebraicas B_{15} (Computational Dynamics) e interacción con el medio B_{34} (Robot Dynamics). Una estrategia similar se aplica a la generación de escenas cambiantes o deformables de utilidad para la industria de contenidos multimedia ó para imágenes biomédicas, p.e.. Desde el punto de vista de la Geometría Algebraica, los restantes módulos de B_4 se pueden entender como una superposición de diferentes estructuras (fibrados, fibraciones, haces) de propiedades (radiométricas, cinemáticas, dinámicas) que culminan en la generación semi-automática de contenidos para videojuegos A_{46} .

0.1.3. Herramientas

En esta subsección se comentan algunos de los métodos algebraicos, diferenciales o topológicos de uso más común en Geometría Algebraica.

Herramientas algebraicas

Para abordar el estudio de las variedades algebraicas afines se utilizan herramientas de *Álgebra Conmutativa* que son la extensión natural de las herramientas de Álgebra Lineal mencionadas más arriba. El desarrollo de esta idea da lugar a un diccionario entre propiedades del Álgebra Conmutativa y un gran número de propiedades locales de las variedades algebraicas afines.

La completación de las variedades algebraicas afines (añadiendo “elementos del infinito”) se realiza en el espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^n$ que es el proyectivizado de $V = k^{n+1}$, es decir, $\mathbb{P}_k^n = \mathbb{P}(V) := (V - \{0\})/k^*$ donde k^* es el grupo multiplicativo de las unidades $k - \{0\}$. La completación de una variedad afín en $\mathbb{A}_k^n$ da lugar a una variedad proyectiva en $\mathbb{P}_k^n$. La (des)homogeneización es compatible con las estructuras diferencial y analítica del espacio

En principio se utiliza una noción topológica de dimensión basada en el “cómputo de parámetros”; más adelante se muestra una versión intrínseca como el grado de trascendencia del cuerpo de fracciones sobre el cuerpo base. En particular y para valores crecientes de $D = \dim(X)$ se tienen curvas, superficies, sólidos o threefolds, y con más generalidad variedades algebraicas D -dimensionales X . La reformulación intrínseca de la Geometría Algebraica en términos de ideales motiva una tercera definición de la dimensión en términos de cadenas ascendentes (Noether) vs descendentes (Artin) de ideales.

Como una extensión de aditividad de dimensiones en espacios producto, interesa dar criterios para saber cuándo X es una subvariedad de Y ó cuándo Y esta “fibrada” por subvariedades X (estructura localmente producto), p.e. La existencia de descomposiciones producto permite reducir la dimensionalidad de variedades y simplificar el problema de clasificación que ocupa un lugar central en cualquier Geometría o Topología. De forma complementaria, es importante detectar la obstrucción a que descomposiciones localmente producto se puedan extender a descomposiciones globales, incluso en el caso racional (hiperboloide de una hoja vs cilindro, p.e.). Un tratamiento más sistemático de la descomponibilidad en Teoría Algebraica de la Información se presenta en el módulo B_{12} (Computational Algebraic Topology).

Como los objetos que definen las variedades son polinomios y (salvo casos triviales), los polinomios no son inversibles, las transformaciones naturales entre variedades son las *aplicaciones racionales* de la forma ϕ/ψ donde $\phi, \psi \in k[x_1, \dots, x_n]$ son polinomios. Ello justifica la noción de equivalencia birracional para la clasificación de variedades en términos del cuerpo de funciones racionales $k(X)$ (llamados fracciones para simplificar) definidos sobre X .

Se dice que $f : X \rightarrow Y$ es una *aplicación birracional*, si es racional con

inversa racional. Como el lugar de ceros del denominador da lugar a un conjunto de puntos en los que la transformación no está bien definida, se tienen que una aplicación birracional no está siempre bien definida, es decir, no está definida en un subconjunto algebraico de la variedad X . Los problemas centrales a resolver son:

- *Caracterización:* Estudiar y caracterizar a las variedades de forma intrínseca, es decir, de forma independiente con respecto al sistema de coordenadas elegido, módulo las transformaciones birracionales. El primer *invariante algebraico* significativo de una variedad algebraica afín X es el *cuerpo de funciones racionales* que denotamos mediante $k(X)$. Por ello, se dice que dos variedades X e Y son *birracionalmente equivalentes* si $k(X) \simeq k(Y)$
- *Clasificación:* Proporcionar una colección finita de *invariantes numéricos* que permitan identificar las clases de variedades módulo la equivalencia birracional. Este problema es fácil en dimensión 1, pues esencialmente hay un único invariante birracional que es el género aritmético que denotamos mediante p_a . El problema es más complicado en dimensión 2, pero aún es tratable y bien conocido desde finales del s.XIX; cabe destacar los trabajos de G.Castelnuovo y F.Enriques que culminan en la descripción de los 5 tipos para superficies algebraicas complejas ⁸. Este problema resulta realmente difícil para variedades algebraicas o analíticas en dimensión 3 y se aborda siguiendo la estrategia propuesta por S.Mori a principios de los ochenta ⁹.

En todos los casos, el *invariante geométrico básico* con el que se empieza a trabajar es la “clase del divisor canónico” K_X que, en el caso regular, es la máxima potencia del fibrado cotangente T^*X ¹⁰. Un representante del divisor canónico K_X se puede visualizar en términos del “flujo de volumen” en el espacio abstracto de todas las diferenciales $\omega \in \Omega_X^1$ definidas sobre X . Una ventaja obvia de este enfoque consiste en que el divisor canónico es un fibrado lineal sobre X , aunque la información que contiene presenta una elevada complejidad.

El caso 1-dimensional es el más sencillo. Como $rk(K_X) = 1$, basta con calcular el número de diferenciales relativas linealmente independientes, que se visualizan fácilmente sobre la superficie de Riemann compacta M (modelo 2-dimensional de la curva compleja) como duales de los caminos no-triviales que generan el grupo fundamental $\pi_1(X)$. En dimensión mayor o igual que 2 es necesario considerar potencias $K_X^{\otimes m}$ del divisor canónico que se denotan en notación aditiva como mK_X . Intuitivamente, se pueden interpretar como “auto-intersecciones sucesivas” del flujo de volumen inicial usando deformaciones transversales.

⁸Esta clasificación fue extendida por K.Kodaira a superficies analíticas complejas a mediados de los sesenta, obteniendo otros dos tipos adicionales no algebraicos

⁹Ver el módulo 6 (Algebraic Threefolds) para más detalles

¹⁰En el caso singular, como el fibrado tangente no está bien definido, es necesario reemplazar el fibrado cotangente por el haz Ω_X^1 de las 1-formas

En el caso de variedades complejas no-singulares estos datos se controlan de forma simultánea en términos del *anillo pluricanónico*

$$R(X, K_X) := \oplus_{n \geq 0} H^0(X, nK_X) = \oplus_{n \geq 0} H^0(X, K_X^{\otimes n})$$

donde $H^0(X, nK_X)$ es el módulo de secciones de X a valores en $K_X^{\otimes n}$ para cualquier $n \geq 0$. Los *plurigéneros* P_n son las dimensiones de los módulos de secciones, es decir,

$$P_n := \dim(H^0(X, K_X^{\otimes n}))$$

La generación finita del anillo canónico fue demostrada para superficies por Zariski. El modelo proyectivo asociado al anillo canónico se llama el *modelo canónico* (Kodaira) y es la pieza central en la clasificación de superficies (Kodaira-Spencer) o de threefolds (Mori).

Por ello, las nociones relacionadas con el anillo pluricanónico $R(X)$ proporcionan el punto de partida para los problemas de caracterización y clasificación en dimensión arbitraria. Las propiedades básicas se presentan en A_{32} (Quasi-projective varieties). Esta inclusión se justifica por la existencia de la *n-ésima aplicación canónica* asociada al sistema de divisores correspondiente al *n-ésimo divisor pluricanónico* K_X^n que da un embebimiento en el espacio proyectivo $P_g - 1$ -dimensional $\mathbf{P}(H^0(X; K_X^n))$ siendo $P_g = \dim(H^0(X; K_X))$.

La *conjetura fundamental de la Geometría Birracional* (ahora Teorema) postula que el anillo pluricanónico está finitamente generado. Este resultado (central en el programa de Mori) fue demostrado por C.Birkar, P.Cascini y C.D.Hacon (2010). En estas notas no se aborda el problema de clasificación con toda su generalidad. Sólo se abordan los casos unidimensional A_{11} (Algebraic Curves), 2-dimensional en A_{34} (Surfaces) y 3-dimensional en A_{36} (Threefolds) para el caso complejo.

Salvo en el módulo A_{33} (Sheaves, Cohomology, Schemes) la mayor parte del enfoque desarrollado en estas notas para Geometría Algebraica se realiza sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. La extensión a cuerpos algebraicamente cerrados es inmediata). en este contexto, el estudio de una variedad X es el estudio de los puntos con coordenadas complejas que verifican sistemas de ecuaciones $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ para $1 \leq i \leq r$. La extensión de este enfoque al caso real presenta una dificultad bastante mayor y ha dado lugar a la Geometría Algebraica Real que no se aborda en esta materia. Algunos aspectos básicos se presentan en el módulo A_{45} (Stratifications) de A_4 (Differential Topology).

Otra extensión muy importante concierne al estudio de soluciones de sistemas de ecuaciones algebraicas con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{Q}$ de números racionales o bien en otros cuerpos de números que dan lugar a la Geometría Aritmética de gran interés en relación con sus aplicaciones a Criptografía. Estos tópicos tampoco se abordan en este Curso.

Herramientas diferenciales

La aplicación de las herramientas del Análisis o la Geometría Diferencial a objetos algebraicos tiene una vertiente diferencial y otra integral. Para ello, se adaptan argumentos de linealización similares a los presentados en Geometría Diferencial de Variedades A_1 . Recordemos que la linealización de una aplicación $f : X \rightarrow Y$ entre dos variedades no-singulares se lleva a cabo en cada punto mediante la aplicación tangente $T_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ en cada punto $s \in X$, donde $T_x X$ (resp. $T_{f(x)} Y$) representa el espacio tangente a X (resp. Y en el punto $x \in X$ (en $f(x) \in Y$). El pegado de estos datos locales da lugar al fibrado tangente $\tau_X = (TX, \pi, X)$ (análogamente para Y).

El carácter curvado, la existencia un operador de anti-conjugación en el caso complejo y, sobre todo, la posible aparición de singularidades da lugar a que la extensión de los métodos diferenciales a integrales al caso complejo no sea inmediata. En este paragraph se esbozan algunas ideas básicas

- *Aspectos diferenciales:* El espacio tangente no está definido geoméricamente en el lugar singular. En este caso, el objeto inicial a estudiar es la diferencial $d_x f : f^* \Omega_{Y, f(x)}^1 \rightarrow \Omega_{X, x}^1$, donde $\Omega_{X, x}^1$ es el álgebra de las diferenciales sobre el anillo local base $\mathcal{O}_{X, x}$. Por dualidad, se tiene la definición algebraica del *espacio tangente* $\Theta_{X, x}$ como álgebra de las derivaciones sobre el anillo local base $\mathcal{O}_{X, x}$, que es la fibra del haz tangente Θ_X .
- *Aspectos integrales:* La extensión del Cálculo Integral a variedades complejas presenta aspectos no triviales incluso para el caso de curvas algebraicas complejas (o su versión topológica como superficies), la presencia de ciclos no contractibles a un punto da lugar a cálculos definidos módulo períodos (Cauchy, 1826) o bien a expresiones que no son calculables de forma exacta con relaciones internas características (matrices de períodos). Ello se debe a que los dominios de integración no son simplemente conexos (Abel, 1823).

El primer estudio sistemático de las funciones multivaloradas que requieren una modificación del Análisis Diferencial e Integral para el caso complejo fue llevado a cabo por B.Riemann (1856) quien introdujo la noción de variedad con “múltiples capas” (Mannigfaltigkeiten) asociadas a diferentes “determinaciones” para proporcionar un soporte a este estudio. La introducción de una colección de “cortes” que convierten a la variedad en un objeto simplemente conexo permite reducir el estudio de funcionales (diferenciales e integrales) sobre una variedad arbitraria al caso clásico.

El formalismo del Cálculo Exterior (Grassmann) desarrollado para variedades suaves M en el módulo A_{14} se extiende de forma inmediata al álgebra exterior graduada

$$\Lambda^* \Omega_X := \bigoplus_{m \geq 0} [\Lambda^m \Omega_X^1]$$

que proporciona el marco para el estudio de sistemas de formas diferenciales sobre una variedad algebraica, con los correspondientes problemas de integrabilidad (tipo Frobenius) para sistemas $\mathcal{S}$ de formas diferenciales sobre X . La integración efectiva se lleva a cabo adaptando el Teorema de Stokes A_{15} . Para gestionar la “indeterminación” (módulo formas exactas) se adopta un enfoque cohomológico, donde las integrales están definidas módulo las formas exactas, tanto para el caso real (Cartan) como el complejo (Hodge), con sus correspondientes cohomología real (DeRham) vs compleja (Hodge, Dolbeault). En todos los casos, la combinatoria del álgebra de Grassmann y su interpretación dual en términos de ciclos soporte (Schubert) juega un importante papel.

La parte básica de este estudio se realizó para curvas a lo largo del s.XIX utilizando herramientas del *Análisis Complejo* y tiene múltiples aplicaciones en diferentes áreas de la Física e Ingeniería. La noción clave del Análisis de Funciones Analíticas de Una o Varias Variables Complejas es la condición de holomorfía para funciones que, en el caso complejo, equivale a la condición de analiticidad (desarrollo en serie convergente para cada punto).

La condición de holomorfía se expresa mediante igualdades entre las derivadas parciales cruzadas (con los signos apropiados) que presenta una semejanza formal con las ecuaciones de Hamilton-Jacobi para la Mecánica conservativa. Esta semejanza formal se explota en la Geometría Diferencial Compleja, donde el grupo estructural para las variedades Kaehler es la intersección del grupo lineal general complejo, el ortogonal y el simpléctico, correspondiente al solapamiento de las estructuras compleja, Riemanniana y simpléctica. Este solapamiento explica las aplicaciones inmediatas a la Mecánica Clásica y desarrollos más recientes en Física Teórica.

Desde el punto de vista geométrico, la compatibilidad local de las relaciones de integrabilidad se interpreta como la verificación simultánea de restricciones estructurales a verificar sobre el fibrado tangente (en el caso regular) o sobre las diferenciales holomorfas (en el caso singular) y sus potencias tensoriales. De forma complementaria, la no-integrabilidad de sistemas $\mathcal{S}$ de formas o de distribuciones $\mathcal{D}$ de campos se expresa en términos de la no-anulación de la correspondiente cohomología (DeRham-Hodge vs Spencer).

Los dos aspectos anteriores relativos al cálculo diferencial e integral ponen de manifiesto la importancia de estudiar las (integrales de las) formas diferenciales holomorfas definidas sobre una variedad X . Este estudio fu iniciado por Abel en el primer cuarto del s.XIX en términos inicialmente de integrales elípticas extendida a hiperelípticas; ambas se etiquetan actualmente como integrales abelianas.

El problema tiene una componente diferencial que afecta a la descomposición en diferenciales independientes (secciones de un fibrado) y su integración. Lamentablemente, la integración efectiva rara vez es posible y tan sólo se dispone de relaciones entre las integrales de formas diferenciales. El primer resultado se debe a Cauchy (Teorema de los residuos). Estas relaciones han sido estudiadas desde Riemann (1857) hast P.A.Griffiths en la segunda mitad del siglo XX.

En el marco diferencial, el cálculo del rango del fibrado de formas diferenciales holomorfas da lugar a los Teoremas tipo Riemann-Roch sobre variedades que constituyen un tópico central dentro de la Geometría Algebraica. Si X es una variedad no-singular n -dimensional entonces el fibrado canónico $K_X := \Omega_X^n$ juega un papel fundamental para los problemas de clasificación y caracterización.

En el caso diferenciable real, este objeto es el fibrado de Euler $\Lambda^n \tau_X$ y su clase de cohomología es la clase de Euler $e(X)$ que desempeña un papel fundamental en relación con cuestiones de clasificación de fibrados e integración de formas diferenciales. El enfoque integral requiere elementos adicionales de cohomología que se presentan en el módulo A_{33} (Sheaves, Cohomology, Schemes). La versión diferencial tiene una interpretación mucho más sencilla ¹¹

En Geometría Diferencial los criterios más simples de comparación entre variedades se basan en el fibrado tangente $\tau_M = (TM, \pi, M, \mathbb{R}^m)$ o su dual τ_M^* . La presencia de singularidades para variedades algebraicas o analíticas X da lugar a que no exista el fibrado tangente. En su lugar se utiliza el cotangente Ω_X^1 , pues tiene mejores propiedades funtoriales. Si X es una variedad algebraica o analítica n -dimensional, el haz canónico $\Omega_X^n := \Lambda^n \Omega_X^1$ es un fibrado de rango 1. En Geometría Diferencial(variedades suaves) el haz canónico es el fibrado determinante que es de rango 1 ¹².

La comparación entre variedades algebraicas o analíticas se lleva a cabo en términos de las secciones de las potencias K_X^m del divisor canónico que se describen también en la notación aditiva para divisores mK_X . En el caso singular es necesario reemplazar el fibrado tangente τ_X por el haz cotangente Ω_X^1 , y el fibrado canónico K_X por el haz dualizante ω_X , obteniéndose resultados básicos similares cuando se recurre a la desingularización de X ¹³

Las propiedades de las potencias del divisor canónico y sus productos con otras estructuras superpuestas (fibrados o haces localmente libres en el caso más simple) es clave para la clasificación de superficies. De hecho, la clasificación de superficies de Castelnuovo-Enriques utiliza estas propiedades¹⁴. Este estudio ha extendido asimismo al caso de dimensión arbitraria, aunque no se tenga una descripción tan completa y compacta como para el caso de superficies que se aborda en el módulo A_{34} (Superficies). El tópico relacionado más importante es la clasificación de variedades complejas de dimensión tres, dentro del programa de S.Mori (1988). Para una presentación reciente ver [Mat02] ¹⁵

¹¹Ver capítulo 4 de A_{42} (Topología de Fibrados) en A_4 (topología Diferencial).

¹²Las funciones de transición del fibrado determinante del fibrado tangente son los determinantes de las funciones de transición del fibrado tangente τ_M , es decir, el determinante de la matriz Jacobiana.

¹³La existencia de una desingularización para dimensión arbitraria sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero fue demostrada por Hironaka (1963). El caso correspondiente a *característica arbitraria* para dimensión ≥ 2 aún sigue abierto.

¹⁴Más detalles en Shafarevich (1968), Beauville (1973), Hartshorne (1977), Griffiths and Harris (1978) ó Barth, Peters and Van de Ven (1985).

¹⁵K.Matsuki: *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, 2002.

Herramientas analíticas

De una forma muy esquemática se pueden distinguir herramientas basadas en Álgebra Local, Deformaciones ó en Cohomología. Algunos de los problemas que han motivado el desarrollo de estas técnicas están relacionados con la resolución de singularidades, las relaciones entre los diferentes tipos de clasificación y la identificación de invariantes.

La existencia de una singularidad $x \in \text{Sing}(X)$ se manifiesta geoméricamente en términos de un número finito de ramas de X irreducibles a través de dicho punto. El Teorema Preparatorio de Weierstrass permite construir parametrizaciones locales para cada una de las ramas que están representadas por desarrollos en serie convergentes. En el caso más simple, se trata de una colección finita de arcos $1D$ que satisfacen las ecuaciones $f_1 = \dots f_r = 0$.

Los métodos de Álgebra Local se aplican tanto para variedades algebraicas como analíticas¹⁶, gracias a las propiedades de finitud (Noether, Artin) de los módulos considerados. Sin embargo, la extensión de estos métodos a los espacios de arcos usando argumentos asociados a la topología de los coeficientes (número infinito de indeterminadas) aún presenta una gran cantidad de problemas abiertos relacionados con la no disponibilidad de teoremas de desingularización en característica arbitraria.

La extensión de la resolución de singularidades al caso de característica positiva es bien conocida para el caso $1D$ (versión algebraica de los desarrollos en serie de Puiseux), pero su extensión a casos de dimensión mayor $D > 1$ presenta una dificultad bastante mayor; en particular, sólo es conocida para tipos particulares de singularidades. En esta materia,, salvo para el caso de curvas, no se abordan las cuestiones relacionadas con la Resolución de Singularidades en dimensión superior ≥ 2 . Una presentación de estos resultados se puede ver en [Aro18]¹⁷

Como es habitual en cualquier Geometría, el caso de curvas es el mejor conocido desde diferentes puntos de vista. A lo largo de los siglos XIX y XX se han demostrado una gran cantidad de resultados que relacionan los enfoques trascendente, algebraico, diferencial e infinitesimal (atendiendo al orden histórico de aparición). El estudio de las deformaciones juega un papel fundamental para relacionar diferentes estrategias. Este estudio permita identificar propiedades de los espacios de moduli (clases de equivalencia) y relacionar diferentes clasificaciones.

El enfoque local usual utiliza herramientas de tipo analítico basadas en campos “regulares”. Este enfoque permite “trasladarse” a lo largo de singularidades con características similares tales como “equimultiplicidad” en el caso más simple o equisingularidad para un análisis más fino. Sin embargo, es incapaz de representar transiciones entre diferentes tipos de singularidades, tales como diferente multiplicidad o tipo de equisingularidad.

¹⁶Ver S.Abhyankar: *Local Analytic Geometry*, Academic Press

¹⁷J.M.Aroca, H.Hironaka, and J.L. Vicente: *Complex Analytic Desingularization*, Erg. der Math und ihrer Grenzgeb. 450, Springer-Verlag, 2018.

Para incluir estas “transiciones”, en el módulo A_{43} (Singular function-germs) introducimos álgebras de operadores nilpotentes que están asociados a la conservación de la $\mathcal{R}$ -órbita de una singularidad simple aislada por la acción del grupo de los difeomorfismos que conservan la $\mathcal{R}$ -órbita. La traslación al caso analítico es obvia, pero la adaptación a gérmenes de aplicaciones singulares A_{44} a singularidades no-aisladas en dimensión superior en variedades estratificadas A_{45} presentan una mayor complejidad que requiere herramientas computacionales aún por desarrollar B_{13} (Computational Differential Topology).

La cohomología de DeRham es bien conocida para variedades suaves reales o complejas (Poincaré, Cartan. DeRham.Hodge, Dolbeault), para variedades algebraicas (Grothendieck, 1968) y para Espacio Analíticas (Bloom y Herrera, 1969). La homología de Borel-Moore (1950) y la cohomología de haces (Serre, Grothendieck) proporcionan el soporte inicial para un tratamiento unificado; el libro de Godement proporciona una buena introducción para aspectos topológicos y el de Bredon para cuestiones más avanzadas que incluyendo aspectos analíticos.

Sin embargo, ninguna de las referencias anteriores aporta detalles significativos en relación con las deformaciones y sus propiedades topológicas (Kodaira-Spencer). Los desarrollos analíticos presentan una mayor complejidad en relación con aspectos formales (vinculados a la compleción de series en el anillo local), la posibilidad o no de prolongación analítica, la representación de las acciones (algebraicas, infinitesimales, analíticas), la relación con los operadores integrales asociados (invariantes o no por la acción de un grupo), las restricciones impuestas por la topología global del soporte.

A diferencia del enfoque global dado habitualmente en variedades suaves, la cohomología de espacios analíticos está enfocada hacia el marco local. En particular, la imposibilidad en la prolongación de soluciones analíticas se traduce en la no-anulación de la cohomología analítica. La cohomología analítica local proporciona herramientas para la gestión de deformaciones asociadas a las clases de cohomología de diferentes tipos de campos vectoriales (Spencer). En esta materia consideramos sobre todo deformaciones dadas por campos algebraicos A_{22} y analíticos A_{23} . En A_{43} y A_{44} se consideran campos suaves.

Una ventaja de la cohomología analítica local consiste en la ausencia de holonomía (Mebkhout, 1976). Esta ventaja sólo es aparente, pues hay multitud de fenómenos en Mecánica (y sus aplicaciones a Robótica) donde la holonomía se presenta de forma natural. Por ello, la cohomología analítica local no puede explicar estos fenómenos. No obstante, las aplicaciones que tiene para el estudio de deformaciones de (gérmenes de) curvas y superficies, justifican que la atención que se les presta en los módulos A_{33} (para cuestiones formales) y A_{34} (para aplicaciones a superficies).

Herramientas topológicas

Las herramientas topológicas se aplican inicialmente para construir variedades casi-proyectivas mediante el “pegado” de variedades afines, es decir, conte-

nidas en $\mathbb{A}_k^n$. Con más generalidad, una variedad n -dimensional casi-proyectiva X se describe como una colección de pares $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ donde los abiertos U_α recubren X son birracionalmente equivalentes a abiertos de $\mathbb{A}_k^n$ y la aplicación $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}$ es birracional.

La definición anterior es similar a la que se presenta en Geometría Diferencial, con la única salvedad de reemplazar la noción de C^r -equivalencia con respecto a abiertos de $\mathbb{K}^n$, por la de equivalencia birracional. Por ello, de una forma un tanto vaga, se puede decir que una variedad casi-proyectiva compleja se obtiene “pegando” trozos que son localmente equivalentes a abiertos de $\mathbb{A}_k^n$.

La Geometría Algebraica de Variedades Casi-proyectivas A_{332} se puede considerar como una prolongación natural de la Geometría Proyectiva Algebraica. Los métodos básicos de la Geometría Proyectiva utilizan operaciones de proyectar y cortar; por ello, si una variedad algebraica está inmersa en el espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^n$ parece lógico extender las operaciones de proyectar y cortar, pero de manera compatible con el contexto birracional. El grado es un invariante proyectivo, pero no es un invariante birracional.

Por ello, es necesario extender las nociones básicas asociadas a proyecciones (que en el caso diferencial son la expresión local de submersiones) y secciones (que en el caso diferencial regular proporcionan la expresión local de inmersiones y, en algunos casos, de embebimientos). Esta observación sugiere extender los métodos proyectivos clásicos al estudio de morfismos propios y de inmersiones, que se controlan en términos de familias de funciones (prehaces) verificando condiciones de compatibilidad. Las diferentes nociones de amplitud permiten formalizar la idea de inmersión atendiendo a diferentes propiedades algebraicas.

Si M es una variedad diferenciable m -dimensional, en Geometría Diferencial se construye el complejo de DeRham $H_{DR}^*(M; \mathbb{R})$ asociado a las k -formas diferenciales cerradas (es decir, tales que su diferencial es nula) módulo las k -formas diferenciales exactas (es decir, que son imágenes de una $(k-1)$ -forma); esta construcción está justificada porque las formas diferenciales exactas tienen integral nula, por lo que su introducción no altera el valor de los operadores integrales a considerar.

La construcción del complejo de DeRham $H_{DR}^*(M; \mathbb{R})$ se extiende formalmente a variedades algebraicas más generales y permite obtener una gran cantidad de *invariantes topológicos* (de la clase de homotopía de la variedad M), como son los números de Betti $\beta_i(M) := \dim_{\mathbb{R}}(H_{DR}^i(M; \mathbb{R}))$, cuya suma alternada proporciona la característica de Euler-Poincaré $\chi(M)$ de la variedad M .

$$\chi(M) := \sum_{i=1}^m (-1)^i \beta_i(M) := \sum_{i=1}^m (-1)^i \dim_{\mathbb{R}}(H_{DR}^i(M; \mathbb{R}))$$

Si X es una variedad algebraica *compleja no-singular* se puede construir un complejo diferencial similar usando el operador $\bar{\partial}$ al que se llama el complejo de Dolbeault $H_{\bar{\partial}}^*(X; \mathbb{C})$. El cálculo de la cohomología con respecto al operador $d = \partial + \bar{\partial}$ o con respecto al *operador de Laplace* $\Delta = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial$ proporciona

una descomposición de la cohomología a valores complejos, incluyendo representantes armónicos para la segunda. Los rangos de los grupos de cohomología asociados a dichas descomposiciones proporcionan los invariantes topológicos más importantes. El primero en estudiar estas descomposiciones de una forma sistemática fue W.Hodge; por ello, la descomposición de la cohomología compleja lleva su nombre.

Estas construcciones topológicas eran esencialmente conocidas a mediados de los cincuenta. Entre otras cosas, proporcionan un soporte *topológico* para el cálculo de números de intersección asociados a bases de ciclos en variedades algebraicas, formalizando los resultados de la Escuela de Geometría Algebraica Italiana (liderada por F.Severi y sus colaboradores). Sin embargo, nada garantiza que los representantes elegidos sean algebraicos, ni tampoco que las deformaciones a realizar para relacionar ciclos se realicen en la categoría algebraica.

El programa de A.Weil consiste en extender el enfoque topológico ó diferencial al marco algebraico. Las contribuciones más importantes tienen lugar a finales de los cincuenta por parte de J.P.Serre y A.Grothendieck con la introducción de los haces algebraicos coherentes, la cohomología a valores en un haz coherente y el desarrollo de una dualidad que extiende las cohomologías con coeficientes constantes anteriores (DeRham, Dolbeault, Hodge). Estas cuestiones se abordan con más detalle en la introducción s los módulos 3 (haces y cohomología) y 4 (Superficies y Ciclos Algebraicos), por lo que se remite a dichos módulos para más detalles.

Sobre una variedad algebraica o analítica, existen *diferentes tipos de puntos*. Una primera distinción concierne a puntos regulares vs puntos singulares; otras distinciones más finas conciernen a puntos con coordenadas complejas, reales, racionales o a valores en otro cuerpo. Por otro lado, los puntos singulares pueden aparecer con elevada multiplicidad, que se representa como una información “embebida” dentro de fibras especiales a las que puede degenerar la fibra genérica.

Si cada uno de estos objetos algebraicos lo representamos como una “fibra” (stack), la variación que puede aparecer en la fibra presenta un comportamiento mucho más variado que en el caso de fibrados vectoriales, pudiendo incluir singularidades a lo largo de la “evolución” del sistema. Por ello, es necesario “debilitar” la estructura inicial de fibrado, permitiendo “saltos” en las estructuras algebraicas (anillos, cuerpos o módulos) asociadas a cada punto.

Las nociones clave para formalizar este punto de vista están dadas por prehaces y haces. La resolución de ecuaciones en A -módulos (dependientes de cada punto) o la obstrucción a dicha resolución se lleva a cabo en términos de la cohomología a valores en un haz. En particular, la introducción de haces $\mathcal{F}$ asociados a diferentes tipos de estructuras superpuestas a la variedad X permite definir formalmente la cohomología $H^*(X, \mathcal{F})$ a valores en un haz e introducir la característica de Euler-Poincaré del haz $\mathcal{F}$ como

$$\chi(\mathcal{F}) := \sum_{i=1}^m (-1)^i \beta_i(\mathcal{F}) := \sum_{i=1}^m (-1)^i \text{rank}(H^i(X; \mathcal{F}))$$

Estos tópicos se desarrollan de una forma sistemática a partir del tercer módulo.

El fenómeno de la *especialización* incluyendo cambios de multiplicidad y posibles degeneraciones ya era conocido en la Geometría Enumerativa del último cuarto del s.XIX, pero su formalización se había revelado como un problema bastante difícil ¹⁸. A lo largo de los años treinta se desarrollan diferentes versiones de la noción de especialización (algebraica, topológica, diferencial), si bien las relaciones entre las diferentes nociones son bastante complicadas de describir ¹⁹.

Así, p.e. la “especialización” de un punto genérico a un punto singular cambia el comportamiento de los datos más importantes relacionados con el anillo local $k[\underline{x}]/I$ (donde I es un ideal) y los objetos asociados como el cuerpo de fracciones, los módulos de derivaciones o los de diferenciales, o con más generalidad los diferentes tipos de tensores (productos de derivaciones y diferenciales, p.e.) que podemos considerar sobre cada punto.

La información embebida que pueden contener puntos o, con más generalidad, “ciclos” en variedades ²⁰, se formaliza en términos de esquemas que se presentan en el módulo A_{33} y se desarrollan con más profundidad en el módulo A_{35} . Intuitivamente, un ciclo puro k -dimensional es una combinación lineal de (clases de equivalencia de) subvariedades k -dimensionales.

Así, la noción de ciclo proporciona un marco general para abordar el estudio de variedades o, con más generalidad, espacios algebraicos o bien analíticos X , incluyendo eventualmente componentes singulares o inmersas (con multiplicidad arbitraria). Asimismo, facilitan un soporte para el cálculo de invariantes que se describen en términos de la cohomología a valores en un haz $\mathcal{H}$. Las primeras dificultades para la manipulación formal de los ciclos (mediante operaciones aritméticas) surgen en relación con la diversidad de nociones de equivalencia (racional, algebraica, homológica, numérica) para los ciclos y la presencia de torsión.

Desde un punto de vista formal, es más sencillo desarrollar el enfoque funcional, es decir, basado en estructuras superpuestas, de forma similar a como se había realizado en Geometría Diferencial en términos de distribuciones de campos tensoriales. A la vista de las limitaciones formales que presentan los fibrados ²¹, el lenguaje de haces facilita la reformulación de las propiedades formales (J.P.Serre, FAC, 1956)..

Existen muchos tipos de haces que representan diferentes estructuras (dadas localmente por sistemas de ecuaciones, distribuciones, sistemas de formas, etc)

¹⁸Esta cuestión fue planteada por D.Hilbert como Problema Decimoquinto en su conferencia de Paris (1900) y dio lugar al desarrollo de la Teoría de Intersección a lo largo del s.XX

¹⁹Estas cuestiones se desarrollan en el módulo A_{35} (Geometría Enumerativa) de esta materia

²⁰Intuitivamente, un ciclo k -dimensional Z es una combinación formal $\sum_{\alpha} n_{\alpha} V_{\alpha}$ de variedades k -dimensional V_{α} .

²¹El núcleo o el conúcleo de un morfismo entre fibrados no tiene por qué ser un fibrado, p.e.

superpuestas a X . La cohomología de Čech proporciona un método general para calcular sus invariantes. La no anulación de la cohomología $\check{H}(X; \mathcal{F})$ a valores en un haz $\mathcal{F}$ representa la imposibilidad (obstrucción) de resolver el sistema de ecuaciones de forma global.

La clase dual de esta cohomología está soportada por ciclos con topología no-trivial sobre las variedades o espacios. Por ello, las relaciones entre las clases de cohomología se traducen (por dualidad) en relaciones entre los ciclos. Como es habitual, existen diferentes tipos de dualidad (Poincaré, Lefschetz, Pontrjagine, Hodge, p.e.). La cohomología de haces desarrollada inicialmente por J.P.Serre (1956) proporciona el punto de partida para todas ellas ²².

Desde el punto de vista dual, las cuestiones relacionadas con ciclos (como combinaciones lineales formales de subvariedades) proporcionan una extensión natural del estudio de subvariedades en Geometría Diferencial A_1 . Por ello, son ubicuas en cualquier Geometría. En el caso de la Geometría Algebraica, los ciclos cruzan transversalmente todos los módulos de esta materia A_3 , apareciendo en diferentes contextos tales como

1. La GA de curvas A_{31} en relación con los teoremas de Bézout, $AF + BG$ de Noether, o propiedades de series lineales (Castelnuovo, Severi), p.e.;
2. la GA de variedades algebraicas casi-proyectivas A_{32} en relación con diferentes bases de ciclos extendiendo (Hodge) el enfoque inicial de Picard-Lefschetz, p.e.;
3. la cohomología de haces A_{33} proporcionando el soporte para la dualidad de Serre-Grothendieck en resultados centrales como el Teorema de Riemann-Roch-Hirzebruch, p.e.;
4. GA de superficies A_{34} en relación con cuestiones de clasificación (Enriques) o de deformaciones de divisores (Kodaira, Spencer) contenidas en la superficie.
5. La Geometría Enumerativa A_{35} vinculados a los diferentes tipos de equivalencia, el cálculo de números de intersección, o las propiedades de adjunción, p.e.
6. Variedades de dimensión tres A_{36} en relación con propiedades del divisor canónico (haz dualizante en el caso singular) o la clasificación en términos de los diferentes anillos de intersección, p.e..

Además, la geometría de los ciclos está presente en aplicaciones a la Física Teórica como las relacionadas con el número de “cuerdas” (curvas racionales) que proporcionan soluciones minimales en las Teorías de Gran Unificación (GUT). En la parte II de estas notas se introducen algunas aplicaciones básicas vinculadas a la gestión de “redes pesadas” en la Mecánica Computacional de

²²Esta dualidad aparece por primera vez con toda su generalidad en la conferencia dada por A.Grothendieck en el ICM de Edimburgo (1958) para haces coherentes

Medios Continuos B_1 , el seguimiento simultáneo en secuencias de video B_2 , la gestión de la Navegación Automática en Robótica B_3 ó la “interacción pesada” entre diferentes agentes para Simulación y Animación en Informática Gráfica B_4 .

0.1.4. Relaciones con otras áreas matemáticas

Las variedades algebraicas son ubicuas en todas las áreas de Matemáticas y sus aplicaciones. Ello se debe a que localmente están descritas por la anulación de polinomios que son las funciones más simples no-lineales que se pueden describir. Por ello, aparecen de forma explícita o implícita en relación con la simplificación de modelos inicialmente no-lineales que se formulan en el marco diferencial o analítico. En particular, las expresiones polinomiales se pueden interpretar como una “truncación” del desarrollo de Taylor de dichas expresiones ²³

El solapamiento con el Álgebra Local (Conmutativa y Homológica) o la Teoría Algebraica de Números es tan grande que a veces resulta imposible distinguir si se está hablando de estas áreas o de Geometría Algebraica. De hecho, para una gran cantidad de resultados hay un diccionario que permite transvasar resultados entre dichas áreas, como una cuestión de lenguaje. En esta subsección sólo se consideran las áreas cercanas pero disjuntas (por razones de método o de objetivos) con respecto a la Geometría Algebraica.

No obstante y a pesar del empeño en borrar pistas o motivaciones procedentes de otras áreas, buena parte de los desarrollos se pueden rastrear en otras áreas. En particular, los haces de Partes Principales (Grothendieck) proporcionan la versión GAGA de los desarrollos que habían tenido lugar a finales de los cincuenta y principios de los sesenta en relación con la topología de los espacios de k -jets (Thom, Mather). La utilización de los Haces de Partes Principales para cuestiones de contacto apenas alcanza a tratar la clasificación de gérmenes de funciones A_{43} y de aplicaciones A_{44} que se desarrolla en Topología Diferencial A_4 .

Algunas conexiones con la Topología

La *Topología General* o conjuntista se ocupa de problemas de caracterización y clasificación de espacios topológicos módulo homeomorfismos. La dificultad para describir criterios efectivos de homeomorfismos motiva la introducción de propiedades (conexión, compacidad, etc) y la superposición de PL- ó PS-estructuras asociadas a la Topología Algebraica o la Diferencial, respectivamente.

Las condiciones de conexividad son cruciales para controlar el comportamiento de propiedades o caracteres por deformación, incluyendo argumentos de degeneración. Las condiciones de compacidad son cruciales tanto desde el punto de vista local (convergencia de sucesiones, p.e.) como global (mantenimiento de

²³La equivalencia (modulo difeomorfismos o transformaciones bianalíticas locales) del k -jet $j^k f$ con $f \in C^r(n, p)$ es un tópico central en Topología Diferencial A_4

propiedades por morfismos, construcción de subvariedades, finitud para morfismos, p.e.).

De forma complementaria, la necesidad de mantener el marco algebraico, motiva la introducción de relaciones de equivalencia más estrictas que permitan garantizar que la deformación de una variedad algebraica (resp. racional) siga siendo algebraica (resp. racional). Este enfoque tiene aplicaciones inmediatas al modelado 3D de objetos B_{41} ó a la simulación y animación de objetos en movimientos B_{44} , p.e.

Aunque una variedad algebraica sea un espacio topológico, una aplicación birracional no es, en general, un homeomorfismo (no está siempre definida). Sin embargo, en el complementario de un cerrado las propiedades topológicas básicas se pueden recuperar y resultan de gran utilidad para analizar componentes conexas o morfismos propios, en relación con la conexión o la compacidad, respectivamente.

A mayores, la condición de ser propio se mantiene para la composición de morfismos y cambios de base (incluyendo productos cartesianos). La condición de ser propio para morfismos birracionales juega un papel similar a las condiciones de compacidad en Topología General. Estas condiciones justifican la importancia del Teorema de Conexividad de Zariski o la ubicuidad de morfismos propios en todo tipo de aplicaciones entre variedades.

Por otro lado, para variedades algebraicas que admitan un embebimiento en un espacio afín o en un espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^n$, es posible construir descomposiciones (simpliciales, singulares o celulares) que facilitan el estudio de propiedades extrínsecas (dependientes del embebimiento) de la variedad. La aplicación de Weingarten (extensión de la indicatriz de Dupin para curvas) es clave en la Geometría Diferencial de Superficies para “controlar” la variación de la información normal. Las relaciones entre la Primera y la Segunda Forma Fundamentales para Superficies en $\mathbb{R}^3$ proporciona la clave para relacionar las geometrías intrínseca y extrínseca de superficies.

El desarrollo de un análisis similar en Geometría Algebraica para Variedades eventualmente singulares es un poco más complicado. Es necesario reemplazar fibrado normal $N_{Y/X}$ de una subvariedad Y de X por el haz conormal. El soporte del haz conormal proporciona los invariantes (clases de cohomología) que relacionan aspectos intrínsecos -asociados al fibrado tangente τ_X (o el haz cotangente Ω_X^1 en el caso singular) con aspectos extrínsecos relativos a cada inmersión $f : X \rightarrow Y$. Para ello, se sigue una estrategia similar a la presentada en Geometría Diferencial.

En Topología Diferencial se muestran diferentes procedimientos para construir subvariedades usando embebimientos o submersiones verificando condiciones adicionales de transversalidad. Estas estrategias se trasladan de forma natural a la Geometría Algebraica. Esta reformulación incluye el papel dual jugado por el núcleo y el conúcleo de morfismos entre variedades.

En particular, el estudio de inmersiones y embebimientos se describen usando condiciones de “amplitud”; de forma similar, una extensión al caso singular de

las submersiones a las fibraciones topológicas A_{24} permite desarrollar un estudio de “familias” de variedades algebraicas o analíticas introducidas originalmente de una manera más informal en la Geometría Algebraica Italiana de la primera mitad del siglo XX.

Desde un punto de vista global, la cohomología ordinaria a valores en un haz constante (singular, DeRham, Dolbeault) se extiende de forma natural a la cohomología a valores en un haz. Esta extensión (que se desarrolla en el módulo 3) proporciona el marco para identificar cuándo un sistema de ecuaciones tiene solución o bien existen “obstrucciones” a la resolución. Las obstrucciones pueden estar asociadas al soporte topológico de la variedad (agujeros, en el caso más sencillo de las superficies de Riemann asociadas a las curvas algebraicas) o bien a las posibles deformaciones (dadas por sistema de ecuaciones, distribuciones o sistemas de formas diferenciales dados sobre la variedad).

Sin embargo, de la misma forma que en Geometría Diferencial, las distribuciones o los sistemas no proporcionan información intrínseca. Para obtenerla debemos restringirla a (potencia de) el divisor canónico. El “control en la variación de la forma” se lleva a cabo usando el elemento de volumen dado por el divisor canónico $K_X := \Lambda^n \Omega_X^1$ y sus potencias $K_X^{\otimes m}$ (denotado clásicamente como mK_X en la Geometría Algebraica Italiana). Intuitivamente, se puede interpretar como “autointersecciones sucesivas”. El anillo canónico $\oplus_{m \geq 0} H^0(X, mK_X)$ está finitamente generado (Zariski)

Desde un punto de vista más clásico y como extensión de los métodos proyectivos, la recuperación de la geometría de variedades se llevó a cabo inicialmente usando proyecciones y secciones hiperplanas. Ambos métodos forman parte del núcleo de la Geometría Descriptiva desarrollada inicialmente por G.Monge a principios del s.XIX.

- Los métodos basados en proyecciones se reformulan algebraicamente en términos del lugar de ramificación de un morfismo propio, cuya primera versión se debe a Riemann-Hurwitz para curvas algebraicas complejas. Las relaciones entre invariantes birracionales y caracteres proyectivos están dados en el caso de curvas por las fórmulas de Pluecker y en el caso de superficies por las de Cayley, Salmon, Zeuthen y Pieri.
- Los métodos basados en secciones hiperplanas reducen la dimensionalidad y se extienden al estudio de sistemas completos asociados a secciones mediante secciones por hipersuperficies de grado suficientemente alto. El problema de Castelnuovo consiste en identificar el grado mínimo de las hipersuperficies que cortan un “sistema lineal completo”.

Todas estas cuestiones se reformulan en términos de propiedades de potencias de los divisores canónicos que corresponden a propiedades de auto-intersección del “flujo de volumen” (visualizable como conjunto de restricciones simultáneas de cara a las aplicaciones). En el caso clásico se describen en términos de diferentes tipos de “adjuntas” que verifican condiciones de “incidencia” con respecto al lugar singular y que “describen completamente” una variedad X a partir de

las secciones por sistemas lineales de hipersuperficies con condiciones prefijadas²⁴.

El cálculo de la “dimensión de las adjuntas” (extensión de condiciones de incidencia y adyacencia de la Geometría Algebraica Proyectiva) se reformula en términos del rango de fibrado vectoriales (o haces localmente libres) que representan la generalización de las condiciones proyectivas (incidencia y tangencia) “restricciones estructurales”. Los teoremas tipo Riemann-Roch que aparecen en diferentes módulos de esta materia proporcionan herramientas para el cálculo de dicha dimensión. Un tratamiento más detallado de las “adjuntas” se presenta en el capítulo 5 del módulo A_{35} (Geometría Enumerativa).

Paralelismo con la Geometría Analítica

El Álgebra Local proporciona un lenguaje común para las Geometrías Algebraica y Analítica, pues permite construir el anillo local en un punto y construir el haz estructural $\mathcal{O}_{X,x}$ de las funciones regulares en el punto. En ambos casos se trata de un anillo noetheriano y ello facilita la formulación conjunta de resultados para ambos casos.

En un punto singular $x \in X$ de una hipersuperficie $X \subset \mathbb{K}^{n+1}$ la existencia de k soluciones para la forma local $z_{n+1} = f(z_1, \dots, z_n)$ de la hipersuperficie X da lugar a n “hojas”. En el caso analítico, cada “hoja” está dada por un función que converge para un pequeño entorno U de $x \in X$. En el caso de curvas, el grupo de monodromía actúa intercambiando las hojas a las que se llama “ramas”; los aspectos topológicos de este caso se han presentado en el módulo A_{24} (Topología Geométrica).

El caso más sencillo corresponde a singularidades aisladas de hipersuperficies complejas, que fue estudiado por Milnor (1965) usando métodos topológicos²⁵. Este análisis fue extendido a (gérmenes de) singularidades de intersecciones completas por Looijenga (1985) y a singularidades Gorenstein (haz dualizante inversible) por varios autores a lo largo de los 1980s en mutua interacción con las Singularidades de Gérmenes de Aplicaciones A_{44} en Topología Diferencial.

Ni siquiera este análisis es suficiente para abordar singularidades relativamente sencillas como las que proceden de proyecciones genéricas. Un ejemplo no trivial está dado por los puntos estacionarios de una threefold compleja con singularidades ordinarias $X \subset \mathbb{CP}^4$. Los puntos estacionarios proceden de la intersección de la curva de puntos triples cuyo punto genérico tiene anillo local completado $\mathbb{C}[[x, y, z, t]]/(xyz)$ con la curva de puntos pinzados cuyo punto genérico tiene anillo completado dado por $\mathbb{C}[[x, y, x, t]]/(y^2 - x^2z)$.

El ejemplo de los puntos estacionarios muestra que, aunque X sea una hipersuperficie (por ello intersección completa y a mayores Gorenstein), sin embargo,

²⁴Algunas aplicaciones básicas para el caso racional proporcionan la clave en el módulo B_{41} (Modelado Geométrico) de la materia B_4 (Computer Graphics).

²⁵Ver módulo A_{43} (Singular Function germs) de A_4 (Differential Topology) para más detalles.

las ramas de puntos singulares pueden presentar comportamientos algebraicamente complicado (en el caso anterior tipo Cohen-Macaulay). Afortunadamente, en el caso mencionado la normalización de la transformada de Nash es la clave para la resolución de singularidades (JF, 1987), sin necesidad de utilizar la estrategia general de desingularización de Hironaka (1963)

Estas observaciones muestran la profunda imbricación entre métodos algebraicos, diferenciales y analíticos para resolver tanto cuestiones globales relativas a hipersuperficies $X \subset \mathbb{CP}^4$. Desde un punto de vista global, el pegado de los anillos locales y la consideración de estructuras algebraicas superpuestas se formula en términos de haces. Este lenguaje proporciona el soporte para extender los resultados de anulación de la cohomología de recubrimientos cíclicos (Esnault y Vieweg, 1985) a recubrimientos ramificados donde varias ramas pueden solaparse (puntos fijos para la acción del grupo de monodromía generalizado).

Un caso particularmente importante concierne a los haces coherentes. Los resultados para la cohomología de haces coherentes son los mismos en las categorías algebraica y analítica (FAC, J.P.Serre, 1955). El desarrollo conjunto de ambas Geometrías en términos de Haces se debe sobre todo a J.P.Serre y A.Grothendieck; en el módulo 3 se presenta una introducción a dicho desarrollo.

Intuitivamente, los haces (casi-)coherentes están vinculados a la geometría de la variedad base (de forma análoga que los fibrados vectoriales con respecto a la variedad base M). En particular, pueden ser descritos en términos de “resoluciones proyectivas cortas” que extienden la noción de submersión para aplicaciones entre variedades suaves. En la mayor parte de los desarrollos presentados en esta materia, los haces son (casi-)coherentes.

Sin embargo, en las aplicaciones a Ingeniería que aparecen en la parte II esta condición no tiene por qué verificarse. En un lenguaje más a ras de tierra, hay fenómenos que aparecen en la Cinemática o en la Dinámica que “no descienden” al espacio base. Este tipo de fenómenos son bien conocidos clásicamente:

- Los ejemplos cinemáticos más sencillos corresponden a la falta de holonomía de una conexión que se ha comentado ya en Geometría Riemanniana A_{15} (de utilidad para control de vehículos en presencia de deslizamiento, p.e.).
- Otros más sofisticados aparecen ligados a fenómenos dinámicos no-lineales que no pueden ser aproximados por modelos tensoriales A_{13} . Estas cuestiones más avanzadas se desarrollan en el módulo B_{15} (Computational Dynamics) de la materia B_1 (Computational Mechanics of Continuous Media).

Estos problemas son más tratables en presencia de simetrías asociadas a la representación de un grupo G . Los casos más relevantes para Mecánica (como extensión de la Geometría) corresponden a grupos finitos discretos (subgrupos de los grupos simétrico y alternado), grupos continuos finito-dimensionales (como los grupos clásicos, p.e.) o grupos infinito-dimensionales (subgrupos del pseudo-grupo de las C^r -equivalencias). Esta jerarquía algebraica entre grupos (y

sus correspondientes álgebras) aparece en esta materia y todas las siguientes (incluidas las de la parte II). Por ello, es conveniente introducir algunos rudimentos desde el punto de vista de Grupos Algebraicos.

Grupos e invariantes

En una primera aproximación, un *grupo algebraico* es un grupo definido por polinomios sobre un cuerpo k . El grupo lineal general $GL(n; k)$ es un grupo algebraico. Otros grupos algebraicos son el grupo grupo especial lineal $SL(n; k)$, el grupo ortogonal $O(n; k)$ y la intersección $SO(n; k)$ de ambos. De hecho cualquier subgrupo cerrado del grupo lineal general $GL(n; k)$ es un subgrupo algebraico. Los *problemas generales a resolver* son la generación finita del anillo de funciones G -invariantes y, en el caso afirmativo, la identificación de un sistema de generadores.

El *objetivo inicial* de la Teoría Algebraica de Invariantes (Cayley, Sylvester, Gordan, Hilbert) en la segunda mitad del s.XIX era la identificación de las funciones f que permanecen G -invariantes por la acción de un grupo clásico. Posteriormente, la restricción de este enfoque a polinomios, funciones analíticas o diferenciables da lugar en el último tercio del s.XX al desdoblamiento de la Teoría de Invariantes en sus vertientes geométrica (D.Mumford), analítica (H.Cartan) o diferencial (P.J.Olver). La extensión de este enfoque a estructuras superpuestas (fibrados, haces, distribuciones) da lugar a toda clase de problemas en su mayor parte aún abiertos.

En esta materia A_3 , sólo se aborda la extensión del enfoque original a la Teoría Geométrica de Invariantes; esta extensión concierne inicialmente al anillo $k[V]^G$ de funciones G -invariantes (por la acción de un grupo reductivo G) que están definidas sobre una variedad casi-proyectiva V . Este estudio fue llevado a cabo por D.Mumford (medalla Fields en 1974) a partir de mediados de los 60 (la primera edición del libro de D.Mumford es de 1965).

El desarrollo de esta teoría, pone en escena la necesidad de estudiar los invariantes sobre clases de equivalencia de variedades o, con más generalidad, esquemas (moduli), así como las clases de equivalencia de las estructuras construidas sobre dichos espacios (fibrados, fibraciones, haces). Una buena referencia es [Mum94] ²⁶

Por ello, la *Moderna Teoría Geométrica de Invariantes* trata del estudio de espacios de moduli para variedades y estructuras locales (stacks) mediante la acción de grupos (no necesariamente reductivos) o grupoides (no necesariamente definidos sobre toda la variedad). Este enfoque ampliado da lugar a nuevos conceptos relativos a cocientes de variedades (de forma similar a las orbifolds de Topología Geométrica, p.e.) así como clases de estructuras superpuestas localmente G -invariantes (moduli de fibrados o de haces).

²⁶D.Mumford, J. Fogarty, and F.Kirwan: *Geometric Invariant Theory (3rd ed)*, Springer-Verlag, 1994.

Las *estrategias híbridas* para este estudio utilizan una combinación de herramientas algebraicas (representación de grupos y álgebras no necesariamente reductivas, p.e.), diferenciales (extensión de las variedades localmente simétricas utilizadas en Geometría Diferencial a cocientes geométricos, p.e.), topológicas (estabilización de elementos inestables, p.e.) y analíticas (parametrización local de espacios de moduli, p.e.). Como el problema inicial es bastante difícil, se introducen restricciones relativas al soporte (para obtener una estructura como cociente geométrico, p.e.), a las estructuras (diferentes tipos de estabilidad para los fibrados, p.e.) ó a los grupos (tipo gauge en relación las aplicaciones a las GUT en Física Teórica, p.e.). Estos tópicos exceden el carácter introductorio de estas notas; por ello, para terminar, se comentan algunos aspectos más “sencillos”:

Desde el punto de vista topológico, se pueden distinguir (al menos) dos líneas clásicas de desarrollo que conciernen a

- la extensión del grupo fundamental a recubrimientos de variedades algebraicas o analíticas (grupo fundamental para revestimientos étales, grupo de monodromía para estudiar el comportamiento de las ramas en entorno de singularidades aisladas);
- la extensión de los métodos basados en (co)homología sobre todo para el caso de soporte compacto que proporciona métodos efectivos para el cálculo de la cohomología de Čech.

En el módulo A_{33} (Sheaves, Cohomology and Schemes) se introducen las herramientas topológicas básicas para abordar este tipo de problemas. Otra línea de investigación que sólo se comenta tangencialmente concierne al estudio topológico de las G-estructuras (iniciado por D.C.Spencer) sobre variedades no necesariamente complejas que se presenta en el módulo 3 (en el contexto de haces), mostrando algunas aplicaciones en el módulo 4 (Superficies) de esta materia. Un reto difícil es la extensión de estos métodos a variedades tridimensionales (eventualmente analíticas) cuyos aspectos básicos se presentan en el módulo 6 (Threefolds).

Para describir la Geometría de las Subvariedades de una Variedad Algebraica se introducen diferentes tipos de relaciones sobre ciclos (combinaciones lineales formales de variedades) que permiten abordar y reformular de forma rigurosa la Teoría de Intersección, así como la identificación de los ciclos que soportan la obstrucción a problemas de resolución de sistemas de ecuaciones (algebraicas, analíticas, diferenciales) o de prolongación ²⁷. Una vez identificada la estructura multiplicativa, el cálculo del rango o de las dimensiones de los objetos algebraicos asociados (grupos, anillos, módulos) a las clases de ciclos proporciona invariantes que son fundamentales para los problemas de clasificación. Estos tópicos son ubicuos en Geometría Algebraica y se abordan en diferentes capítulos de los módulos 3 y siguientes del curso.

²⁷En este curso, no se abordan las aplicaciones relacionadas con Teoría de Números

Elementos de Geometría Algebraica Computacional

La *Geometría Computacional* proporciona un esquema muy simple que se basa en modelos geométricos, algoritmos y diferentes sistemas de bases de datos. La sencillez de este esquema y la potencia de cálculo para cientos de miles de datos ha potenciado la utilización de estas herramientas y sus aplicaciones a áreas tan diferentes como los Sistemas de Información Geográficos, la Robótica, la Informática Gráfica o la Visión Computacional ²⁸.

El *marco computacional* para el desarrollo de estas herramientas es la Programación Orientada a Objetos (OOP). Los diferentes lenguajes tipo C (incluyendo C++, C#, etc) y variantes de Java, proporcionan un soporte para la Programación y un tratamiento modular que facilita el transvase de información y la reutilización del software en áreas interconectadas. La incorporación de herramientas para el reconocimiento semi-automático ha permitido desarrollar sistemas capaces de adaptarse en tiempo real a requerimientos cambiantes.

De una forma más específica, esto ha sido posible por el desarrollo de diferentes tipos de Sistemas Expertos que proporcionan patrones para fenómenos que pueden evolucionar dependiendo de las condiciones iniciales o las condiciones frontera (como en las EDP o, en términos más intrínsecos, para campos que actúan sobre variedades). Por ello, están especialmente bien adaptadas a sistemas dinámicos con coeficientes variables, algo que es típico de estructuras deformables como las que aparecen en cualquier Geometría.

Lamentablemente, aún no existe una herramienta tan compacta en el terreno de la Geometría Algebraica Computacional ²⁹. De entrada, las ecuaciones deben ser introducidas a mano, lo cual ralentiza las aplicaciones e imposibilita cualquier respuesta on-line (el tiempo real es una entelequia en este contexto). En el caso de familias de ecuaciones dependientes de parámetros, la modificación en los parámetros también se lleva a cabo de forma manual, aunque la respuesta es habitualmente muy rápida. Ello permite realizar experimentos off-line que permitan detectar cambios morfológicos asociados a valores críticos de los parámetros de los que depende un sistema.

Básicamente, a finales de los noventa, había dos aproximaciones de tipo procedural basadas en herramientas de cálculo simbólico y análisis numérico:

- Las herramientas más significativas para el *Cálculo Simbólico* son Maple, Singular,
- Las herramientas más significativas para el *Cálculo Numérico* aplicado a Variedades son Mathematica, Matlab, Scilab

Desde principios del s.XXI, la actividad en este terreno presenta un carácter exponencial y resulta muy difícil dar una panorámica global. La mejor referencia

²⁸Para más detalles sobre dichas aplicaciones ver los apéndices a mis apuntes del Curso de Geometría Computacional

²⁹Ver no obstante <http://www.scipy.org/topical-software.html> el mayor repositorio que conozco relacionado con herramientas software para el desarrollo computacional de métodos geométricos y sus aplicaciones

para las líneas más relevantes se encuentran en los enlaces que aparecen relacionados con el Curso 2006-07 que el IMA organizó en torno a las aplicaciones de la Geometría Algebraica ³⁰

³⁰ver <http://www.ima.umn.edu/2006-2007/> para detalles y enlaces

0.2. Antecedentes y evolución

La motivación más inmediata procede de la descripción de la Geometría Algebraica como la asociada a la resolución de ecuaciones algebraicas sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Este problema presenta diferentes aproximaciones que etiquetamos como

- *aritmética* relacionada con la Teoría (Algebraica o Analítica de Números);
- *geométrica* relacionada con la representación de los lugares de ceros de polinomios;
- *topológica* relacionada con la conservación de las propiedades aritméticas o geométricas por diferentes tipos de deformación;
- *analítica* relacionada con la convergencia o la prolongación de las soluciones encontradas.

Cada una de estas aproximaciones da lugar a diferentes áreas de las matemáticas que se “intersecan” sobre los objetos geométricos comunes de referencia (variedades y morfismos entre variedades). Para mantener estos apuntes en una extensión razonable, es necesario acotar los problemas que se van a abordar. A pesar de su importancia, no se van a abordar las cuestiones de tipo aritmético, pues hay otras materias donde se desarrollan con más detalle las herramientas correspondientes.

Además, sólo se consideraan los aspectos analíticos que admiten una formulación algebraica común con el enfoque geométrico clásico. La restricción a los aspectos geométricos (reformulados en términos de Álgebra Local) y topológicos (reformulados en términos de estructuras superpuestas como haces y su cohomología), extiende de forma natural la distinción clásica entre Geometría Local y Global.

Otra distinción básica complementaria de la anterior es la que procede de la Geometría Intrínseca (independiente de cualquier sistema de coordenadas locales) y Geometría Extrínseca (asociada a un embebimiento o, con más generalidad, una inmersión). El Álgebra Local y sus extensiones (en el marco de esquemas) proporciona el lenguaje natural para abordar las cuestiones relacionadas con la Geometría Intrínseca. La Geometría Diferencial y sus extensiones (en el marco de fibrados normales y haces conormales) proporciona el lenguaje natural para abordar las cuestiones relacionadas con la Geometría Extrínseca.

La mayor parte de los desarrollos llevados a cabo entre los años cincuenta y setenta del siglo XX tienen lugar en el marco intrínseco. Las relaciones del enfoque intrínseco con el extrínseco (bien conocidas en Geometría Diferencial) se desarrollan en Geometría Algebraica a lo largo del último cuarto del siglo XX. Los Teoremas tipo Riemann-Roch y los resultados asociados al lugar de ramificación de morfismos proporcionan paradigmas para las relaciones entre aspectos intrínsecos y extrínsecos. La cohomología a valores en un haz proporciona el lenguaje natural para la formulación de este tipo de resultados.

La Teoría de Esquemas de Grothendieck proporciona un marco general para conectar los enfoques intrínseco y extrínseco, incluyendo la independencia con respecto al cuerpo base, el caso singular, el análisis de componentes inmersas, las aplicaciones a la Teoría de Números o las conexiones con la Topología Algebraica. De forma complementaria, la cohomología de haces definidos sobre variedades (o, con más generalidad, esquemas o espacios analíticos) proporciona el lenguaje natural para conectar los aspectos locales y globales.

El formalismo de esquemas y de cohomología de haces no es elemental y, por ello, no se desarrolla hasta el module A_{33} . En los dos primeros modules se desarrollan enfoques más clásicos para curvas algebraicas A_{31} ó variedades casi-proyectivas A_{32} . Los invariantes y las relaciones se calculan mediante procedimientos clásicos más sencillos e intuitivos. Con ello, se pretende no sólo motivar este enfoque más abstracto, sino mostrar las conexiones con otras Geometrías (Diferencial o Analítica, sobre todo) y las herramientas topológicas utilizadas en dichos contextos.

En otras palabras y contrariamente a lo que los EGAs y SGAs parecen sugerir, la Teoría de Esquemas no surge de la mente privilegiada de Grothendieck como Minerva con su armadura cuando nace de la cabeza de Zeus: Hay una gran cantidad de Geometría y de Topología desarrollada previamente que motivan el marco de esquemas, por un lado, y otra gran cantidad de resultados que no se han formulado ni compensa intentarlo en el lenguaje de esquemas. Una mayor generalidad no aporta nada y, en ocasiones, contribuye a oscurecer el significado de los resultados. Por ello, en los modules A_{31} y A_{32} se desarrolla un enfoque clásico para formalizar la intuición y hacer más accesible el contenido.

Para facilitar la comprensión de contenidos, es muy importante disponer de un bagaje conceptual y de resultados procedentes de las diferentes aproximaciones a la Geometría Algebraica que se han desarrollado desde mediados del siglo XIX. De acuerdo con esta idea, se han organizado los materiales de esta sección en cuatro subsecciones relacionadas con las motivaciones históricas, desde diferentes puntos de vista que etiquetamos como trascendente (estudio de integrales sobre formas con soporte una curva compleja), analítico (en relación con problemas de convergencia y prolongación) y topológico (que proporciona el marco para conectar los aspectos locales con aspectos globales).

0.2.1. Algunas motivaciones históricas

Una de las mejores referencias para entender la Geometría Algebraica en su contexto histórico son los dos libritos de J. Dieudonné publicados en P.U.F.³¹. Una presentación más exhaustiva con elementos gráficos muy cuidados se puede ver en Easton (2010)³². Desde un punto de vista algebraico, una aproximación

³¹En https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Dieudonne.pdf se puede ver una versión reducida muy útil

³²<http://www.robertweaston.com/wp-content/uploads/documents/presentations/HistoryofAlgebraicGeometry.pdf>

más completa se puede ver en Abhyankar (1976) ³³

Los precursores

J.Dieudonné analiza en su excelente exposición sobre la Historia de este área, identifica dos períodos iniciales que califica como Prehistoria (hasta 1630) y exploración (1630-1795) que no se comentan aquí. A continuación etiqueta como edad de oro de la Geometría Proyectiva (1795-1850) que van desde la Fundación de l'Ecole Polytechnique y la ENS por parte de Napoleón Bonaparte, así como su extensión a otros países europeos a principios del s.XIX.

El primer tratado sobre Geometría Proyectiva se debe a J.V.Poncelet ³⁴. Algunas de las contribuciones más relevantes aparecen ligadas a la introducción de los principios de continuidad y de dualidad, la extensión de la razón doble (como invariante fundamental de la Geometría Proyectiva) a configuraciones geométricas o el tratamiento sistemático de propiedades de objetos geométricos utilizando secciones y proyecciones como extensión de los métodos de Geometría Descriptiva desarrollados por G.Monge.

El tratado de Poncelet proporciona una de las líneas más relevantes para la extensión de los métodos proyectivos para el estudio geométrico de figuras en el espacio. El desarrollo de técnicas algebraicas y topológicas permite extender este estudio a lo largo de los siglos XIX y XX a sistemas lineales de variedades (incluyendo posteriormente nociones de amplitud) y morfismos propios en la terminología de mediados del s.XX. ³⁵

Una aproximación trascendente: Abel, Cauchy

A lo largo del primer tercio del s.XIX se desarrollan métodos geométricos basados en Geometrías Descriptiva (Monge) y Proyectiva (Poncelet) y el desarrollo incipiente de la Geometría Diferencial intrínseca (Gauss) y Extrínseca (Weingarten). De forma paralela a estos desarrollos geométricos, otras líneas de investigación que surgen en la misma época desde el marco del Análisis Complejo proceden de

- el estudio de las integrales elípticas de formas diferenciales (aditividad demostrada por Euler)
- la extensión del cálculo integral a la integración de formas diferenciales sobre curvas algebraicas complejas (iniciada por H.N.Abel, 1826-29);
- el Análisis de Funciones de Una Variable Compleja (Cauchy, 1829).

³³<http://poncelet.math.nthu.edu.tw/disk5/js/biography/abhyankar.pdf>

³⁴Traité des propriétés projectives des figures. Paris (1822)

³⁵En <http://www.cis.upenn.edu/~jean/gma-v2-chap5.pdf> se puede ver una excelente aproximación a la Geometría Algebraica (realizada por J.Tate) desde el punto de vista de la Geometría Proyectiva.

La existencia de funciones continuas que no son derivables en un punto (casi obvio en el marco lineal a trozos) marca una ruptura entre los métodos geométricos y los analíticos que va a ser una constante a partir de la primera mitad del s.XIX.

La dicotomía entre métodos algebraicos y trascendentes para el estudio de objetos geométricos se mantiene hasta la actualidad, a pesar del desarrollo del programa de A.Weil (1952) cuyo objetivo último es la algebrización de los métodos trascendentes desarrollados en Topología Algebraica y Diferencial. La recuperación de la convergencia entre métodos algebraicos y analíticos se lleva a cabo por J.P.Serre a partir de mediados del s.XX usando una extensión de métodos del Álgebra Local en el marco de la Teoría de Haces A_{33} .

El enfoque analítico: Riemann, Hurwitz, Weierstrass

Las dificultades ligadas al tratamiento de las propiedades analíticas de las funciones multivaloradas definidas sobre superficies reales y sus integrales, dieron lugar a un enfoque más cualitativo. El primer tratamiento del problema se debe a N.H.Abel (1802-1829) en relación con la imposibilidad de calcular de forma exacta las integrales de formas diferenciales relevantes para la longitud de arco en curvas sencillas (la elipse que da lugar a las llamadas integrales elípticas, p.e.). En el primer cuarto del s.XIX no se conocían las propiedades de formas diferenciales sobre curvas algebraicas complejas, ni el cálculo de residuos, ni tampoco existía el formalismo apropiado para las propiedades de periodicidad más simples de las funciones elípticas. Hay que esperar a los primeros trabajos de A.L.Cauchy y, sobre todo, de B.Riemann para disponer de un aparato conceptual apropiado.

El enfoque trascendente está centrado en propiedades que se puedan definir más fácilmente en términos de ciclos no topológicamente triviales (curvas no contractibles con las propiedades más sencillas desde el punto de vista del operador borde) y cociclos (funcionales sencillos definidos sobre ciclos). En un lenguaje más moderno se podría decir que los primeros desarrollos estaban motivados inicialmente por las dificultades para trabajar con diferenciales definidas sobre curvas y los operadores integrales asociados para los cuales sólo se disponía de propiedades de periodicidad (Cauchy).

La conexión entre los enfoques trascendente y analítico resuelven estas dificultades y son posibles gracias a varios trabajos de B.Riemann desarrollados a mediados del s.XIX. Para comprender la relevancia de estos trabajos es necesario utilizar métodos topológicos sobre las variedades (inicialmente, superficies de Riemann) desarrollados por B.Riemann; en cierto modo, son la continuación natural de algunas de las ideas esbozadas por N.H.Abel. La idea intuitiva de Riemann para el estudio de funciones multivaloradas sobre una curva algebraica C consiste en realizar una colección de cortes sobre la superficie real $S(C)$ que la representa hasta conseguir que el dominio sea simplemente conexo.

Por ello, la clave para reducir los diferentes problemas (prolongación analítica, extensión de formas diferenciales, integración) es topológica: reducción a

espacios que topológicamente se comporten como el espacio ordinario (aunque originalmente estén curvados y puedan tener agujeros), en cuyo caso la función se convierte en univalorada. El Teorema de la aplicación de Riemann muestra que dicho dominio es bi-holomórficamente equivalente a $\mathbb{C}$ ó al interior del disco unidad.³⁶

El enfoque topológico: Riemann, Picard, Poincaré

Las contribuciones más importantes de B.Riemann (1826-1866) a la Topología se suceden a lo largo de casi 20 memorias que escribe tras su disertación de 1856. Conciernen a aspectos tales como:

- El orden de conexión para convertir en simplemente conexa, con el análisis del comportamiento de las diferenciales algebraicas (Abel) y las propiedades de sus integrales, como precedente del análisis de periodicidad que se desarrolla sobre todo a partir de mediados del s.XX.
- Las transformaciones topológicas (para “controlar” el tamaño y las apariencias) y algebraicas (de tipo birracional) que muestran las profundas interconexiones entre las Geometrías Analítica y Algebraica (desarrollo sistemático conjunto a partir de mediados del s.XX)
- Un primer esbozo de la clasificación de superficies compactas y orientables que será completado por H.Poincaré a finales del s.XIX.
- Un inicio del estudio de variedades n -dimensionales (precedente de la Geometría Diferencial o la Analítica de Variedades), junto con posibles invariantes para dichas variedades.

Dos elementos importantes que se extienden a dimensión arbitraria proceden de la noción de “carta” y de la noción de “corte” para convertir un dominio arbitrario en otro simplemente conexo. La noción de carta actualmente se interpreta en términos puramente topológicos, pero que inicialmente procede del estudio de condiciones para garantizar la prolongación analítica

La colección de “cortes” que convierten la variedad original en una simplemente conexa (cada lazo es contractible a un punto) proporciona uno de los puntos de partida para el desarrollo de los métodos topológicos llevados a cabo por Poincaré y Picard. Esta operación transforma las funciones multivaloradas definidas sobre el espacio topológico original en funciones univaloradas sobre un dominio, lo cual simplifica el tratamiento analítico de los problemas antes mencionados.

C.Picard (1856-1941) es el primero en llevar a cabo un estudio sistemático de los diferentes tipos de formas diferenciales sobre una curva algebraica (o sobre la superficie de Riemann asociada). La relación con el enfoque dual (basado en divisores) da lugar a la obtención de invariantes asociados a la estructura

³⁶Este Teorema fue extendido a superficies de Riemann arbitrarias por F.Klein y H.Poincaré

diferencial compleja de la curva. La introducción de relaciones de equivalencia algebraica entre divisores sobre una variedad permite extender el enfoque original a dimensión arbitraria con el grupo de Picard como invariante algebraico.

La descripción moderna del grupo de Picard como $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ es analítica. Sin embargo, pone de manifiesto la profunda unidad que hay entre los aspectos vinculados a la topología vinculada a las integrales de formas (módulo períodos), como duales de (clases de equivalencia algebraica de) divisores, por un lado, y las cuestiones de prolongación analítica (enfoque local) por otro, en la que los períodos no juegan ningún papel.

Desde un enfoque puramente topológico para el caso real, Betti continúa la línea iniciada por J.B.Listing y B.Riemann en relación con el número de cortes que es posible realizar sin desconectar la variedad (orden de conexión) para tratar de calcular el número β_0 de componentes conexas, el número β_1 de agujeros, el número β_2 de agujeros tridimensionales ... y así sucesivamente.

En términos más formales, H.Poincaré introduce los *números de Betti* como el rango de los grupos de homología; por ello, son invariantes topológicos o, con más precisión, de la clase de homotopía. En virtud del teorema de coeficientes universales, es indiferente el cuerpo sobre el que tomemos coeficientes; en otras palabras, sólo depende de la combinatoria subyacente a la PL-estructura ³⁷. El cálculo de los números de Betti permite asociar el *polinomio de Poincaré*

$$P(X, t) := \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots + \beta_d t^d$$

donde $d = \dim(X)$. La extensión y formalización de este enfoque al caso algebraico da lugar a la función de Hilbert-Samuel que juega un papel fundamental en la moderna Teoría de Intersección ³⁸

En un marco puramente topológico para el caso diferenciable (variedades suaves ó “lisas”) el cálculo de los números de Betti es bastante sencillo; en este caso, por la dualidad de Poincaré se tiene que $\beta_i = \beta_{d-i}$, por lo que el polinomio de Poincaré “codifica” la información topológica global relevante para cualquier variedad. En el caso algebraico complejo, los primeros resultados importantes se deben a S.Lefschetz y W.Hodge a lo largo de la primera mitad del s.XX ³⁹

0.2.2. El problema de la clasificación

El problema de la clasificación es el problema más importante en Geometría Algebraica. Como siempre, se aborda en términos de variedades regulares o singulares. La resolución de singularidades en característica cero (Hironaka, 1963) permite reducirse al caso regular. La dificultad del problema de clasificación crece de forma exponencial con la dimensión (polinomio de Hilbert-Samuel). Por ello, nos limitamos a variedades de dimensión ≤ 3 .

³⁷Ver el Curso de Topología Algebraica para detalles y complementos

³⁸Ver módulo 5 para más detalles

³⁹Para más detalles ver los módulos 2 y 4 de la asignatura

La noción de φ emphmodelo minimal juega un papel fundamental en la Clasificación de Variedades Proyectivas Complejas ⁴⁰. Intuitivamente un modelo minimal es un model birracional de cualquier variedad proyectiva compleja, tan simple como sea posible. La descripción de modelos minimales adquiere una complejidad creciente en función de la dimensión D :

1. Para $D = 1$ la solución (curvas racionales, elípticas e hiperelípticas) se desarrolla en la segunda mitad del s-XIX. Riemann (1857) resuelve el primer caso correspondiente al Teorema de Uniformización. Este resultado proporciona el punto de partida para la Geometría Conforme. Ver A_{31} para más detalles.
2. Para caso $D = 2$ la primera clasificación de superficies algebraicas complejas se realiza por Castelnuovo y, sobre todo, Enriques (1946). A principios de los sesenta, esta clasificación se extiende al caso analítico por Kodaira. El seminario sobre Superficies Algebraicas de Shafarevich (1967) y el curso de Beauville (1981) proporcionan las primeras revisiones auto-contenidas de la clasificación de Enriques-Kodaira (ver módulo A_{34} para una introducción). Un tratamiento mucho más completo se puede ver en [Bar8?] ⁴¹.
3. El caso general es abordado por Iitaka [Iit82] ⁴² adaptando y aligerando el lenguaje de esquemas. La especificación de este enfoque al caso de threefolds proyectivas complejas se lleva a cabo en el programa de Mori. La construcción efectiva de transformaciones birracionales requiere un cuidadoso estudio de los diferentes tipos de singularidades que pueden aparecer (terminales vs canónicas) que M.Reid lleva a cabo en su tesis con Shafarevich y trabajos posteriores. El programa de Mori combina métodos algebraicos, numéricos (procedentes de Teoría de Intersección) diferenciales (existencia de métricas) y analíticos (resolución de singularidades) disponibles en el caso complejo que se comentan en A_{36} .

Los items precedentes justifican el enfoque de este Curso hacia la Geometría construida sobre $\mathbb{C}$ (o sobre cualquier cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero). Buena parte de los se extienden a la Geometría Algebraica Real, pero sólo se mencionan de forma tangencial. Un tratamiento más detallado del caso real aparece en relación con las Estratificaciones en el módulo A_{45} donde se utiliza la clasificación (diferencial vs analítica) de singularidades de gérmenes de aplicaciones $f \in C^r(n, p)$ desarrollada en A_{44}

Para el caso de curvas algebraicas proyectivas complejas hay diferentes formas de abordar el problema de clasificación que han dado lugar a resultados de

⁴⁰El caso general es actualmente inabordable debido a la no-disponibilidad de resolución de singularidades en característica arbitraria.

⁴¹W.Barth, C.Peters and A.Van de Ven: *Caompact Complex Surfaces*, Erg. der Math. un ihrer Grenz. 3 Folge 2, Band 4, Springer-Verlag, 1984.

⁴²S.Iitaka: *Algebraic Geometry. An introduction to Birational Geometry of Algebraica Varieties*, GTM76, Springer-Verlag, 1982.

gran profundidad que permiten relacionar los aspectos algebraicos, analíticos y diferenciales. El paradigma para este tipo de resultados está dado por el Teorema de Riemann-Roch, por un lado, y los Teoremas de Abel-Jacobi por otro, que se corresponden con las aproximaciones algebraica y trascendente al estudio de curvas algebraicas complejas (o si se prefiere superficies de Riemann) que se aborda en el módulo A_{31} . La Geometría Computacional Conforme proporciona el soporte para las aplicaciones a la producción de contenidos multimedia, entre otras aplicaciones

El caso correspondiente a superficies algebraicas complejas es bastante más difícil que el caso de curvas algebraicas. No obstante, lo esencial de la *clasificación algebraica* de las *superficies algebraicas complejas* fue demostrado por G.Castelnuovo y F.Enriques a finales del s.XIX. Su estrategia hace un uso sistemático de propiedades de las potencias del divisor canónico K_X (dado por la clase de la segunda potencia del haz de las diferenciales holomorfas en lenguaje moderno) y de propiedades de intersección de clases de divisores (enfoque de Picard presentado al final de la subsección anterior ⁴³.

La utilización del divisor canónico resulta natural, no sólo porque proporciona el ejemplo general más simple sobre una variedad, sino porque representa el “flujo de volumen” (curvatura total en el marco diferenciable) sobre una variedad algebraica o analítica X . La *clasificación analítica* de las *superficies complejas* fue llevada a cabo por K.Kodaira en la década de los sesenta. La extensión a característica arbitraria ha sido iniciada por E.Bombieri y D.Husemoller a partir de los ochenta. ⁴⁴

El caso correspondiente a variedades complejas tridimensionales (threefolds en lo sucesivo) es mucho más difícil y aún presenta una buena colección de problemas abiertos. La idea inicial es la misma que para el caso de superficies complejas, es decir, estudiar las potencias $K_X^{\otimes m}$ del divisor canónico K_X (resp., el haz dualizante ω_X en el caso singular) y las propiedades de familias de (clases de) ciclos sobre threefolds. En este caso, es necesario introducir diferentes tipos de relaciones de equivalencia sobre ciclos y estudiar sus relaciones ⁴⁵.

Por analogía con el caso de superficies, la equivalencia numérica es inicialmente la más interesante, pero habitualmente no contiene suficiente información sobre el tipo de C^r -deformaciones que se está realizando; por ello, es necesario considerar relaciones de equivalencia “más finas”. De forma complementaria, la construcción explícita de “resolución parcial” de singularidades da lugar a modelos minimales con singularidades más sencillas. Una aproximación sistemática a este problema se ha desarrollado desde principios de los ochenta en el marco del Programa de Mori ⁴⁶

⁴³Este enfoque se desarrolla en los módulos A_{32} (versión clásica) y A_{33} (versión moderna en términos de haces)

⁴⁴Estos tópicos se desarrollan con más detalle en el módulo A_{34}

⁴⁵El estudio de ciclos se aborda en el módulo 5 en relación con el Curso sobre Teoría de Intersección y sus aplicaciones a la Geometría Enumerativa impartido en 1983-84

⁴⁶Estos tópicos se abordan en el módulo 6 en relación con un curso impartido por M.Reid en la Univ. de Valladolid en 1989

Clasificación de curvas algebraicas: Riemann, Fuchs y Poincaré

Según una formulación moderna, el *Teorema de Uniformización de Riemann* dice que cualquier superficie de Riemann es equivalente a una de las tres formas canónicas: la esfera unidad $\mathbb{S}^2$, el plano euclídeo $\mathbb{E}^2$ ó el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$. La forma de realizar esta equivalencia es mediante aplicaciones conformes. El caso que presenta mayor dificultad concierne al plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ y las transformaciones asociadas dadas por $\mathbb{PSL}(2; \mathbb{R})$. La noción de superficie de Riemann es difícil de visualizar si no se dispone de modelos geométricos que faciliten una “replicación” de un patrón básico que permita visualizar la curvatura. En el caso hiperbólico, la visualización de las transformaciones conformes requiere introducir un “dominio fundamental” (paralelogramo, inicialmente) que se replica de forma curvada sobre el objeto.

La teselación resultante sobre la superficie curvada es la que proporciona una visualización realista de la forma del objeto. Para poder llevar a cabo esta replicación, es necesario elegir un subgrupo discreto Γ de $\mathbb{PSL}(2; \mathbb{R})$; el estudio de estos subgrupos discretos fue iniciado por Fuchs; los *grupos fuchsianos* en Geometría Hiperbólica juegan el mismo papel que los grupos cristalográficos para la Geometría Euclídea. Algunos grabados de Escher proporcionan una representación artística excelente de teselaciones construidas sobre el modelo del disco $\mathbb{D}^2$ para el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$.

En el lenguaje de la Topología Algebraica, cualquier grupo fuchsiano Γ es el grupo fundamental de una superficie compacta hiperbólica, es decir, de una suma conexas de g toros; como espacio homogéneo, dicha superficie se expresa como el cociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ que admite una métrica riemanniana. Por ello, es posible calcular geodésicas ⁴⁷. Si Γ' es un subgrupo de Γ , la aplicación inclusión induce un homomorfismo (aplicación recubridora) $\mathbb{H}^2/\Gamma' \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$ de modo que la elevación/proyección de geodésicas asociadas al subgrupo original Γ a la acción por Γ' da lugar a desdoblamiento/contracciones de una belleza fascinante ⁴⁸

Aparición del Álgebra Conmutativa: La escuela alemana

La clasificación birracional de curvas X desde el punto de vista algebraico comienza con la consideración por parte de B.Riemann del cuerpo de funciones racionales $k(X)$ como el objeto que caracteriza a la variedad X módulo transformaciones birracionales. El estudio algebraico de este objeto fue llevado a cabo en la segunda mitad del siglo XIX por Kronecker, Dedekind y Weber quienes introdujeron las nociones de ideales y divisores como una extensión natural de propiedades bien conocidas en la época de la Teoría Algebraica de Números.

Dedekind y Weber desarrollaron una teoría aritmética de cuerpos de funciones algebraicas en una variable inspirada en la teoría clásica de ideales principales. A lo largo del s.XX, se extiende a cuerpos en un número arbitrario de

⁴⁷Dos geodésicas ortogonales y sus traslaciones proporcionan la visualización de un dominio fundamental

⁴⁸En [http : //wn.com/fuchsian_group](http://wn.com/fuchsian_group) se puede ver una simulación utilizando fractales.

variables sobre ideales primos. Sin embargo, el paralelismo entre la teoría de funcionales algebraicas en una variable para curvas algebraicas y la teoría de números algebraicos, no se extiende de forma inmediata a dimensión superior.

La unificación entre las aproximaciones basadas en ideales y en cuerpos de número algebraicos iniciada por Kronecker culmina con los desarrollos de la Escuela Francesa a mediados del s.XX (Chevalley, Weil) y la síntesis de Grothendieck y su escuela (llevada a cabo en los años sesenta) que se comentan más adelante. De forma simultánea al enfoque de Kronecker, Dedekind lleva a cabo una aproximación que pretende aislar el Álgebra de cualquier contaminación geométrica, un punto de vista muy bourbakista, *avant la lettre*. De una manera muy simplificada, podría decirse que la versión de Dedekind es más aditiva que multiplicativa. Desde un punto de vista geométrico (inadmisable para Dedekind, obviamente), su enfoque se encuentra más próxima al enfoque que los geómetras italianos llevan a cabo en términos de divisores y más alejada de la versión multiplicativa actualmente predominante en Geometría Algebraica y Analítica (por la utilización de la Teoría de Haces).

A lo largo de la primera mitad del siglo XX, tiene lugar el desarrollo de herramientas de Álgebra Conmutativa con la introducción de anillos locales (para el estudio de puntos), valoraciones (versión algebraica de las funciones definidas inicialmente sobre superficies de Riemann), normalización (aplicable a la resolución de singularidades de curvas y algunos casos sencillos en dimensión superior) y teoría de cuerpos (para representar extensiones o bien operaciones relacionadas con el “cambio de punto base”).

El Álgebra Local fue iniciada por Krull (1938), desarrollándose muy rápidamente de forma inmediata gracias a las aportaciones de expertos procedentes de otras escuelas como C.Chevalley ó I.Cohen, y la consolidación que tiene lugar a finales de los cuarenta y principios de los cincuenta. La obra de O.Zariski y P.Samuel compendia e impulsa todos los conocimientos disponibles en el área a mediados del s.XX ⁴⁹. Una pequeña introducción a estos tópicos se presenta en el primer apartado de la subsección siguiente.

Primeros pasos de la Teoría de Invariantes

La motivación inicial para la Teoría de Invariantes procede de la resolución de las ecuaciones algebraicas asociadas a polinomios mónicos en una variable. Las soluciones por radicales para grado ≤ 4 ya eran conocidas a mediados del siglo XVII. Aunque no sean solubles por radicales, la expresión en el caso complejo de los coeficientes como funciones simétricas de las raíces ya estaba implícita en Newton y reaparece bajo múltiples formas a lo largo de estas notas.

Esta idea tan simple juega un importante papel en el desarrollo de la Teoría de Grupos (Galois) y en la Teoría de Representación de grupos $\rho : G \rightarrow GL(V)$ sobre un espacio vectorial V de dimensión n . La visualización de las representaciones en términos de matrices permite reinterpretar la acción del grupo

⁴⁹Un resumen más útil de cara a las aplicaciones en otras áreas se puede encontrar en M.Atiyah E I.R.Macdonald

simétrico como “intercambio” de raíces que se interpretan en términos de grupos de reflexión (inicialmente para el espacio Euclídeo, luego para espacios de Lobachevsky). Esta idea permite conectar con el Álgebra Lineal más sencilla:

En el caso más simple descomposición de una matriz cuadrada arbitraria en una simétrica y otra alternada introducida en Álgebra Lineal se traslada en términos de grupos al producto de una matriz ortogonal (resp. unitaria) y otra simétrica en el caso real (resp. complejo). La descomposición de Iwasawa extiende este resultado a otros grupos clásicos. Esta descomposición afecta a las relaciones entre grupos y álgebras de li que s ha presentado en el module A_{22} y se utiliza para cuestiones de reducción de la acción del grupo estructural de fibrados principales.

Esta descomposición da entrada al estudio de invariantes por la acción del grupo simétrico vs alternado sobre álgebras de polinomios y, por extensión campos vectoriales o formas. Grosso modo, los invariantes por la acción del grupo simétrico forman el núcleo de la Teoría Geometría de Invariantes en Geometría Algebraica ⁵⁰; análogamente, los invariantes por la acción del grupo alternado forman el núcleo de la Teoría Diferencial de Invariantes en Geometría Diferencial cuyos fundamentos fueron desarrollados por E.Cartan (ver A_{14} para detalles). La fusión de ambos enfoques se puede ver en [Olv95] ⁵¹. Para aplicaciones a Mecánica ver [Mar99] ⁵².

Desde un punto de vista histórico, el camino ha sido bastante tortuoso, pues afecta a múltiples aspectos, incluso en el caso más elemental de polinomios en una variable. Así, p.e. si se sustituye el grupo simétrico por el grupo de transformaciones fraccionarias (grupo de Moebius) ubicuo en Funciones Analíticas de una Variable Compleja, es fácil comprobar que el discriminante de una ecuación resultante es el producto del discriminante original por el cuadrado del determinante de la transformación original (Boole, 1841). Este resultado fue extendido por Cayley para grados 3 y 4 (a mediados del siglo XIX) y por Gordan (1868) para cualquier grado del polinomio. Estas extensiones afectan al estudio de los invariantes de polinomios de grado n . La extensión de este tipo de resultados a formas homogéneas binarias (en dos variables) fue inicialmente obra de la Escuela Británica con la “trinidad invariante” (Cayley, Salmon, Sylvester) como máximos representantes.

De forma complementaria, la Escuela Alemana de Invariantes (Aronhold, Clebsch, Gordan) demuestra que los invariantes de formas binarias de grado superior se pueden expresar como potencias de de formas lineales, con la hipótesis implícita de que tratar a las formas binarias de grado n como potencias de formas lineales. Esta hipótesis es similar a la del “principio de degeneración” no justificado en esa época. Este “método simbólico” da lugar al desarrollo

⁵⁰Las tres ediciones del *Geometric Invariant Theory* proporcionan la versión moderna más completa con importantes adiciones y cambios de perspectiva para cada edición

⁵¹P.J.Olver: *Equivalence, Invariantas and Symmetry*, Cambridge Univ. Press, 1995.

⁵²J.E.Marsden and T.S.Ratiu: *Introduction to Mechanics and Symmetry (2nd ed)*, Springer-Verlag, 1999.

de métodos determinantes ⁵³ para intentar resolver el problema de Gordan: ¿Es posible expresar los invariantes básicos (número finito) de formas binarias para cualquier polinomio homogéneo?. El Teorema de la Base de Hilbert da una respuesta afirmativa a esta cuestión, pero no proporciona ningún método constructivo para calcular los invariantes. Por ello, la afirmación de Hilbert de “haber terminado” con la Teoría de Invariantes, es tan sólo una declaración de intenciones.

La extensión de las construcciones explícitas de las Escuelas Británica y Alemana a formas en tres o más variables requiere herramientas adicionales fue desarrollada inicialmente a mano en el primer tercio del s.XX. Un compendio de las conexiones con el álgebra multilineal y las propiedades geométricas aparece en los libros de Turnbull (1928) y Room (1937), respectivamente. Lamentablemente ninguno de los dos ha sido reimpresso. Actualmente, estos tópicos se abordan en términos de la Teoría de Representación del Grupo Simétrico [Knu78] ⁵⁴ y de Variedades Determinantes (los libros de Eisenbud en Springer son la mejor referencia).

La versión computacional de los métodos efectivos de cálculo de invariantes (Knuth) utiliza bi-tableros de Young para gestionar la complicada combinatoria de las funciones simétricas. Además de algunas aplicaciones a la Geometría Algebraica Clásica (cálculo de la cohomología de variedades de Grassmann o de otros espacios universales, p.e.), permite calcular la complejidad espacial de algoritmos y reducir los procedimientos de búsqueda en Teoría de la Información. Estas cuestiones se abordan en capítulos avanzados de los módulos B_{11} (Computational Geometry) y B_{12} (Computational algebraic Topology). La versión combinatoria y sus conexiones con el Álgebra Conmutativa Computacional se puede ver en los trabajos de R.P.Stanley desde principios de los ochenta.

Clasificación de superficies

Uno de los objetivos iniciales de la Teoría de Invariantes estaba relacionado con la clasificación de variedades en baja dimensión. Una vez resuelta la clasificación para curvas algebraicas (ó si se prefiere, superficies compactas de Riemann) en términos del Teorema de Uniformización, el caso siguiente correspondía a superficies. La enorme complejidad de los cálculos explícitos para formas ternarias comentada en el párrafo precedente, así como las buenas propiedades del divisor canónico (esencialmente introducido por Riemann) motivaron el desarrollo de un enfoque alternativo.

La clasificación de superficies algebraicas se debe sobre todo a la Escuela Italiana encabezada en este caso por Castelnuovo y Enriques. La geometría subyacente a su enfoque fue compendiada y reformulada por Zariski, tras su regreso a USA. El enfoque integral había sido iniciado por E.Picard a instancias de H.Poincaré, y se describe en términos de integrales de primera y segunda

⁵³El compendio clásico más completo es [Roo37]

⁵⁴D.E.Knuth: *The Art of Computer Programming (vol.2)*, Addison-Wesley, 1978

especie (en relación con las condiciones de “adjunción” de Castelnuovo) como extensión del enfoque de Abel basado en integrales a lo largo de ciclos. El tratamiento de las “patologías” que pueden aparecer se desarrolla en términos de ciclos evanescentes (Lefschetz, 1927).

La idea básica para el enfoque diferencial consiste en estudiar el “comportamiento del flujo” asociado a la forma de volumen cambiante representada por el divisor canónico K_X . De una forma muy tosca, las potencias $K_X^{\otimes m}$ del divisor canónico se pueden interpretar como “auto-intersecciones sucesivas del divisor canónico cuyo soporte está dado por subvariedades de dimensión decreciente. En lenguaje moderno la tensorización de $K_X^{\otimes m}$ (o de $\omega_X^{\otimes m}$ en el caso singular) por las secciones de otros fibrados E o haces $\mathcal{E}$ proporciona la herramienta para analizar la restricción de $K_X^{\otimes m}$ a las restricciones asociadas a E ó de $\omega_X^{\otimes m}$ por $\mathcal{E}$ en el caso singular.

De este modo, la clasificación incorpora el estudio de subvariedades en términos de la tensorización por fibrados E o por haces $\mathcal{E}$ que representan restricciones adicionales. Por ello, este enfoque abstracto de las “condiciones de adjunción” es la continuación natural del enfoque primitivo de la Geometría Algebraica Proyectiva Compleja a principios del s.XIX cuando se estudiaban las condiciones de incidencia y tangencia a verificar por sistemas de curvas o superficies de grado fijo. La clasificación de superficies algebraicas de Enriques fue extendida por Kodaira a superficies analíticas a finales de los cincuenta principios de los sesenta (obtuvo la medalla Field por este y por otros trabajos relacionados con deformaciones).

0.2.3. El enfoque local

Los párrafos anteriores muestran la profunda imbricación entre aspectos locales y globales. Un ejemplo básico está dado por las condiciones de incidencia y tangencia de las cónicas del plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2$ con respecto a puntos y líneas, respectivamente, en posición general. Como el espacio de cónicas es $\mathbb{P}^5$, es necesario fijar 5 condiciones independientes. Como la condición de ser tangente es cuadrática, ello implica que 5 puntos determinan una única cónica, 4 puntos y una recta determinan dos cónicas, 3 puntos y 2 rectas determinan cuatro cónicas (por dualidad se obtienen las otras tres soluciones del problema). Estos “números característicos” corresponden a resolver un problema local.

Sin embargo, el problema de calcular el número de cónicas tangentes a una cónica dada es un problema global. Como la condición para que una cónica dada sea tangente a otra es de grado seis, una aplicación inmediata del Teorema de Bézout daría $6^5 = 7776$ soluciones. Este resultado da un número incorrecto, pues la hipersuperficie V que representa la condición de ser tangente a una recta doble se verifica para cualquier cónica, por lo que el número de soluciones sería infinito. Este resultado también es incorrecto. La solución correcta la dio Chasles (1865) descontando las “soluciones degeneradas” que aparecen en la auto-intersección V^5 de 5 copias de la hipersuperficie V . Encontrar un marco

general para la resolución de este tipo de problemas llevó más de cien años.

El ejemplo anterior pone de manifiesto la necesidad de formular correctamente nociones básicas que afectan a la noción de punto, las “buenas condiciones” para la intersección de variedades (posición general), la “multiplicidad” de intersección, y la noción misma de variedad. Empezamos por la noción más sencilla a de punto:

La noción de “punto” es básica para el enfoque local. En el marco de variedades afines y desde el punto de vista del Álgebra Local, se puede identificar con un ideal maximal $\mathfrak{m}$ del anillo coordenado local $\mathfrak{o}_x$ (ésta es una consecuencia del Teorema de los Ceros de Hilbert). Sin embargo, en el marco de esquemas un punto es un ideal primo $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(A)$ del anillo. Por ello, un punto en el caso de esquemas puede ser un punto en el sentido afín (cualquier ideal maximal es primo, pero no viceversa) o bien una subvariedad, no necesariamente reducida.

Por otro lado, cualquier ideal admite una descomposición en componentes primarias $\mathfrak{P}_i$ que pueden aparecer con multiplicidad $r_i \geq 1$. Esta idea permite representar algebraicamente las diferentes ramas que confluyen en un punto singular en sencillos términos algebraicos. Cuando se adopta la terminología de esquemas, la noción de componente inmersas está incluida desde el principio en la noción de punto, lo cual facilita asimismo un tratamiento conjunto de propiedades tanto geométricas, como de teoría algebraica de números (que no se desarrolla en estos apuntes).

Contrariamente a una primera impresión procedente de la Escuela Francesa, la Geometría Algebraica Local *no es* una ilustración del Álgebra Conmutativa Local. Presenta componentes procedentes de la interacción con Funciones de una y varias Variables Complejas (diferenciales e integrales abelianas, Teoría de Hodge y Cálculo Variacional Local), Topología Algebraica (inicialmente el grupo fundamental; más adelante teorías de Homología y Cohomología), Topología Diferencial Local (Teoría del Grado, Ciclos evanescentes, Teoría de Morse), Grupos Clásicos (como extensión de la Geometría Proyectiva Compleja), Grupos Algebraicos y Teoría de Invariantes, entre otras áreas de Geometría y Topología.

Un objetivo de estas notas es tratar de presentar conceptos y resultados relevantes para las áreas mencionadas, incorporando el enfoque trascendente. El precedente más reciente para este enfoque híbrido es [Gri78]⁵⁵.

Anillos locales

Krull introduce los anillos locales de forma natural en el contexto de curvas X como anillos cocientes $A := k[x, y]/I$ donde I es un ideal principal de la forma (f) siendo $f(x, y) = 0$ la ecuación de una curva. Cualquier homomorfismo σ del anillo A en un cuerpo k' se llama una “especialización” de A que conserva los elementos de k .

Pasando al cuerpo de fracciones $k(X)$, se construye el anillo A' de los elementos u/v del cuerpo de fracciones tales que $u, v \in A$ y $\sigma(v) \neq 0$. El homomorfismo

⁵⁵P.Griffiths and J.Jarris: *Principles of Algebraic Geometry*, J.Wiley, 1978.

σ se extiende a A' haciendo $\sigma(u/v) := \sigma(u)/\sigma(v)$, obteniéndose que A' es un anillo de especialización cuyo ideal de no unidades en A' es el ideal de especialización (que es el núcleo de σ).

El anillo A' obtenido por el procedimiento de Krull es un anillo local y su complección (Cohen) con respecto a las potencias del ideal de especialización es un anillo local completo. Estas construcciones juegan un papel fundamental para entender los procedimientos de especialización de puntos o, con más generalidad, ciclos llevados a cabo por la Escuela Italiana en relación con aspectos topológicos de la Teoría de Intersección.

Estos argumentos fueron desarrollados y formalizados por Chevalley. La revisión y aplicación de estos argumentos al caso geométrico se debe inicialmente a Van der Waerden y Zariski a finales de los cuarenta y principios de los cincuenta; la supresión de las excepciones es consecuencia de la fórmula de los Tor de J.P.Serre tal y como se encuentra en la moderna Teoría de Intersección (Fulton, 1984) ⁵⁶

En un contexto más puramente algebraico correspondiente a la tradición de Krull, la noción de normalidad (introducida más tarde por Zariski) sugiere restringirse a los anillos de especialización que sean íntegramente cerrados. Así, la noción de variedades normales pasa a ocupar un lugar central desde mediados de siglo, así como los procedimientos explícitos para calcular el cierre íntegro. Hasta mediados de siglo, los morfismos σ de especialización se restringían a estudiar aplicaciones que conservaran la característica del cuerpo.

Por ello, como todos los anillos locales contienen el mismo cuerpo, su anillo de clases residuales tiene siempre la misma característica. Desde mediados de los años cincuenta, esta restricción es innecesaria, lo cual facilita el estudio de propiedades para cuerpos residuales de diferentes características. Este hecho es crucial para intentar demostrar un análogo al Teorema de Hironaka (1963) pero en característica arbitraria (problema abierto).

Elementos de Teoría de Intersección

El Teorema de Bézout es el primer resultado importante de la Teoría de Intersección Algebraica. La “demostración” inicial utilizaba principios de “degeneración” y de “conservación del número” que no estaban debidamente justificados. La necesidad de identificar su rango de validez y aplicabilidad da lugar a múltiples ramificaciones que van desde los primeros estudios de deformaciones, las degeneraciones que pueden aparecer (con singularidades que es preciso descontar o bien “contar apropiadamente”), la utilización de argumentos de “especialización” en los ideales asociados, y los sucesivos intentos de encontrar una noción correcta de multiplicidad de intersección. ⁵⁷

⁵⁶Para un desarrollo histórico de la noción de multiplicidad y una aplicación de estos argumentos a la Geometría Enumerativa ver el capítulo 1 del module A_{35} de este Curso

⁵⁷En el capítulo 1 del module A_{35} (Geometría Enumerativa) se puede leer una intrahistoria de los sucesivos intentos y fracasos (contraejemplos) para establecer la “noción correcta” de

La solución definitiva la da J.P.Serre en un curso impartido en el College de France (1957-58), introduciendo la multiplicidad de intersección en términos de sumas aritméticas de longitudes de productos tensoriales de módulos (para incorporar la posible presencia de elementos inmersos). Esta solución es “natural” una vez que se entiende cómo el producto de intersección se expresa algebraicamente en términos (de las longitudes) del producto tensorial de los anillos de funciones regulares construidos sobre las variedades [Ser65] ⁵⁸

La idea de Serre ya estaba implícita en el enfoque topológico de Lefschetz para calcular los puntos fijos de una aplicación $f : X \rightarrow X$ que se lleva a cabo en términos de la intersección del grafo Γ_f de una aplicación con la diagonal $\Delta_X \subset X \times X$. La información adicional de la fórmula de los Tor de Serre consiste en incorporar componentes inmersas y la posibilidad de “descontar” elementos incluidos en componentes contadas previamente y de su validez para cualquier contexto algebraico.

Tras la disponibilidad de una noción correcta de multiplicidad de intersección, se procede a la revisión y reformulación del legado anterior, tanto en los problemas de clasificación de variedades como en la Geometría Enumerativa, incluyendo las fórmulas puntos múltiples para aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ entre variedades. Las relaciones entre las nociones algebraica, topológica, diferencial y analítica dan lugar a una vasta literatura que se reformula de manera unificada en [Ful84] ⁵⁹

La irrupción del Álgebra Homológica

De una forma un tanto vaga, se puede decir que el Álgebra Homológica se ocupa de las propiedades formales que afectan a los (homo)morfismos de las diferentes estructuras algebraicas (grupos, anillos, módulos, p.e.) que aparecen en Álgebra. Si “se anula” uno de los términos del morfismo (inicial o final) en correspondencia con la trivialidad del núcleo o del conúcleo, se obtiene una descripción completamente general correspondiente al estudio de cualquier conjunto de soluciones o de restricciones relacionadas con los generadores de la estructura algebraica. Esto da lugar a dos tipos de resoluciones etiquetadas como inyectivas (cuyo primer elemento es nulo) vs proyectivas (cuyo último elemento es nulo).

La introducción de resoluciones (inyectiva vs proyectiva) de módulos proporciona herramientas para estudiar los homomorfismos entre módulos, como una extensión natural del estudio de propiedades para el conjunto de soluciones de sistemas de ecuaciones. En términos pedestres y de forma similar al enfoque desarrollado en el Grupo Fundamental, podemos pensar en este problema como la especificación de relaciones algebraicas entre generadores. Una extensión de este enfoque al estudio del desdoblamiento (deformaciones versales) para gérmenes

multiplicidad.

⁵⁸J.P.Serre: *Algebre Locale. Multiplicités*, LNM 4, Springer-Verlag, 1965.

⁵⁹W.Fulton: *Intersection Theory*, Springer-Verlag, 1984.

de aplicaciones versales fue llevado a cabo por J.Damon, T.Gaffney, y D.Mond a lo largo de los noventa.⁶⁰

Interesa identificar estructuras libres (sin torsión) ó bien planas (buen comportamiento con respecto al producto tensorial correspondiente al “cambio de base” o “especialización” en la antigua terminología). La construcción recurrente de resoluciones libres o planas permite resolver problemas de resolución de sistemas de ecuaciones de forma recurrente. Asimismo, si las resoluciones son finitas (sólo un número finito de términos es distinto de cero) interesa que las resoluciones tengan el número mínimo de elementos. A estas resoluciones (puede haber varias) se les llama resoluciones minimales.

La construcción de resoluciones inyectivas o proyectivas se extiende de forma inmediata a estructuras graduadas dadas inicialmente por módulos y álgebras. La adaptación al caso global se lleva a cabo en términos de haces de módulos o de álgebras. Estas estructuras graduadas son de uso común en Topología Algebraica en relación con las teorías de Homología y Cohomología A_{22} y los complejos celulares A_{23} . Los ejemplos correspondientes a espacios homogéneos se han desarrollado en el módulo A_{24} (Topología Geométrica). Su extensión al análisis armónico sobre espacios localmente simétricos aún presenta problemas abiertos importantes.

Una de las aplicaciones más relevantes de las resoluciones a la Geometría Algebraica Clásica está relacionada con el estudio de los Lugares Determinantales, es decir, definidos por la anulación de los determinantes de los menores de un tamaño prefijado dentro de una matriz. La extensión del Álgebra Lineal a multitud de problemas que aparecen en otras áreas científicas y tecnológicas, incluyendo aspectos cinemáticos (relativos a la evolución espacio-temporal) ó dinámicos (vinculados a la interacción consigo mismo o con el medio).

El compendio más amplio de los resultados conocidos hasta el primer tercio del siglo XX es [Roo37]⁶¹. Las publicaciones de las escuelas británica y norteamericana desde los años setenta pavimentan el camino hacia una nueva síntesis que aparece en el libro de Eisenbud. No obstante, aún hay una cantidad considerable de materiales del libro de Room (1937) pendientes de revisar.

Algunas de las aplicaciones más inmediatas en Ingeniería conciernen a la resolución de los problemas directo e inverso para la Cinemática y la Dinámica en Robótica B_3 . La formulación inicial de estos problemas se lleva a cabo en términos de variedades determinantales sobre el fibrado tangente τ_P al espacio de las fases P sobre el que es necesario desarrollar estrategias de control (funciones algebraicas definidas sobre TP que deben ser reducidas a funciones sobre P). Habitualmente, no se dispone de una “expresión compacta” para las soluciones de los sistemas de ecuaciones matriciales correspondientes a ambas áreas.

Las ecuaciones estructurales de tipo matricial para la cinemática ó la Dinámica se interpretan como aplicaciones entre los módulos diferenciales construidos sobre el espacio de las fases asociado a cada uno de los soportes habituales dados

⁶⁰Ver el capítulo 7 de A_{44} (Singular map-germs) para detalles y referencias.

⁶¹T.G.Room: *The Geometry of Determinantal Loci*, Cambridge Univ. Press, 1937.

inicialmente por los espacios de juntas o de Configuraciones $\mathcal{C}$ y de trabajo $\mathcal{W}$
62

Otra aplicación de interés está relacionada con el aprendizaje (supervisado vs no-supervisado) basado en la modificación de pesos en las neuronas o nodos de una Red Neuronal Artificial (ANN). Cada nodo es el soporte de una función de activación/inhibición según un PS-modelo similar al de las funciones meseta utilizadas en particiones del aunidad en Geometría Diferencial para pegar datos locales; un ejemplo típico está dado por la función tangente hiperbólica $\tanh(\theta)$ que depende esencialmente de un único parámetro θ (ReLU proporciona una PL-aproximación computacionalmente más eficiente)

Para una ANN “completamente conectada” cada neurona de la capa i -ésima L_i está conectada con *todas* las neuronas de la capa $(i + 1)$ -ésima L_{i+1} (modelo poco realista, pero fácil de imlementar). Si n_i es el número de neuronas de la capa L_i , un modelo algebraico para el aprendizaje está dado por aplicaciones

$$\dots \rightarrow \mathcal{O}_X^{n_{i-1}} \rightarrow \mathcal{O}_X^{n_i} \rightarrow \mathcal{O}_X^{n_{i+1}} \rightarrow \dots$$

que se pueden interpretar en términos de resoluciones (inyectivas vs proyectivas) dependiendo de condiciones iniciales o de restricciones.

En nuestro enfoque, la evolución temporal (resp. adaptada a restricciones cambiantes) se describe por los correspondientes modelos discretos para los módulos de derivaciones (resp. diferenciales). La modificación de pesos se realiza inicialmente de forma aleatoria y, en fases más avanzadas, usando estrategias de reforzamiento.

Lamentablemente, los elementos que aparecen en sucesiones exactas del tipo anterior no tienen por qué ser proyectivos, incluso aunque sean localmente libre o planos. Dos opciones alternativas consisten en construir los “funtores derivados” o, alternativamente, analizar el comportamiento por “cambio de punto base” (producto tensorial). Un estudio más detallado de estas cuestiones requiere elementos adicionales que se introducen en el módulo A_{33} .

En el enfoque que desarrollamos en B_{24} (Reconocimiento) de B_2 (Visión Computacional) y en todos los módulos de b_3 (Robotics) utilizamos propiedades básicas de distribuciones $\mathcal{D}$ de campos vectoriales y sistemas $\mathcal{S}$ de formas diferenciales para controlar “múltiples trayectorias” sometidas a restricciones que suponemos inicialmente independientes. El modelo geométrico más inmediato está dado por pares de variedades de Grassmann.

Sin embargo, a la vista de las “degeneraciones” o “regeneraciones” que pueden aparecer, es preferible usar el espacio tangente a variedades de banderas. Esta idea básica justifica la utilización de resoluciones (inyectivas vs proyectivas) de pares de complejos de álgebras graduadas. En las aplicaciones que se desarroollan en la parte II de estas notas, suponemos que hay “suficientes proyectivos” (resp. “inyectivos”).

⁶²Este enfoque se especifica y se extiende en B_3 a los espacios de Percepción $\mathcal{P}$ y de Acción $\mathcal{A}$.

Resolución de singularidades

Sea $X \subset \mathbb{P}_k^n$ una variedad proyectiva irreducible. Se dice $Y \subset \mathbb{P}_k^N$ es una *resolución de singularidades* ó una *desingularización* de X si existe un morfismo algebraico regular $\pi : Y \rightarrow X$ tal que

- Y es no-singular;
- π es propia, es decir, universalmente cerrada para cualquier cambio de base;
- π induce un isomorfismo entre $Y - \pi^{-1}(\text{Sing } X)$ y $X - \text{Sing}(X)$

La resolución de singularidades para curvas era bien conocida a finales del s.XIX; actualmente, se lleva a cabo mediante una composición de normalizaciones, para las que existen procedimientos explícitos que permiten calcular el cierre íntegro en característica arbitraria. La primera demostración para superficies algebraicas complejas aparece en la tesis de Walker dirigida por Lefschetz. Una demostración alternativa para este caso fue dada posteriormente por Zariski utilizando una composición de explosiones de puntos y de normalizaciones de forma alternativa.

El caso general para característica cero fue resuelto por H.Hironaka (1963) quien recibió la medalla Field por este trabajo; para una presentación moderna ver [Aro18]⁶³. De una forma intuitiva, este resultado garantiza que para cualquier función analítica $h(w)$, existe una variedad n -dimensional X y una aplicación analítica $g : X \rightarrow W$, tal que para cualquier abierto coordenado $U \subset X$ con coordenadas locales $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$, tal que la función $h(w)$ se escribe en las nuevas coordenadas como

$$h(g(\underline{u})) = u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n},$$

donde $k_1, \dots, k_n$ son enteros no-negativos⁶⁴. En lenguaje geométrico, el lugar de ceros es un divisor con cruzamientos normales, donde cada componente puede aparecer con multiplicidad k_i . Además, existe una función $\varphi(\underline{u}) > 0$ y enteros no-negativos $a_1, \dots, a_n$ tales que

$$\varphi(g(\underline{u})) |g'(\underline{u})| = \phi(\underline{u}) |u_1^{a_1} \dots u_n^{a_n}|,$$

donde $|g'(\underline{u})|$ es el determinante de la matriz jacobiana $Jac(g) = g'(\underline{u})$. Esta última propiedad es crucial para garantizar “buenas propiedades” de la estratificación analítica asociada a la resolución de singularidades⁶⁵

La resolución de singularidades tiene interés no sólo para cuestiones de clasificación en dimensión arbitraria para variedades construidas sobre cuerpos

⁶³J.M.Aroca, H.Hironaka, J.L.Vicente: *Complex Analytic Desingularization*, Springer-Verlag, 2018.

⁶⁴Este resultado se extiende al caso real tomando $2k_i$ como exponentes

⁶⁵Este tópico se desarrolla con más detalle en el módulo A_{45} (Estratificaciones) de la materia A_4 (Topología Diferencial).

(inicialmente algebraicamente cerrados), sino también para aplicaciones a otras áreas de conocimiento. Nótese que la descomposición final a la que se llega describe un “desacoplamiento” con respecto a un nuevo sistema de coordenadas para funciones que puedan presentar singularidades arbitrarias ⁶⁶.

Una aplicación reciente de la clasificación de singularidades a cuestiones de “aprendizaje de variedades” en el marco de la Inteligencia Artificial (donde las coordenadas locales $\underline{u}$ están dadas por funciones de densidad de probabilidad “privilegiadas” se puede ver en [Wat09] ⁶⁷ Las cuestiones relacionadas con aprendizaje basado en Redes Neuronales Artificiales (ANN) se abordan con más detalle en los módulos B_{24} (Recognition) de la materia B_2 (Computer Vision) y en varios módulos de la materia B_3 (Robotics), donde se introducen las herramientas necesarias para Deep Learning según [Goo16] ⁶⁸

grado

0.2.4. El enfoque global

Las ideas básicas para pasar de aspectos locales a globales es la misma que la expuesta en Geometría Diferencial sobre la intersección $U_i \cap U_j$ de abiertos coordenados afines $U_i := D^*(f_i)$ (complementarios del cerrado de Zariski $V(f_i)$, en nuestro caso). El pegado se lleva cabo mediante transformaciones birracionales

$$(\phi_j \circ \phi_i^{-1})|_{\phi_i(U_i \cap U_j)} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

El ejemplo básico está dado por los cambios de carta $z_i z_j^{-1}$ correspondientes a la intersección $U_i \cap U_j := D^+(z_i) \cap D^+(z_j)$ correspondiente al recubrimiento usual de $\mathbb{P}^n$ donde $D^+(z_i) := \{\underline{z} \in \mathbb{P}^n \mid z_i \neq 0\}$ isomorfo a $\mathbb{A}^n$. Reemplazando z_i por el ideal principal (f_i) se obtiene la adaptación al caso general. El paso siguiente consiste en reemplazar los ideales principales por ideales primos $\mathfrak{p}_i$ que se toman como los elementos base o “puntos” del espacio topológico base (en el marco computacional OOP son los “objetos” básicos).

La extensión a estructuras localmente triviales Prehaces) sigue una estrategia similar a la de los fibrados vectoriales y principales que se ha expuesto en el módulo A_{12} (Linealización) de Geometría Diferencial A_1 . Los fibrados vectoriales de rango r proporcionan los ejemplos más simples de (pre-)haces de módulos localmente libres de rango r . En el marco GAGA, la dimensión de la fibra puede variar; en particular el núcleo y el conúcleo de un morfismo de (pre)haces es asimismo un (pre)haz, a diferencia del caso de fibrados vectoriales. En los párrafos siguientes se muestra la conexión con otras áreas comentadas más arriba.

⁶⁶En el marco diferencial clásico, esto sólo es conocido para fibrados sobre variedades muy particulares como curvas racionales, las esferas paralelizables o bien la variedad de banderas completas (R.Bott and L.W.Tu (1983).

⁶⁷S.Watanabe: *Algebraic Geometry and Statistical Learning Theory*, Cambridge Univ. Press, 2009.

⁶⁸I.Goodfellow, Y.Bengio, and A.Courville: *Deep Learning*, Cambridge Univ. Press, 2016.

La aproximación topológica

La clasificación (topológica, diferencial, algebraica, analítica) depende básicamente del tipo de “deformaciones” dadas por “equivalencias” (homeomorfismos, difeomorfismos, transformaciones birracionales ó bianalíticas ⁶⁹) que está permitido realizar sobre una variedad.

Una estrategia común consiste en superponer diferentes tipos de estructuras y clasificar dichas estructuras mediante invariantes calculables mediante métodos algebraicos. Las estructuras más generales (por ello más débiles) son topológicas y afectan a espacios de caminos eventualmente cerrados (ciclos) o mallas simpliciales, y sus generalizaciones. ⁷⁰

El cálculo de grupos de homotopía $\pi_k(X)$ (clases de ciclos equivalentes a $\mathbb{S}^k$) y de grupos de homología $H_k(X; \mathbb{K})$ ó de cohomología $H^k(X; \mathbb{K})$ proporciona una colección de invariantes topológicos (en realidad, de la clase de homotopía) que permiten abordar el problema de clasificación de variedades. La extensión de este enfoque al caso de variedades (diferenciables, algebraicas, analíticas) era el principal reto a resolver a mediados de los cincuenta del s.XX.

La influencia de la Geometría Diferencial

La Teoría de Fibrados Vectoriales y su aplicación a Variedades Diferenciales era una disciplina consolidada a finales de los años cincuenta. Los fibrados vectoriales más simples sobre una variedad diferenciable son el fibrado tangente τ_M y el cotangente Ω_M^1 que proporcionan la linealización y su dual (como funcionales lineales sobre el tangente) de la estructura original de la variedad diferenciable M . Las estructuras superpuestas a variedades simplifican el problema de la caracterización y clasificación de variedades.

Las condiciones de trivialidad local relativas a ambos fibrados se extienden de forma natural a fibrados tensoriales $T_M^{r,s}$ más generales o a fibrados vectoriales arbitrarios asociados a una versión global de sistemas de EDP. Estas construcciones diseñadas inicialmente para el caso diferenciable real, se extienden de forma casi inmediata a variedades algebraicas o analítica, con especial interés en el caso (casi-)complejo. En particular, el estudio de fibrados vectoriales sobre variedades algebraicas ó analíticas de baja dimensión es un tópico importante de investigación ⁷¹.

En todos los casos, la cohomología a valores en $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) asociadas al complejo de formas diferenciales de DeRham (resp. Dolbeault) construidas sobre variedades reales (resp. complejas) proporciona una colección de invariantes de variedades. Las condiciones de trivialidad local del fibrado y los teoremas tipo Künneth (más adelante, Leray-Hirsch) permiten calcular los invariantes de

⁶⁹En el caso complejo, la condición de ser bi-analítica es equivalente a ser biholomorfa

⁷⁰Un ciclo en homotopía es topológicamente equivalente a $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$; la extensión de este enfoque a dimensión arbitraria utiliza clases de homotopía correspondientes a las imágenes de $\mathbb{S}^n = \partial\mathbb{D}^{n+1}$ en la variedad topológica

⁷¹A partir del módulo 3 se muestran varios desarrollos en Geometría Algebraica

fibrados vectoriales en términos de los invariantes cohomológicos de la base. W.Hodge refina estos resultados en términos de estructura holomorfa para el caso complejo.

La existencia de espacios clasificantes (grassmannianas, variedades de banderas) y fibrados universales (tautológicos, p.e.) proporcionan la clave para caracterizar las clases módulo isomorfismo de las estructuras superpuestas (fibrados) en términos de las clases de homotopía de aplicaciones definidas sobre el espacio clasificante. Este enfoque se extiende a todos los tipos de operadores diferenciales elípticos sobre variedades compactas, dando lugar a la primera gran unificación en el contexto diferencial llevada a cabo por M.Atiya e I.Singer a principios de los setenta.

Haces y Cohomología

La aplicación de la Teoría de Fibrados a variedades algebraicas presenta serios problemas, debido a la “rigidez” de las condiciones que impone relacionadas con las condiciones de trivialidad local. Además, las (estructuras sobre) variedades no tienen buenas propiedades funtoriales con respecto a imágenes directas o imágenes recíprocas. Era necesario debilitar las condiciones sobre dichas estructuras superpuestas para resolver el programa de aritmetización de la Topología Algebraica lanzado por A.Weil a principios de los cincuenta.

Los primeros resultados significativos que proporcionan la clave para abordar dicha resolución se deben a J.P.Serre (1955) y A.Grothendieck (1958) con la introducción del formalismo de haces y herramientas para el cálculo de invariantes mediante la cohomología. El desarrollo de los EGAs por parte de Grothendieck a lo largo de los sesenta (dedicados a A.Weil y O.Zariski, no por casualidad) y su escuela en torno a los SGA proporcionan las claves para sistematizar la Geometría Algebraica, proporcionar el soporte para la unificación con Geometría Analítica y Teoría de Números, y para el cálculo de invariantes asociados a la cohomología de haces.

El desarrollo simultáneo de las escuelas francesa (J.P.Serre y A.Grothendieck), norteamericana (O.Zariski) y rusa (I.R.Shafarevich) proporcionan el caldo de cultivo para la mayor parte de los desarrollos de Geometría Algebraica en el último tercio del s.XX. Las escuelas japonesa (H.Hironaka) e india (S.Abhyankar) se pueden considerar como “ramas” de las anteriores, pues tanto Hironaka como Abhyankar son discípulos de Zariski. Un tratamiento más sistemático de los fundamentos se lleva a cabo en el módulo 3. Las aplicaciones a superficies, teoría de intersección y threefolds se desarrollan en los tres módulos siguientes.

Algunas relaciones con Física

A lo largo de la Historia, frecuentemente los avances de las Matemáticas y la Física han discurrido en paralelo. Algunos de los ejemplos más significativos conciernen a la gravitación newtoniana, la óptica geométrica, la mecánica

analítica, el electromagnetismo, ó la Relatividad General, por citar sólo algunos de los más significativos desde el punto de vista geométrico.

Más recientemente, la confluencia entre las estructuras simpléctica, riemanniana y compleja sobre las superficies algebraicas $K3$ con excelentes propiedades ha proporcionado soporte para algunos de los problemas más relevantes relacionados con la unificación para los diferentes tipos de interacción: gravitatoria, electromagnética, débil y fuerte. El modelo estándar ha conseguido unificar las interacciones electromagnética, débil y fuerte; el grupo estructural está dado por el producto $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ (producto de los grupos estructurales para cada tipo de interacción). Sin embargo, la unificación con la gravitatoria es un problema aún abierto que actualmente se aborda en términos de modelos cuantizados de gravitación.

Una importante conexión con la Geometría Algebraica procede del estudio de propiedades de las soluciones de las ecuaciones de Yang-Mills que son las ecuaciones estructurales del modelo estándar. En el contexto de la teoría de invariantes, las ecuaciones de Yang-Mills se pueden considerar como una extensión del electromagnetismo de Maxwell en el marco de teorías gauge no necesariamente abelianas.

Las soluciones postuladas a partir de los modelos físicos para las interacciones electromagnética, débiles (instantones) y fuertes se abordaron en dos fases correspondientes al estudio de soluciones auto-duales (superficies en espacios 4-dimensionales) a finales de los setenta y sus perturbaciones genéricas, en primer lugar, y soluciones arbitrarias (S.Donaldson, medalla Fields en 1986) a principios de los años ochenta.

La teoría de supercuerdas es una de las teorías más desarrolladas en relación con la Gran Unificación en el marco de cuantización gravitatoria. Las soluciones más significativas para el caso general son curvas racionales contenidas en 3-folds. La superficie cubica general contiene 27 rectas; este análisis se extiende al caso de rectas proyectivas (sus imágenes son curvas racionales) contenidas en sólidos de Fano. Con más generalidad, el problema es el estudio del número finito de curvas racionales (cuerdas) que aparecen como soluciones generales de las ecuaciones estructurales de una cuantización del modelo gravitatorio. Al final de la siguiente sección se presentan algunos detalles sobre estos tópicos.

0.3. Algunas aplicaciones

El mayor problema para el desarrollo de las aplicaciones radica en que la mayor parte de los matemáticos ignoran la demanda procedente de diferentes áreas de la Ingeniería; la única posible excepción por parte de los matemáticos se refiere a su interés sobre cuestiones relacionadas con la Física Teórica ⁷². Ello da lugar a que las soluciones de los problemas reales estén siendo resueltas por científicos no-matemáticos lo cual tiene efectos positivos (acercamiento a las Matemáticas por parte de profesionales de otras áreas) y negativos (soluciones incompletas, en ocasiones no-óptimas, aproximación casuística, ausencia de rigor en las demostraciones, etc)

Esta actitud de distanciamiento es aún más acusada en Geometría Algebraica. Buena parte de los expertos en esta subárea presumen de la no-aplicabilidad de la Geometría Algebraica y exhiben su opinión como una virtud de este área. Además de ser una afirmación falsa que sólo denota ignorancia, como consecuencia la mayor parte de los matemáticos piensan que la Geometría Algebraica es inútil para resolver problemas de otras áreas de interés; por ello, basta con ignorar su actividad, a pesar de la gran cantidad de medallas Field en dicho área de conocimiento.

Esta situación ha dado lugar a un retroceso en la presencia de Geometría Algebraica (en los estudios superiores de Matemáticas), a una reducción sensible del número de estudiantes en este área y a un aislamiento de los expertos en torres de marfil cada vez más inaccesibles para la mayor parte no sólo de matemáticos, sino de expertos procedentes de otras áreas científicas o tecnológicas. Un buen índice es el estancamiento relativo en este área a pesar de la gran cantidad de problemas abiertos. Este retroceso social es fácilmente medible en términos de especialidades impartidas, publicaciones en revistas de impacto ó Medallas Field en los últimos veinte años.

El propósito de esta sección es proporcionar argumentos para rebatir esta opinión lamentablemente tan extendida. Para ello, se pasa revista a algunas aplicaciones en diferentes áreas. La selección de áreas no es objetiva y responde a criterios personales pero relacionados con los módulos en tornos a los cuales está organizada la materia. Por ello, presentan una dificultad creciente y la comprensión de su alcance está condicionada a un desarrollo de los diferentes módulos que se describen más abajo.

0.3.1. Geometría Algebraica en Ingeniería

El esquema básico de la parte II de estas notas tiene 4 materias etiquetadas como Computational Mechanics of Continuous Media B_1 , Computer Vision B_2 , Robotics B_3 y Computer Graphics B_4 . Esta ordenación sigue un orden creciente

⁷²La situación es aún peor en relación con otras áreas de conocimiento que se mencionan como subsecciones más abajo que lamentablemente se consideran como pseudociencia o no son consideradas como actividades curriculares para la profesión

de dificultad y de integración de diferentes métodos desde los modelos suaves, a su aproximación por PL-modelos, enfoque analítico y truncación algebraica, finalmente. Por ello, la aplicación de métodos GAGA a dichas áreas de Ingeniería sigue un orden inverso.

Las aplicaciones más inmediatas de la Geometría Algebraica están relacionadas con la utilización de curvas y superficies algebraicas de grado bajo para modelar objetos, trayectorias descritas por mecanismos articulados, controlar dispositivos, simplificar la simulación o la visualización de objetos complejos.

En la mayor parte de los casos, se trata de curvas y superficies algebraicas de grado d bajo (habitualmente $d \leq 4$); además, casi siempre se supone que estos objetos son racionales, es decir, imagen por una aplicación racional de la recta o del plano proyectivo. Ello se debe a la necesidad de implementar computacionalmente las soluciones para facilitar el control de la evolución espacio-temporal de los objetos asociados en términos de la discretización asociada a una parametrización del objeto.

Lamentablemente, las variedades racionales no parecen recabar mucha atención por parte de los expertos en Geometría Algebraica. Una excepción está dada por el estudio de soluciones de problemas de Geometría Enumerativa A_{35} en relación con Física Teórica (supercuerdas, funcional de Yang-Mills). La idea básica consiste en que las soluciones minimales del funcional de Yang-Mills están dadas por un número finito de curvas racionales; por ello, hay que empezar contando cuántas hay. Este es un tópico muy especializado que requiere conocimientos avanzados de Geometría Algebraica y Topología Diferencial Global A_{42} (Fibrados y fibraciones).

El funcional de Yang-Mills es un funcional de curvatura sobre el espacio de conexiones sobre un Fibrado Principal. Por ello, las soluciones que minimizan el funcional son invariante por la acción del grupo estructural G del fibrado correspondiente. Esta idea básica proporcionan el nexo con aspectos de la Teoría Geométrica de Invariantes (relativa a fibrados G -estables) y fue desarrollada en la tesis de F.Kirwan (bajo la dirección de M.Atiyah). Ello requiere algunas extensiones de la Teoría de Invariantes que se pueden ver en la tercera edición de [Mum8?]

Aparentemente, el enfoque anterior no tiene mucha relación con aplicaciones a Geometría. Sin embargo, no es así. Una idea similar a la utilizada por F.Kirwan en relación con el funcional de Yang-Mills aparece en el funcional de Mumford-Shah (1993) utilizado para reconocimiento y adaptación de contornos en imágenes.

La idea básica es nuevamente muy simple: el contorno o silueta s_α (como borde ∂r_α de una región plana r_α) se ajusta minimizando el efecto de fuerzas tangenciales sobre el borde y fuerzas normales (internas y externas) actuando $s_\alpha = \partial r_\alpha$ con condiciones prefijadas (problema de contorno en la terminología clásica).

A pesar de la inmensa literatura sobre Superficies Minimales, aún no se ha formulado un funcional tipo Mumford-Shah para superficies (de interés para

modelado 3D) o para superficies en movimiento (de interés para simulación y animación en 3D). Las aplicaciones a la industria multimedia son casi obvias. Algunos elementos básicos para estas cuestiones se comentan en varios módulos de B_4 (Computer Graphics).

No obstante, aún no disponemos de soluciones computacionales eficientes. Para alcanzarlas, se requieren elementos adicionales cuyos inputs proceden de Video 3D (el tópico más avanzado de Visión Computacional que se desarrolla en B_{26}); así como restricciones estructurales para los outputs procedentes de los modelos biomecánicos para Humanoides B_{35} y Animats B_{36} que aparecen en Robotics B_3 .

Desde un punto de vista computacional más efectivo, el paradigma más importante surgido a finales del siglo XX es la Geometría Conforme Computacional. Esta subárea desarrolla una aproximación computacional a la fusión de aspectos relativamente simples procedentes de la Geometría Diferencial A_1 , la Topología Algebraica A_2 , el Análisis Complejo (versión geométrica en A_{21} y A_{24}), las superficies de Riemann (versión topológica en A_{11}) y la Geometría Algebraica de las Superficies de Riemann A_{31} .

Las aplicaciones crecientes a diferentes áreas de Ingeniería están relacionadas sobre todo con gestión de redes inalámbricas (como extensión de las redes en Mecánica Computacional de Medios Continuos B_1), Visión Computacional B_2 (con especial atención a Imágenes Biomédicas), Deep Learning en Robotics B_3 , Modelado Geométrico B_{41} o, con más generalidad, asistencia a la producción de contenidos multimedia en Computer Graphics B_4 . Estas aplicaciones motivan que el último capítulo de A_{31} esté dedicado a exponer los fundamentos matemáticos de Geometría Computacional Conforme.

Los objetos que aparecen como soluciones de problemas de Ingeniería no son necesariamente algebraicos y las aproximaciones algebraicas pueden presentar grado muy alto. Basta pensar en una mano humana cuya silueta, teóricamente, requeriría trabajar con curvas planas de grado diez, algo imposible de manejar computacionalmente. Por ello, se adopta una estrategia basada en aproximar dichos objetos mediante técnicas de “pegado” de curvas o superficies de grado bajo.

A diferencia del enfoque teórico que se presenta en Geometría Diferencial o Algebraica, el pegado no tiene por qué ser localmente un difeomorfismo, ni tampoco una aplicación birregular. Por ello, un marco más apropiado es el diferencial a trozos o el analítico. En esta materia se da preferencia a los métodos algebraicos o analíticos; de forma complementaria, en A_4 se da preferencia al marco PS (suave a trozos).

Modelado racional

El *modelado* basado en Geometría Algebraica utiliza habitualmente curvas y superficies algebraicas racionales de grado bajo como las curvas tipo *snake* o splines generalizadas k -dimensionales definidas como variedades producto $\mathcal{C}_1^{d_1} \times$

$\dots \times \mathcal{C}_k^{d_k}$ de k curvas racionales $\mathcal{C}_i^{d_i}$ de grado d_i con pesos sobre puntos de control. Los “pesos” imponen condiciones de incidencia o tangencia para cada una de las curvas $\mathcal{C}_i$ de la variedad producto.

Así p.e., una superficie B-spline de bigrado (d_1, d_2) está definida localmente como el producto de dos “trozos” de curvas pesadas racionales (snakes) $\mathcal{C}_1$ de grado d_1 y $\mathcal{C}_2$ de grado d_2 . En las aplicaciones prácticas, no se requiere ninguna condición adicional relativa al pegado de curvas racionales de diferente grado; en cualquier caso, nótese que todas las curvas racionales son birracionalmente equivalentes independientemente del grado que presenten.

En particular, una B-spline de bigrado (d_1, d_2) sólo requiere fijar $(d_1+1)(d_2+1)$ elementos de control relativos a condiciones de incidencia o de tangencia. La Geometría Enumerativa de curvas algebraicas permite calcular el número de curvas de grado fijo que verifican el número requerido de dichas condiciones.

Una extensión inmediata concierne a threefolds T -splines de trigrado (d_1, d_2, d_3) que presentan gran interés para el modelado de sólidos deformables como los correspondientes a órganos internos para imágenes biomédicas tridimensionales, p.e. Un problema abierto concierne a la caracterización y clasificación de variedades splines de grado bajo. El interés de este problema radica en la necesidad de identificar la variedad spline óptima para la minimización de funcionales definidos sobre el espacio de splines. Este problema está abierto incluso para el caso de superficies B-splines.

Desde el punto de vista computacional, la parametrización estándar de cualquier trozo de curva racional normal por $\mathbb{A}^1$ proporciona modelos cuadrangulares para splines (superficiales o cuboidales) permitiendo irregularidades en la distribución de los puntos de control sobre cada una de las componentes. En las aplicaciones prácticas, estas irregularidades aparecen asociadas a la variación de la curvatura de los elementos superficiales o volumétricos que se desea aproximar mediante splines generalizadas.

La Geometría Conforme proporciona métodos y herramientas computacionales para transformar datos volumétricos a datos planares. Recíprocamente, todas las superficies en el mundo real admiten una estructura conforme, por lo que pueden ser elevadas (con bajo coste computacional) a modelos volumétricos. En la segunda década del siglo XXI se han desarrollado aplicaciones de estos resultados a imágenes biomédicas 3D y a hologramas más realistas, p.e.

Dependiendo de la aplicación para la que estén diseñadas, las variedades racionales pasan exactamente por los puntos de control o desde un punto de vista más práctico, los PL-elementos simpliciales (segmentos o triángulos, típicamente) distan de la variedad objetivo menos de un umbral prefijado. Actualmente, existen herramientas de modelado que permiten asociar curvas racionales a grado bajo a un número apropiado de puntos de control.⁷³

La condición relativa a la proximidad entre formas requiere un embebimiento de la variedad en un espacio métrico (euclídeo o hermitico, típicamente). En el

⁷³Una introducción a la automatización de este proceso se presenta en el módulo 1 (Geometric Shapes) de mis apuntes sobre *Computer Graphics. A Geometric Approach*.

caso de curvas, esto se lleva a cabo inicialmente de forma gráfica usando láminas elásticas que pueden vibrar en torno a los puntos de control para ajustarse mejor a condiciones de contorno. Una formalización de esta idea utiliza la métrica de Peterson-Weil sobre el espacio de moduli de curvas planas “simples” (cerradas y sin autointersecciones) en relación con el funcional de Mumford-Shah introducido para el reconocimiento de formas planares en imágenes.

La idea intuitiva para el funcional de Mumford-Shah (introducido para Reconocimiento de Formas en B_{24}) utiliza deformaciones normales (internas y externas) y tangenciales para los contornos de las curvas simples. El candidato natural para superficies debería ser un funcional de tipo variacional para superficies que admiten deformaciones normales (internas y externas) y tangenciales. Cuando dicho funcional es el de área mínima o el de curvatura (tipo Yang-Mills, p.e.) se dispone de información para las soluciones aproximables mediante B-splines.

La ignorancia actual sobre la estructura del espacio de superficies B-splines ó volúmenes T-splines (ni siquiera se sabe si es metrizable) da lugar a que el ajuste de tipo variacional sea un problema difícil de resolver en dimensiones 2 y 3. En particular, se requiere un estudio más detallado de las deformaciones en el espacio de splines generalizados y un análisis de las cuestiones de metrizabilidad para estos tipos de variedades. Algunos aspectos básicos de estas cuestiones se abordan en [Jut07] ⁷⁴

En un marco más “pedestre”, los casos inicialmente más significativos para aproximaciones lineales a trozos están dados por rectas secantes a curvas que aparecen de forma clásica como congruencias cuando X es una curva algebraica. Las congruencias de rectas proporcionan un marco geométrico para representar modelos lineales simplificados de propagación ondulatoria en el espacio. ⁷⁵

Con más generalidad, una PL-aproximación a una variedad algebraica proyectiva $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ desde el punto de vista de la Geometría Algebraica está dada por las variedades de secantes $Sec(k, X)$ dadas como el cierre del conjunto de puntos de $\mathbb{P}^n$ que están sobre subespacios k -dimensionales generados por $k + 1$ de X en posición general. La construcción de variedades de incidencia $VI(k, X)$ definidas como el cierre de

$$\{(z, L) \in \mathbb{P}^n \times Grass(k + 1, n + 1) \mid z \in L = \langle p_0, \dots, p_k \rangle \text{ con } p_i \in X\},$$

así como de sus proyecciones sobre el espacio ambiente $\mathbb{P}^n$ y $Grass(k + 1, n + 1)$ asociadas a las variedades de secantes y los k -subespacios secantes, permite transferir propiedades de las Grassmannianas a las variedades, extendiendo el enfoque de la aplicación de Gauss. Lamentablemente, las variedades de subespacios k -secantes $Sec(k, X)$ presentan singularidades a lo largo de los puntos

⁷⁴B.Jüttler, and R.Piene (eds): *Geometric Modeling and Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 2007.

⁷⁵La aproximación de tipo corpuscular se visualiza con técnicas de Informática Gráfica

situados en $\text{Sec}(k-1, X)$.⁷⁶

Por ello, la utilización de esta PL-aproximación a variedades algebraicas por subespacios lineales no es elemental, aunque proporciona una *conexión estructural* con métodos homológicos de la *Topología Algebraica* que han sido poco explotados hasta ahora. Las conexiones más habituales con la Teoría de Homotopía (SGA1 sigue siendo una de las mejores referencias) o con diferentes Teorías de Cohomología (Singular, DeRham, Dolbeault, Čech, etc) se desarrollan sobre todo a partir del módulo 3 de esta materia, aunque su aplicabilidad a Ingeniería es menos inmediata.

Desde un punto de vista computacional, la Topología Algebraica proporciona modelos computables asociados a descomposiciones simpliciales relativos a la homología con coeficientes constantes. En este caso, el énfasis se pone en aproximar el soporte de la variedad como espacio topológico con elementos básicos (símplices o células) que proporcionan una triangulación generalizada o una descomposición celular. Este tipo de descomposiciones es muy útil para la discretización del soporte y la aplicación de Métodos de Elementos Finitos (FEM) que permiten resolver una gran cantidad de problemas asociados a la discretización de ecuaciones diferenciales.

Los aspectos computacionales relativos al soporte se abordan en el módulo 2 (CAT: Computational Algebraic Topology) de mis apuntes sobre *Computational Mechanics*, mientras que los aspectos relativos al modelado semi-automático estático se abordan en el módulo 1 (Geometric Shapes) de mis apuntes sobre *Computer Graphics. A mathematical approach*.⁷⁷

Robótica

Un *robot* es un manipulador reprogramable multifuncional diseñado para mover materiales, piezas ó dispositivos especializados, a través de movimientos programados variables para la realización de diferentes tareas (definición dada por el Robot Institute of America, 1979).

El soporte para la arquitectura de un robot está dado por una ó varias cadenas cinemáticas articuladas conectadas. Cuando estas cadenas cinemáticas están conectadas a uno ó más cuerpos (plataformas con mecanismos de distribución) decimos que se tiene un robot paralelo de tipo multicuerpo. Los tipos más importantes son:

- *secuencial*, como p.e. un brazo articulado que puede operar en un plano variables o en el espacio 3D;
- *paralelo* como p.e. simuladores de vuelo incluyendo plataformas formadas por platos conectados entre sí mediante barras;

⁷⁶Un caso extremo corresponde a la curva racional normal caracterizada por $\text{Sing}(\text{Sec}(k, X)) = \text{Sec}(k-1, X)$ siempre que $\text{Sec}(k, X)$ sea una subvariedad propia de $\mathbb{P}^n$

⁷⁷Las actualizaciones de estos materiales se pueden descargar de <https://www.mobivap.es/miembros/javier-finat/>

- *multicuerpo* como p.e. robots móviles con patas conectadas a un elemento central habitualmente articulado;
- *híbrido* como p.e. robots humanoides.

En el caso más simple es necesario desarrollar un controlador para el seguimiento de la posición y de la orientación para el efector de cada cadena cinemática. Hay que minimizar el error (método de Lyapunov p.e. para el caso desacoplado) y garantizar la estabilidad usando métodos de interpolación, p.e. Las bases monomiales proporcionan una herramienta para la interpolación de polinomios, mientras que las funciones radiales facilitan la interpolación para superficies. Ambas se pueden reformular en el marco de la Geometría Algebraica.

Los robots móviles tradicionales están basados en plataformas con ruedas; cuando el terreno es irregular ó el robot tiene que salvar obstáculos (tuberías, escaleras, p.e.) es necesario considerar robots basados en patas para operar en entornos peligrosos, tóxicos ó de difícil acceso para los humanos. Garantizar la estabilidad y la convergencia de las soluciones en regiones acotadas controlables es un problema no-trivial.

La simulación de carga y de las soluciones “fundamentales” (asociadas a un problema de valores propios en SVD, p.e.) requiere técnicas avanzadas de interpolación (Amano, Kitagawa) más allá de las bases monomiales o las funciones radiales. En el enfoque desarrollado en los módulos B_{35} (Humanoid robots) y B_{36} (Animats) usamos modelos de control para funciones definidas sobre una Grassmanniana (espacios generados por los efectores de cada extremidad) y sobre variedades de banderas (en previsión de posibles degeneraciones).

Para entender la utilidad de los modelos geométricos cambiantes en la realización de tareas es necesario conocer aspectos básicos de la arquitectura mecánica de un robot. La representación esquelética está formada por una colección finita de juntas, barras y platos que se representa mediante un grafo pesado dirigido (digraph). Las juntas más usuales (nodos del grafo) son rotacionales, esféricas o prismáticas. Para simplificar suponemos que sólo hay juntas rotacionales (cualquier junta esférica descompone en producto de tres rotaciones) y barras de longitud fija. Hay dos *tipos de espacios* que son significativos para la geometría del robot:

- El *espacio de configuraciones* $\mathcal{C}$ (llamado también articular o de juntas) es el espacio de estados de las juntas que generan el movimiento mediante diferentes tipos de comandos a controlar.
- El *espacio de trabajo* $\mathcal{W}$ asociado a la posición y orientación del efector final E_i ó extremo de cada cadena cinemática C_i del robot. Esta descripción proporciona una colección finita de puntos de control en el espacio ordinario.

La formulación en el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$ utiliza coordenadas generalizadas $(\underline{q}, \underline{p}, \underline{r})$ (Lagrange) con las relaciones estructurales dadas por el sistema

de 1-formas diferenciales $\underline{p}dt - d\underline{q}$ y $\underline{r}dt - \underline{p}$ que corresponden a la geometría de contacto (Legendre). La formulación en el espacio de trabajo $\mathcal{W}$ se aborda usando cadenas cinemáticas planares (mecanismos de tres barras para cada pata, p.e.) que podemos describir vectorialmente en el espacio de trabajo (usando referencias absolutas con respecto a una posición-orientación inicial ó relativas para el caso de la navegación a poses precedentes) ó analíticamente en términos de configuraciones geométricas (marco afín).

El análisis mecánico de un robot multicuerpo tiene diferentes niveles que se etiquetan como

1. *Geométrico* asociado a la aplicación de transferencia $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{W}$ que convierte los impulsos en cada junta a movimientos del efector final E_i de cada cadena cinemática C_i . El *control geométrico* se basa en la localización (posición y orientación) del efector final.
2. *Cinemático* asociado al 1-jet de la aplicación de transferencia $j^1\tau : J^1\mathcal{C} \rightarrow J^1\mathcal{W}$. El dato fundamental a controlar es la matriz jacobiana asociada a $j^1\tau$. El *control cinemático* se lleva a cabo en términos de la impedancia electromecánica del sistema.
3. *Dinámico* asociado al 2-jet de la aplicación de transferencia $j^1\tau : J^1\mathcal{C} \rightarrow J^1\mathcal{W}$. Los datos fundamentales a controlar proceden de la interacción con el medio y consigo mismo. El *control dinámico* se realiza en términos de la modificación gradual de mecanismos de tipo anticipatorio (para salir de la posición inicial de equilibrio) y compensatorio (para recuperar la estabilidad global del sistema).

La realimentación entre los diferentes tipos de control es crucial para mejorar la eficiencia en la realización de tareas por parte del robot, incluyendo HRI (Human Robot Interaction). La Geometría Computacional Conforme proporciona un soporte para los niveles Geométrico y Cinemático de la Robótica. La extensión al nivel dinámico (incluyendo los efectos asociados a la propagación de señales y su interacción con el entorno) está pendiente aún de desarrollo.

Además de las cuestiones relativas al control relacionadas en el apartado precedente, hay multitud de cuestiones en las que la Geometría Algebraica Real proporciona un soporte de utilidad para resolver problemas de Robótica. Entre ellas cabe destacar:

- Descripción de trayectorias realizadas por el efector final de un brazo robótico.
- Resolución de las ecuaciones algebraicas en términos de s_i (senos) y c_i (cosenos) correspondientes a las juntas rotacionales en las que descompone un robot sin juntas prismáticas, bajo las restricciones algebraicas asociadas a los movimientos permitidos.
- Identificación de los tipos de singularidades que pueden aparecer vinculados a configuraciones de desequilibrio (alineamiento entre componentes

consecutivas) o bien singularidades cinemáticas definidas por la anulación de la matriz jacobiana asociada a la aplicación de transferencia $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{W}$

Algunos de los tópicos más interesantes y menos explotados en la literatura conciernen a

- *Identificación de los diferentes tipos de simetrías* geométricas (asociadas a la arquitectura articulada de cada robot), cinemáticas (asociadas a la conservación de cantidades como el momento o la energía) ó dinámicas (asociadas a la interacción consigo mismo y con el entorno en el que actúa). Los *Grupos de Lie* proporcionan el soporte para desarrollar la cinemática (sobre álgebras de Lie) y la dinámica (en términos de espacios simétricos generados mediante geodésicas).
- *Realimentación entre los diferentes tipos de control* asociados a las simetrías detectadas a nivel geométrico, cinemático y dinámico. La *Geometría de Contacto* sobre los espacios de jets proporciona el marco para facilitar la prolongación de simetrías geométricas a la cinemática y la dinámica de los robots. Esta extensión es casi inmediata fuera del lugar singular.
- *Control mecánico sobre el robot* que afecta a la geometría de las restricciones y sus prolongaciones en espacios de jets, incluyendo el caso singular. Ello requiere identificar el tipo de singularidades y mostrar trayectorias que permitan atravesar dichas singularidades en lugar de evitarlas. El marco conceptual para este desarrollo utiliza *Estratificaciones equivariantes* asociadas a la aplicación de transferencia $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{W}$ y sus k -jets. Este tipo de argumentos está motivada por la utilización que los mamíferos hacemos del paso a través de singularidades mediante un control de las simetrías (geométricas, cinemáticas y dinámicas).

Todos estos aspectos han sido desarrollados en diferentes cursos impartidos en la SSSA de Pisa, Politécnico de Turin e Institut Fourier de Grenoble. Algunos de ellos han sido aplicados a componentes de robots humanoides. Para más detalles ver mis apuntes sobre Robótica.

Control visuo-motor

El control lineal es el más simple de todos. Un ejemplo básico de control geométrico corresponde a sistemas de la forma

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i(t) X_i(x) \quad x \in M$$

donde X_i es una colección de campos vectoriales definidos sobre un espacio de configuraciones M , con una *función de control* $u = (u_1, \dots, u_m)$ definida sobre

un intervalo $[0, T]$ que toma valores en un compacto $K \subset \mathbb{K}^m$ con interior no vacío que suponemos inicialmente simétrico (para evitar efectos de “deriva”).

En el caso regular, una vez fijadas condiciones iniciales (relativas al espacio tangente a la trayectoria) y con las restricciones de Lipschitz habituales (control de la variación de espacios secantes), la EDO lineal descrita más arriba admite una única solución en cada punto que representa el comportamiento de la trayectoria que resuelve el sistema descrito.

Algunos *objetivos básicos* de la *Teoría Clásica de Control* consisten en identificar:

- el conjunto de puntos accesibles por las soluciones del sistema;
- la trayectoria que se recorre en tiempo mínimo;
- la función de control $u = (u_1, \dots, u_m)$ que garantice una propiedad previamente especificada para la solución x_u del sistema.

Cuando la topología del espacio ambiente es la del espacio cartesiano, los problemas citados son sencillos de resolver desde un punto de vista teórico. Sin embargo, la introducción de un soporte con restricciones algebraicas o con comportamiento no-regular para el sistema, complica el problema de control, haciendo intervenir la topología de las variedades algebraicas debido al carácter no-lineal del soporte.

Desde un punto de vista dual, topologías complicadas se pueden interpretar en términos de funciones no-lineales que es necesario aproximar por polinomios. La adaptación a condiciones eventualmente cambiantes requiere modelos no-lineales de control capaces de “auto-adaptarse” a condiciones que podemos suponer dadas por aplicaciones polinomiales cuyas componentes son polinomios de grado bajo.

Por otro lado, en ausencia de información completa se puede interpretar la función de control $u(t)$ como un input que se transforma en una salida $\underline{x}(t)$ a través de un sistema A del que sólo se dispone de información parcial de tipo tangencial ⁷⁸.

En presencia de información incompleta, las funciones definidas sobre variedades de Grassmann proporcionan un “modelo suficientemente general” para controlar la dinámica en función de la información disponible cambiante (representada idealmente como un subespacio vectorial). En presencia de degeneraciones (reducción en la dimensionalidad) es necesario introducir funciones de control sobre variedades de banderas ⁷⁹

En la práctica, es necesario introducir condiciones de “atracción” (convergencia de soluciones) ó de “estabilidad” para la dinámica en torno a una variedad

⁷⁸Esta situación es típica en casi todos los fenómenos físicos de tipo experimental y en todos los modelos sociales, a pesar de que buena parte de la Teoría Económica se sustenta sobre hipótesis inverosímiles como p.e. la información completa o el comportamiento racional de los agentes económicos.

⁷⁹La adaptación de este enfoque a Teoría Económica se ha introducido en A_{29} . La adaptación a Robótica se introduce en B_{37} en relación con robots paralelos (plataformas de Stewart, p.e.).

algebraica (comportamiento por deformaciones, p.e.) o para estructuras superpuestas (acotación de invariantes para subfibrados que no permitan “saltos” por encima de un umbral, p.e.).

Para representar dicha convergencia se utilizan condiciones de realimentación que permite discretizar el modelo, interpolar entre soluciones toscas y actuar en relación con atractores y órbitas periódicas. El control utiliza restricciones de tipo métrico sobre el espacio ambiente en el que está sumergida la variedad solución y sus deformaciones. Por ello, el marco para abordar este tipo de cuestiones es la Geometría Algebraica Diferencial.

Dos desarrollos relevantes conciernen a las aplicaciones a Robótica (que se comentan en el apartado siguiente) o bien las aplicaciones a Teoría Económica en el marco de la Macroeconomía Keynesiana. Desde los años ochenta, la Robótica ha adoptado herramientas de tipo geométrico para resolver cuestiones de control, motivando una realimentación creciente.

La situación en Teoría Económica es bastante diferente, pues el análisis dinámico está menos desarrollado de lo que sería deseable. En el mejor de los casos se utilizan métodos de Estática Comparativa que ignoran los rudimentos básicos de las Foliaciones como herramientas para describir las modificaciones en el comportamiento de los agentes económicos.⁸⁰

Dinámica Computacional de Fluidos

A lo largo de los años noventa ha tenido lugar un extraordinario crecimiento de métodos de cálculo y herramientas de simulación para estimar y visualizar el comportamiento de sistemas dinámicos de gran complejidad que se presentan en diferentes áreas de conocimiento relacionadas con fenómenos atmosféricos, la simulación de gases en torno a perfiles en diferentes tipos de industria (automovilística, aeronáutica, aeroespacial), el comportamiento de los mercados, el modelado de órganos internos del cuerpo humano ó funcionalidades (sistema vascular, flujos de actividad cerebral), ó el soporte a la creación de contenidos en la industrial multimedia, entre otros.

A pesar de los avances realizados en el modelado computacional, los avances en distribución de procesos y el desarrollo de modelos más eficientes de Visualización Avanzada, la elevada complejidad de los algoritmos y el tiempo requerido para realizar cálculos siguen representando obstáculos muy difíciles de salvar. Para facilitar el control de la ingente cantidad de información a procesar se requiere un agrupamiento en torno a variedades (como soporte geométrico) y su posible evolución a lo largo del espacio-tiempo sobre el fibrado (co)tangente (como soporte a la cinemática).

Los *requerimientos para alcanzar soluciones más eficientes* no son únicos y dependen del tipo de aplicación. Algunos de los más importantes son los siguientes:

⁸⁰La reformulación en términos de los fibrados horizontal y vertical a una foliación $\mathcal{F}$ se han presentado en el capítulo 8 del module A_{14} (Differential Forms) de A_1 (Differential Geometry

- *Comportamiento estable para las soluciones:* Hay que desarrollar una aproximación tolerante a fallos o cambios de estado, lo cual excluye en principio la presencia de singularidades no sólo en la Geometría, sino en los modelos cinemáticos o dinámicos. En las proximidades de soluciones singulares para modelos vinculados a la industria aeronáutica y aeroespacial es necesario mostrar mecanismos de control que permitan evitarlas. Desde un punto de vista dual, es necesario introducir criterios de optimización de tipo cuantitativo (métricas sobre espacios de funciones o de formas)⁸¹ o bien cualitativo
- *Gestión asíncrona de flujos* que pueda incluir retrasos (ajuste no-simultáneo) en la memoria encargada de gestionar la ingente cantidad de información. Existen múltiples técnicas cuya paralelización se ha iniciado en los noventa tales como la evaluación de matrices jacobianas, el análisis granular de componentes constitutivas sobre modelos localmente simétricos, el procesamiento cada vez más rápido sobre tarjetas gráficas aceleradoras (GPU), la monitorización en los mecanismos de convergencia asociada a diferentes tipos de control (ver más arriba), etc. Ahora se requiere una arquitectura modular para redistribuir los flujos en diferentes hilos asignando prioridades dependientes de diferentes parámetros (tiempo, energía, topología de caminos críticos) que se superponen como diferentes capas al modelo geométrico inicial. Para mejorar la eficiencia del modelo resultante es necesario identificar correctamente el estado, calcular el residuo, actualizar y corregir la solución en función de los resultados obtenidos.
- *Control dinámico* de fenómenos asociados a la *ramificación* (presencia de singularidades) relacionados con la naturaleza del soporte (redes planares o espaciales, sistema vascular, flujo de conexiones sinápticas) con capacidad de auto-generación. Aunque las funcionalidades sean similares, no existe una única “arquitectura” para el soporte; por ello, el énfasis se debe poner sobre las funciones definidas sobre una arquitectura lo más modular posible. Las únicas funciones que es posible controlar en tiempo real son polinomios de grado bajo que incluyen las funciones racionales como el estándar más simple. La posible presencia de ciclos y la consiguiente aparición de posibles ramificaciones sobre las representaciones simbólicas (grafos) de la arquitectura, requiere considerar funciones múltiplemente periódicas para la parte no-singular de estos desarrollos.

Los tres tópicos mencionados no agotan ni muchísimo menos la aplicabilidad de la Geometría Algebraica a la Dinámica Computacional de Fluidos. Tan sólo pretenden ilustrar algunos tópicos de aplicabilidad de los materiales contenidos en los dos primeros módulos del Curso. Los tópicos mencionados siguen el esquema asociado a la Geometría, Cinemática y Dinámica que se ha presentado en los apartados anteriores.

⁸¹Para variedades o espacios de funciones hay multitud de aproximaciones métricas, pero para espacios de “formas geométricas” sólo se conoce la existencia de una métrica (Peterson-Weil) para curvas simples (cerradas y sin auto-intersección).

Asimismo, no están aislados con respecto a otros que se mencionan más abajo, pues el primero está muy vinculado a problemas de reconocimiento en superficies (de gran interés para cuestiones de Visión Computacional que actualmente abordamos en términos de deformaciones aplicadas a mallas). El segundo problema está relacionado con modelos de propagación para una reconstrucción dinámica de objetos volumétricos en movimiento (personajes virtuales generados a partir de dispositivos sincronizados). Por último, el tercero está vinculado a la gestión de información estática capturada por cámaras móviles en escenarios columnares o, recíprocamente, gestión de flujos en sistemas con múltiples agentes móviles (escenas de tráfico, p.e.).

Una dificultad que subyace a todos estos aspectos es la relación entre lo que percibimos (ó podemos medir en cada instante) y lo que ocurre; es decir, entre los diferentes flujos de imagen (asociados a representaciones geométricas de la información proporcionada por sensores) y el flujo de escena (asociado a objetos volumétricos cambiantes de forma o de apariencia). La Geometría Conforme proporciona el marco adecuado para reducir información 3D a información 2D. En términos globales y para controlar la interacción, esta cuestión afecta a las múltiples relaciones entre la Geometría y la Dinámica que pueden describirse en diferentes terrenos dependiendo del marco adoptado:

- *Enfoque algebraico:* Los aspectos invariantes de la Geometría se modelan usando (modelos reales) de representaciones de $U(1)$ (a lo largo de la dirección), $SU(2)$ (sobre elementos de superficie) o de $SU(3)$ (sobre elementos volumétricos). La que fueron estudiadas inicialmente por H.Weyl en los años treinta. La clasificación de representaciones (eventualmente infinito-dimensionales) para el caso semisimple complejo se resuelven en términos de $\mathfrak{sl}(2)$; lamentablemente, hay otros muchos casos relevantes para los que no se tiene una información tan completa.
- *Enfoque analítico:* Como deseamos visualizar el flujo hay que recurrir a representaciones sobre espacios asociados a los infinitos estados de un sistema. En Física Teórica los espacios de Hilbert proporcionan los modelos más sencillos para visualizar dichos espacios de estados. Lamentablemente, en nuestro caso no se dispone de una estructura tan rica como la de un espacio de Hilbert, pues ni siquiera los espacios de funciones (mucho menos de aplicaciones) de clase C^r son metrizables.
- *Enfoque geométrico:* La versión global de las EDP relevantes para este tipo de problemas se formula en términos de fibrados vectoriales de rango r con invariantes topológicos (clases de Chern, inicialmente) prefijadas. La variabilidad de dichos invariantes en presencia de operadores de creación-aniquilación requiere un estudio más detallado de los espacios de moduli correspondientes a dichos fibrados. Se requieren estudios adicionales para estructuras lineales superpuestas (clases de fibrados o, con más generalidad, de haces) sobre tipos de superficies ó de threefolds complejas con “propiedades razonables”. Sería deseable que el espacio de moduli pudiera

soportar algún tipo de métrica; un candidato para empezar está dado por las superficies K3 que se presentan en el módulo 4.

0.3.2. Informática y Ciencias de la Computación

El desarrollo de herramientas informáticas desde los años ochenta ha facilitado la aplicación de métodos de cálculo simbólico y cálculo numérico. Desde una perspectiva complementaria, el desarrollo de la Geometría Computacional y su extensión a herramientas para Visión, Robótica, Animación y Visualización Avanzada como extensión de la Informática Gráfica están potenciando un desarrollo importante con expectativas relevantes tanto desde el punto de vista de la Geometría como de sus aplicaciones a diferentes terrenos. En esta subsección sólo se presentan algunas “instantáneas” vinculadas a desarrollos recientes. Sin duda hay muchas más pero por ignorancia y falta de espacio, sólo se reseñan algunas de las más relevantes de cara a las aplicaciones.

Informática Gráfica

La *Informática Gráfica* tiene como objetivo la generación de escenarios o personajes virtuales mediante la aplicación de herramientas de diseño asistido. Para ello, se vale de primitivas geométricas básicas dadas por la anulación de formas polinomiales de grado bajo en un número de variables menor o igual que tres ⁸². Las aplicaciones de la Geometría Algebraica afectan a la adaptación de modelos basados en curvas o superficies racionales de grado bajo para diferentes aspectos tales como

- *modelado algebraico a trozos* usando primitivas racionales de grado bajo $d \leq 4$;
- la *animación* usando familias de curvas o superficies dependientes de parámetros;
- la *simulación de la iluminación* para crear efectos realistas de renderización (simulación volumétrica a partir de un control de la reflectancia), con el análisis geométrico de zonas de sombra y penumbra (eventualmente móviles);
- el *remapeado de texturas* como imágenes de tensores dados por el producto de formas cuadráticas (para representar elementos básicos o textones) y formas bilineales (para representar la propagación).

⁸²Para una introducción ver mis apuntes sobre *Computer Graphics* (materia B4) en mi página web

El *reto actual más difícil* para las empresas de producción de contenidos multimedia consiste en la generación semi-automática de escenarios y personajes virtuales a partir de la información capturada por varias cámaras sincronizadas o bien cámaras en movimiento. La resolución de este problema requiere herramientas de modelado avanzadas para objetos algebraicos cambiantes de forma, la integración de información procedente de diferentes dispositivos sobre un soporte geométrico común y la visualización de acuerdo con características cambiantes de iluminación.

Visión Computacional

Una *imagen digital* se puede considerar como una función vectorial $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{N}^d$ definida sobre un dominio rectangular a valores discretos ⁸³ ó, de forma complementaria, como el resultado de una proyección central $\pi_{\mathbf{C}}$ de un “trozo de mundo” sobre el plano de imagen con centro en $\mathbf{C}$. El objetivo de la Visión Computacional es la interpretación semi-automática de objetos contenidos en dicha imagen. Para ello utiliza una colección de técnicas que se etiquetan como

1. *Procesamiento* que afecta a la detección de las regiones en las que f presenta discontinuidades (por encima de un umbral) ó bien continuidades (por debajo de un umbral). Como resultado se obtienen bordes ó regiones que es necesario enlazar y restaurar, modificando los valores actuales de la función (mediante convolución).
2. *Análisis* que afecta al enlazado de bordes en PL-curvas ó PS-curvas a aproximar mediante trozos de curvas algebraicas simples de grado bajo. Deformaciones de curvas simples con puntos de control prefijados.
3. *Mejora*: Remapeado de texturas como campos tensoriales sobre el interior de las regiones. La identificación de modelos estables en presencia de movimiento es un problema a resolver.
4. *Reconstrucción de objetos volumétricos* mediante puesta en correspondencia entre elementos homólogos usando funciones racionales. Los métodos de Reconstrucción 3D a partir de múltiples vistas se basan en la invariancia de un tensor que caracteriza los datos homólogos por las transformaciones birracionales entre los dominios de diferentes imágenes. El resultado es una colección de superficies que se aproximan mediante superficies racionales.
5. *Reconocimiento* con sus correspondientes fases de detección, extracción, etiquetado y clasificación tanto de objetos planares como volumétricos. La comparación entre la imagen actual y el modelo se lleva a cabo usando la métrica de Peterson-Weil sobre el espacio de moduli de curvas de género

⁸³Para una imagen en escala de grises $d = 1$, para una imagen en color $d = 3$, para imágenes multispectrales $d > 3$

prefijado. Aún no se dispone de modelos eficientes para el Reconocimiento semi-automático de superficies simples que acotan volúmenes; el candidato natural para el caso complejo está dado por superficies Kaehler, pero aún no se dispone de una métrica natural para espacios de moduli de ningún tipo de superficies que permita compararlas.

6. *Restauración de imagen* mediante operadores integro-diferenciales como solución de problemas de reacción-difusión. La restauración volumétrica presenta aún una gran cantidad de problemas abiertos, sobre todo en presencia de movimiento o de cara a la animación. Es necesario desarrollar una versión algebraica de familias de formas diferenciales dependientes de un número bajo de parámetros (pencils, nets, webs) desarrolladas desde finales de los setenta por Chern, Griffiths, Bryant et al.

Visualización avanzada

Una aplicación de *Visualización Avanzada* ó Científica consiste en una colección herramientas para cálculo, gestión y transformación de datos en información visual mediante los adecuados interfaces. Por ello, la Visualización Avanzada incluye módulos para el almacenamiento, gestión, procesamiento y análisis de información digital capturada por diferentes tipos de sensores, así como para la transformación y la realización de operaciones que se traducen en representaciones visuales.

Los diferentes módulos de Visualización Avanzada permiten almacenar, navegar, procesar, consultar y extraer información sobre modelos dados por un soporte tridimensional con diferentes tipos de funcionales dependientes de cada punto. A la vista de la complejidad de las tareas se adopta una metodología híbrida con varias *fases* correspondientes a

1. *Captura* de datos mediante diferentes tipos de señal (visible/no-visible, acústico, electromagnético, láser).
2. *Fusión de información* sobre modelos de grado bajo
3. *Procesamiento* de imágenes mediante filtrado para la detección de elementos, bordes y regiones significativas.
4. *Análisis* basado en la superposición de secciones (superficies de nivel) y la comparación con modelos previos.
5. *Compleción de información* desde el punto de vista morfológico ó funcional.
6. *Renderización* volumétrica no-realista mediante el realzado de elementos morfológicos, remapeado de texturas y adaptación de las condiciones de iluminación.

Una aportación de la Geometría Algebraica consiste en que el agrupamiento, las modificaciones y la realización de operaciones se pueden describir mediante (pre)haces ⁸⁴.

Códigos

Un *código corrector de errores* es un subespacio vectorial C del espacio vectorial $\mathbb{F}_q^n$ para algún entero positivo $n \in \mathbb{N}$ al que se llama la *longitud* de C . A los elementos de C se les llama los *codewords*. El *peso de Hamming* $w(c)$ de un vector $c \in \mathbb{F}_q^n$ es el número de sus coordenadas no-nulas. La *distancia de Hamming* $d(x, y)$ entre dos vectores $x, y \in \mathbb{F}_q^n$ se define como $d(x, y) := w(x - y)$. Dado un código $C \in \mathbb{F}_q^n$ la mínima distancia d de C es por definición la mínima distancia de Hamming entre dos elementos distintos de C .

Se dice que un código C tiene parámetros $[n, k, d]$ si n es su longitud, k es su dimensión sobre $\mathbb{F}_q$ y d es su mínima distancia. Sobre $\mathbb{F}_q^n$ se considera el emparejamiento canónico h definido por $h(x, y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Dado un código $C \subset \mathbb{F}_q^n$ el espacio ortogonal $C^\perp$ a C con respecto a dicho emparejamiento se le llama el *código dual* de C .

Dada una variedad X sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$, un divisor G sobre X y una familia de puntos racionales $P_1, \dots, P_n$ sobre X , con $\Delta = P_1 + \dots + P_n$, se construye (Manin) el código funcional $C_L(X, \Delta, G)$ evaluando las secciones globales del haz inversible $\mathcal{L}(G)$ en los puntos $P_1, \dots, P_n$. Un problema importante es obtener información sobre el dual $C_L(X, \Delta, G)^\vee$ del código funcional [Vla84].

Si X es una *curva algebraica*, entonces el dual $C_L(X, \Delta, G)^\vee$ del código funcional coincide con el código diferencial $C_L(X, \Delta, G)$. Goppa ⁸⁵ construyó este último calculando los residuos de las formas diferenciales sobre X ⁸⁶.

Además, en este caso cualquier código diferencial es igual a un código funcional $C_L(X, \Delta, G_0)$ donde G_0 es un divisor que depende de G , Δ y (la clase de) el divisor canónico K_X de X . Por ello, el estudio de los duales de código funcionales sobre curvas es equivalente al estudio de los códigos funcionales. Desde el punto de vista de la Teoría de Divisores sobre *Curvas* hay pocas novedades con respecto a hechos bien conocidos de la Teoría Clásica de Divisores (Picard, Severi, Weil).

El caso correspondiente a códigos para variedades de dimensión superior sobre cuerpos finitos $\mathbb{F}_q$ es más complicado. Ello se debe a las dificultades para extender resultados bien conocidos para ciclos sobre variedades complejas. Parece razonable empezar con variedades racionales, pero incluso sobre éstas se tiene poca información salvo para casos muy sencillos como cuádricas con

⁸⁴Este enfoque se desarrolla en el módulo 6 (Advanced Visualization) de mis apuntes sobre *Computational Mechanics* (materia B1) en mi página web <https://www.mobivap.es/miembros/javier-finat/>

⁸⁵[Gop81] V. D. Goppa: "Codes on algebraic curves". *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 259(6), 1289-1290, 1981.

⁸⁶Las integrales de formas diferenciales sobre curvas se presentan en el módulo 1 (Curvas Algebraicas), mientras que para el caso de superficies se presentan en el módulo 4 (Superficies Algebraicas) de esta materia

número de Picard igual a uno. Para una superficie algebraica X , es posible extender [Cou09] la construcción de códigos diferenciales realizada por Goppa para curvas algebraicas, verificándose en general que el dual de un código funcional contiene estrictamente al código diferencial. Por ello, tiene interés estudiar los duales de los códigos funcionales sobre superficies.

0.3.3. Ciencias de la Naturaleza

El mayor reto es construir modelos que permitan explicar mejor la relación entre “forma” y “función” o, en una terminología más moderna, entre “estructura” y “flujos”. Este reto aparece de diferentes formas en Ciencias de la Naturales (incluyendo la Física que se aborda más abajo). Desde el punto de vista geométrico este reto se plantea como una realimentación entre la Geometría y los Sistemas Dinámicos.

En este esquema, las singularidades serían las responsables de explicar los cambios morfológicos o funcionales que aparecen en los aspectos estructurales o dinámicos. La superposición de sistemas dinámicos sobre variedades o la deformación producida por un sistema que interactúa modificando el soporte (ecuaciones de difusión-reacción, p.e.) proporcionarían esquemas para explicar la conexión bi-direccional entre ambos tipos de aspectos.

Algunos de los *objetivos más relevantes* desde el punto de vista geométrico consisten en:

- Comprender la estructura y la función desde el nivel celular al nivel de órganos.
- Modelar los patrones de crecimiento incluyendo cambios en las apariencias, a partir de la detección de valores críticos para los parámetros en familias de variedades algebraicas.
- Predecir los cambios cualitativos en la morfología en función de cantidades agregadas descritas como funcionales sobre los objetos biológicos.

En los apartados siguientes se comentan brevemente algunos de estos tópicos desde una perspectiva matemática.

Morfogénesis

La morfogénesis trata de modelar los cambios en la forma que tienen lugar como resultado de movimientos, crecimiento, subdivisiones o mutaciones de organismos vivos. El enfoque desarrollado por R.Thom propone un esquema basado en el análisis de la Geometría del Discriminante asociado a (el germen de) una función diferenciable $F : \mathbb{K}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{K}$ que representa una deformación genérica de $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$.

Cuando dicha función es un polinomio en una variable x , el lugar discriminante está dado por

$$\{(x, \lambda) \in \mathbb{K}^n \times \Lambda \mid F(x, \lambda) = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = 0\}$$

es decir, el conjunto de puntos en los que la proyección sobre el espacio de parámetros Λ es tangente al grafo de la aplicación o, en otras palabras, al conjunto de raíces múltiples con respecto a los parámetros λ (discriminante de la ecuación en el sentido algebraico de la palabra).

Los casos más simples corresponden a las deformaciones genéricas de $f(x) = x^{k+1}$ para $k \geq 1$ que se denotan mediante A_k en la terminología de singularidades de aplicaciones. El ejemplo más simple no-trivial corresponde a $k = 2$ con $f(x) = x^3$ y deformación genérica $y = F(x) = x^3 + \lambda x$ que al resolver con $3x^2 + \lambda = 0$ da $(\lambda, y) = (-3x^2, 2x^3) = (a, b)$ con la cúspide $4a^3 + 27b^2 = 0$ como proyección del lugar discriminante.

Este estudio recibe el nombre de *Catástrofes Elementales* de R.Thom; sus extensiones se analizan con más detalle en el módulo 3 del Curso de Topología Diferencial. Actualmente, esta teoría forma parte del análisis de bifurcaciones que tiene multitud de aplicaciones al estudio geométrico de Sistemas Dinámicos (ver módulo 6 del Curso de Topología Diferencial).

Un problema actualmente muy difícil es tratar de establecer patrones de crecimiento o de generación de formas usando representaciones físicas que vayan desde el nivel celular o molecular hasta el nivel de órganos. En el caso de la Física o la Química Teórica, es posible describir aproximaciones numéricas que permiten obtener ecuaciones macroscópicas a partir de simulaciones de modelos moleculares que se entrelazan siguiendo patrones complejos controlados por sistemas de EDP. No se conoce ningún modelo parecido para organismos vivos.

Para resolver el problema de la generación de organismos complejos, conviene revisar las aproximaciones de modelos inertes pero activos. La idea básica consiste en seleccionar y seguir una colección de partículas a lo largo de un intervalo de tiempo, aplicando un análisis regresivo inicialmente (de correlación y covarianza en una fase posterior) sobre colecciones de datos simuladas. Para el control de mutaciones, es necesario fijar las tasas de transición en términos de fluctuaciones que se describen usando modelos de diferencias finitas.

La “acumulación” de estos modelos proporciona patrones para diferentes comportamientos macroscópicos utilizando escalas espacio-temporales y modelos de reacción-difusión apropiados. Las restricciones asociadas a modas locales deben verificar las EDP del modelo estructural citado más arriba. Como la convergencia hacia modelos ideales no está garantizada es necesario identificar soluciones aproximadas dadas por curvas o superficies algebraicas que puedan jugar un papel como atractores para las simulaciones de la dinámica molecular.

87

⁸⁷Ello requiere desarrollos más avanzados de Programación Evolutiva que se introducen en el módulo 4 (Reconocimiento) del Curso de Visión Computacional

Modelado de órganos

El modelado de órganos se lleva a cabo en términos geométricos mediante el pegado de variedades algebraicas de grado bajo (con sus correspondiente PL-aproximación) o bien en términos funcionales resolviendo problemas de tipo variacional bajo restricciones relativas al comportamiento de las tensiones que puede soportar el borde ∂r_α de la región r_α que acota el objeto b_α a modelar.

Estas tensiones se describen en términos de las fuerzas tangenciales (a lo largo del borde de a región acotada) fuerzas normales (internas y externas) que actúan sobre el borde. La introducción del funcional de Mumford-Shah proporciona una solución general para el caso planar y permite evaluar en términos métricos la diferencia entre la solución actual y la esperada, lo cual facilita la detección de patologías internas. Actualmente, no se conoce ninguna solución semi-automática para el problema similar en el caso de superficies.

Tanto este problema como el mencionado en el apartado anterior son muy difíciles y es necesario introducir restricciones adicionales, o bien resolver antes otros problemas más sencillos como el del crecimiento que se aborda en el apartado siguiente.

Patrones de crecimiento y Sistemas Expertos

El crecimiento hacia modelos complejos requiere identificar algún tipo de sistema experto para el control que permita explicar la generación de formas mediante la combinación de una colección finita de “principios básicos” que pueden afectar a la forma (crecimiento fractal, p.e.) o a la función (actividad asociada a diferencias de potencial, p.e.). Una razón para utilizar herramientas de Geometría Algebraica aparece en relación con el papel estructural que desempeñan los objetos más simples (curvas racionales, p.e.) y los cuerpos de funciones racionales que les caracterizan; las operaciones básicas (productos tensoriales) definidas sobre estos objetos proporcionan un marco geométrico para la replicación.

De forma complementaria, hay diferentes tipos de modelado artificial para sistemas expertos que utilizan, entre otros, máquinas de estados (para el modelado discreto) ó bien Redes Neuronales Artificiales (ANN: Artificial Neural Networks) para una aproximación lineal a modelos más complicados. La aproximación más interesante desde el punto de vista de la Geometría Algebraica es la basada en ANN; una justificación teórica de esta afirmación procede de que la gráfica correspondiente a la anulación de *cualquier polinomio* en una variable se puede simular mediante una ANN.

El primer problema a resolver consiste en que una ANN converge muy lentamente. Asimismo, las ANN son muy rígidas: Una vez entrenada una red neuronal, pequeñas modificaciones en los parámetros del sistema hacen que sea necesario volver a entrenar la red neuronal resultante, es decir, estos sistemas no son adaptables o, en otras palabras, no tienen la plasticidad que presentan

las neuronas biológicas del cerebro. En particular, una ANN sería incapaz de entender que una recta proyectiva, una cónica, una cúbica racional normal, etc representan el mismo objeto desde el punto de vista birracional, p.e.

Por ello, es necesario diseñar estrategias que permitan resolver los problemas de acelerar la convergencia hacia patrones, garantizar su estabilidad (incluyendo pequeñas variantes asociadas a deformaciones) y la plasticidad en las conexiones (modelos adaptables a pequeñas variaciones en los parámetros). Básicamente hay tres opciones que se pueden entender como estructuras superpuestas a una red neuronal:

- *Algoritmos Genéticos (GAs)* con mecanismos de selección de poblaciones y mutaciones orientadas a mejorar el rendimiento del sistema de acuerdo con el objetivo propuesto (crecimiento y diversificación).
- *Programación Evolutiva (EP)* basada en procesos de optimización orientados a una evolución que incluye mutaciones (de forma similar a los GAs), pero con parámetros variables. Los modelos no-lineales están dados por polinomios de grado bajo y la optimización se lleva a cabo sobre familias de hipersuperficies de grado bajo ⁸⁸.
- *Mapas auto-organizativos (SOM)* Los SOM proporcionan herramientas muy generales para generar embebimientos de variedades de baja dimensión en espacios de dimensión superior. Por ello, son útiles en tareas de Visualización, análisis y descubrimiento de relaciones en grandes volúmenes de datos. Desde el punto de vista geométrico se pueden interpretar como procedimientos para generar subvariedades y desde el punto de vista algebraico como herramientas para construir haces amplios.

La conexión entre resolución de sistemas no-lineales dependiente de parámetros $F(\underline{x}, \underline{\lambda}) = 0$ y las estructuras superpuestas (sobre todo EP y SOM) se lleva a cabo en términos del lugar discriminante asociado a la proyección $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobre la primera componente donde $F = (f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{E}(n + \ell, p)$ donde $\ell = \dim(\Lambda)$. El marco para el caso más simple correspondiente a $p = 1$ es la Teoría de Catástrofes; en el caso general, interesa analizar el lugar de bifurcación del sistema dinámico asociado al problema de optimización.

Visualización en Biomedicina

Una aplicación de *Visualización Avanzada* ó Científica consiste en una colección de herramientas para el modelado, cálculo, gestión y transformación de datos en información visual mediante los adecuados interfaces gráficos. Por ello, la Visualización Avanzada incluye módulos para la gestión de información (incluyendo almacenamiento, procesamiento y análisis), así como para la transformación de datos y la realización de operaciones en términos de representaciones

⁸⁸Los sistemas lineales en la imagen del embebimiento de Veronese se presentan en el módulo 2 del Curso

visuales interactivas ó modelos (estáticos, cinemáticos o dinámicos). Los diferentes módulos de Visualización Avanzada permiten almacenar, navegar, procesar, consultar y extraer información a partir de modelos de baja dimensión y su evolución espacio-temporal.

El modelado (geométrico, cinemático, dinámico) se lleva a cabo en términos de diferentes tipos de campos (escalares, vectoriales, tensoriales) ⁸⁹. La Visualización Avanzada se aplica tanto a objetos rígidos como deformables; la Dinámica Computacional de Fluidos proporciona un marco conceptual para estos últimos. La presencia de fenómenos de bifurcación motiva el desarrollo de modelos eventualmente discontinuos y su evolución espacio-temporal. La naturaleza deformable de los objetos con los que se trabaja sugiere un tratamiento en términos de deformaciones que se desarrolla sobre todo en el módulo 4 del Curso.

La visualización puede ser realista o no; en este último caso, se utilizan efectos radiométricos ó de renderizado para subrayar o destacar el comportamiento de determinadas componentes que son significativas:

- La *radiometría* trata del procesamiento y análisis de información óptica procedente tanto del espectro visible (color, texturas), como no visible (rayos X, tomografías, diferentes tipos de resonancias, etc) vinculados a una representación del comportamiento de la luz.
- El *renderizado* trata de la simulación de efectos volumétricos a partir de un control sobre las condiciones de iluminación de una representación plana del objeto o de la escena.

En ambos casos, no sólo el soporte es geométrico (curvas y superficies algebraicas de grado bajo), sino que la radiometría y el renderizado se pueden considerar como estructuras superpuestas (fibrados, fibraciones, haces, complejos) a los modelos geométricos. La versión global de sistemas de EDP en términos de fibrados vectoriales (o de estructuras más generales) proporciona soporte para incorporar efectos cinemáticos o dinámicos sobre objetos eventualmente deformables. ⁹⁰

En relación con las aplicaciones a Biomedicina, C.Bajaj, discípulo de S.Abhyankar ha desarrollado una colección de modelos basados en superficies algebraicas para visualizar moléculas de gran complejidad, tejidos y órganos, incluyendo herramientas computacionales para la navegación, simulación y renderización de efectos radiométricos. La selección de curvas y superficies racionales proporciona modelos parametrizables que se pueden discretizar muy fácilmente. ⁹¹

La representación planar de objetos tridimensionales (curvas o superficies requiere una cuidadosa elección del centro de proyección sobre el plano de imagen y un control de las singularidades que pueden aparecer cuando se varía el

⁸⁹Una panorámica general desde el punto de vista geométrico se puede ver en C.D.Hansen and C.R.Johnson: *The Visualization Handbook*, Elsevier, 2004

⁹⁰Estos tópicos se desarrollan en los últimos capítulos de diferentes módulos del CEViC (Curso de Especialista en Visión Computacional) coordinado por JF

⁹¹Ver <http://www.cs.utexas.edu/~bajaj/cs384R10/>

centro de proyección. Ello requiere el análisis del Lugar Discriminante asociado a proyecciones genéricas, y un control sobre la variación de las singularidades cuando se varía el centro de proyección (cámara virtual asociada al movimiento del ratón por parte del usuario) tanto para curvas (módulo 1) como para superficies (módulo 4). Un análisis más general en términos de Variedades Polares se lleva a cabo en el capítulo 5 del módulo 5 (Geometría Enumerativa).⁹²

0.3.4. Ciencias Sociales y Biomédicas

En esta subsección se comentan algunos casos particulares en los que la Geometría Algebraica resulta especialmente útil de cara a un modelado predictivo en Ciencias Sociales y Biomédicas, aparentemente las más alejadas de este área de las Matemáticas. Para ello, es necesario utilizar una combinación de métodos vinculados a

1. la *captura de información digital* procedente de diferentes dispositivos (sensores);
2. el *procesamiento de los datos* es decir, la extracción de los elementos más significativos, incluyendo el análisis de las dis-continuidades; y
3. el *análisis de la información* orientada hacia el agrupamiento en torno a patrones básicos geométricos que puedan variar a lo largo del espacio-tiempo.

Contrariamente a lo que puede parecer a primera vista, en todas las fases está presente la Geometría, no sólo porque la información está contenida en representaciones geométricas de cualquier objeto a analizar, sino porque los procedimientos de representación más potentes utilizan herramientas de visualización geométrica con modelos dados por variedades algebraicas de (multi)grado bajo.

Patrones estadísticos en Genética

Una cantidad creciente de modelos estadísticos se definen paramétricamente en términos de un número p de polinomios f_i con $1 \leq i \leq p$. Los tests paramétricos utilizan la noción de ideal y obtienen características significativas para el modelo a partir de invariantes algebraicos del ideal asociado a $(f_1, \dots, f_p)$

Un problema importante en filogenética consiste en identificar las relaciones evolutivas entre las diferentes componentes de una población cambiante. Ello requiere identificar el modelo de evolución y los “hechos” más significativos que permiten “discriminar” entre diferentes modelos.

⁹²El soporte para todos estos desarrollos desde el punto de vista de la Geometría Analítica Local fue llevado a cabo por B.Teissier en “The Hunting of Invariants” (Oslo, 1976); este enfoque se desarrolla en el módulo 5 sobre Estratificaciones Analíticas del Curso sobre Topología Diferencial

La aproximación más simple consiste en asociar grafos (en realidad, árboles con descendientes y antecesores) a los diferentes estados para cada generación. De forma similar a los grafos de Reeb cuyos nodos son valores críticos para un funcional (utilizados en Teoría de Morse Digital), en este contexto los nodos pueden representar agregación de moléculas o transiciones entre estados adyacentes. Este enfoque es aplicable tanto a la evolución de especies próximas (en Zoología, Botánica, etc) como a mutaciones que puedan aparecer a nivel celular ó genético (secuencias de DNA, p.e.).

A continuación se introduce un número finito de polinomios de grado bajo con “suficiente capacidad de discriminación” entre árboles asociados a la representación simbólica. Los datos discretos que interesan afectan a las longitudes de las cadenas a partir de la ramificación (modificaciones en los patrones secuenciales asociados a los códigos alfanuméricos). La capacidad de discriminación más simple se representa en términos de solapamiento o de desdoblamiento de raíces.

Cada árbol corresponde a una variedad (semi-)algebraica; por ello, los diferentes patrones de evolución se pueden describir y gestionar en términos de familias de variedades algebraicas, incluso aunque los modelos estadísticos no sean variedades algebraicas.

Programación entera y Optimización Polinomial

Más arriba se han comentado problemas de optimización (vinculados a EP y SOM) en los que la selección y el ajuste de poblaciones se lleva a cabo en función del ajuste (algún tipo de “proximidad”) con respecto a la función objetivo a alcanzar. Los criterios más usuales son de tipo métrico que se extienden de forma natural a espacios de k -jets de aplicaciones. Para cada valor fijo de k el marco teórico inicial para los k -jets está dado por polinomios formales de grado $\leq k$, una parte del álgebra simétrica. La incorporación de restricciones asociada al problema de optimización se lleva a cabo en términos de ideales.

En los problemas dependientes de parámetros la identificación de los parámetros más significativos de cara a acelerar el ajuste es un problema crucial. No existe un único método para ello; habitualmente, se combinan diferentes estrategias de tipo diferencial (para identificar valores críticos), estadístico (para evaluar la significación) y sistemas dinámicos (para identificar cambios cualitativos en el comportamiento de las soluciones del sistema), incluyendo su versión probabilista (campos de Markov, distribuciones de Gibbs).

Consideremos un problema de optimización multivariable no-restringido asociado a minimizar

$$p(x) = \sum_{\alpha \in A} p_{\alpha} \underline{x}^{\alpha} \quad \text{donde} \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n ,$$

siendo A un conjunto finito de monomios. Se construye entonces la variedad asociada

$$V_A := \{(\underline{x}^{\alpha_1}, \dots, \underline{x}^{\alpha_{|A|}})\}$$

que es una variedad tórica real imagen de $\mathbb{R}^m$ por la aplicación monomial, es decir, una subvariedad por el embebimiento de Veronese asociado a monomios de grado $2d$. En este caso, los valores óptimos a determinar están contenidos en (el borde de) la envolvente convexa $\mathcal{H}(V_A)$.

En Geometría Computacional básica ⁹³ se muestran diferentes algoritmos para calcular la envolvente convexa de un conjunto de puntos arbitrarios cuya complejidad mínima en el plano es $O(N \log N)$, en el espacio $O(N^2 \log N)$, etc siendo N el número de puntos. Por ello, en nuestro caso se tiene una complejidad polinomial y el problema es resoluble en tiempo finito sin necesidad de usar ningún tipo de heurística.

El *caso más simple* corresponde a una sola variable en el que el objeto a analizar es la envolvente convexa de configuraciones de puntos sobre la curva racional normal $\mathcal{C}^d$ de grado f . La caracterización de esta curva por las singularidades de sus variedades de secantes (JF, 1984) proporciona información sobre todas las estructuras simpliciales que podemos superponer sobre $\mathcal{C}^d$, incluyendo sus posibles degeneraciones asociadas a las singularidades de las variedades de secantes.

Como consecuencia se obtiene que *es posible reducir un problema de optimización no-convexa a un problema de optimización lineal sobre un conjunto convexo* ⁹⁴

$$\inf \{p(\underline{x}) \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^n\} = \inf \{p^T \underline{y} \mid \underline{y} \in \text{conv}(V_A)\}$$

Sin embargo, la comprobación de la condición $\underline{y} \in \text{conv}(V_A)$ presenta, en general, una complejidad NP. No obstante, la utilización de la polaridad permite linealizar nuevamente el problema, reduciendo la dificultad sobre dicha linealización ⁹⁵

Aprendizaje y Reconocimiento de Patrones

Las herramientas iniciales para el aprendizaje semi-automático utilizan modelos estadísticos muy diversos que incluyen estrategias competitivas dinámicas (tipo WTA, p.e.), ANN (perceptrones multicapa, p.e.), termodinámica estadística (máquinas de Boltzmann, distribuciones de Gibbs), entre otros. La necesidad de garantizar una convergencia hacia modelos estables deseados, motiva la

⁹³Ver p.e. O'Rourke (1994), Berg et al (1998) o bien el module B_{11} (de la materia *Computational Mechanics of Continuous Media*)

⁹⁴Esta observación es crucial para gran cantidad de aplicaciones de Optimización en Investigación Operativa, Teoría Económica, Ingeniería, etc

⁹⁵Una aplicación de este procedimiento a algunas cuestiones relacionadas con aspectos dinámicos de la Reconstrucción 3D relacionando el flujo de imagen (controlado por una realización de $SU(2)$) y el flujo de escena (controlado por una realización de $SU(3)$) se puede ver en la tesis de Fco Javier Delgado del Hoyo

introducción de métricas de Fisher (versión estadística de las métricas sobre variedades pseudo-riemannianas), cuya consistencia es complicada de garantizar.

El carácter no-lineal de los modelos citados sugiere estrategias complementarias que ayuden a reforzar el carácter adaptativo en presencia de información incompleta. Los SOM citados más arriba proporcionan una aproximación muy dúctil que se puede auto-adaptar a diferentes distribuciones de la información procesada.⁹⁶

Un *inconveniente* que tienen las estrategias de aprendizaje basadas en SOM consiste en la presencia de múltiples mínimos locales que pueden hacer converger al sistema hacia soluciones no-deseadas. La solución tradicional en Robótica para resolver este problema consiste en invertir la dirección del campo (convirtiendo un atractor en repulsor, p.e.) en presencia de “falsos mínimos”.

Una *estrategia alternativa* consiste en iniciar SOM con diferentes condiciones iniciales, controlar su evolución espacio-temporal, evaluar su proximidad con respecto al objetivo deseado y seleccionar la que mejor se adapte al objetivo deseado (WTA dinámico). De una forma puramente teórica y suponiendo información completa, la comparación entre “formas se realiza en un espacio de moduli sobre el que deberíamos disponer de una métrica global.

Si los objetos a analizar son *curvas simples* (cerradas y sin auto-intersecciones), se dispone de una métrica (Peterson-Weil) para dicho espacio de moduli que permite evaluar la distancia entre diferentes patrones. Para dar una forma más concreta a esta idea, hay que utilizar un funcional de tipo variacional (Mumford-Shah) que minimiza una función de energía asociada al comportamiento tangencial (a lo largo del borde de la región) y el comportamiento normal (asociado a fuerzas internas y externas). Esta estrategia basada en operadores sobre la Geometría Intrínseca (asociada al fibrado tangente) y extrínseca (asociada a fibrado normal), permite poner un poco de orden en el marasmo de estrategias para Reconocimiento de Patrones asociados a imágenes estáticas en el plano de imagen (ver módulo 4 del CEViC para más detalles).

Sin embargo, actualmente no se dispone de ninguna solución similar ni para superficies en el caso 3D estático, ni para vídeo (1d+2D), ni mucho menos para volúmenes deformables en movimiento (actores capturados por cámaras sincronizadas) en el marco del vídeo 3D⁹⁷. Para abordar este problema es necesario contar con procedimientos semi-automáticos para la Reconstrucción 3D, tanto en el caso estático como en el dinámico. El ajuste de la Reconstrucción de Superficies se puede llevar a cabo mediante estrategias SOM de aprendizaje que utilizan diferentes medidas de semejanza⁹⁸.

Si suponemos realizada una primera reconstrucción 3D continua tosca y razonamos por analogía con el caso real (en términos de Geometría Diferencial), es claro que el funcional de energía debe ser reemplazado por un funcional asociado

⁹⁶S.Watanabe: *Algebraic Geometry and Statistical Learning Theory*, Cambridge Univ. Press, 2009

⁹⁷Para una introducción ver el módulo 6 (Video 3D) de mis notas para el CEViC

⁹⁸Ver p.e. [Yoo08] M.Yoon, Ilvrissimtziss and S.Lee: “SOM for Implicit Surfaces Reconstruction”, in Li and Tang (eds):*Eurographics*, 2008

a (flujos de) curvaturas que debe ser minimizado sobre un espacio de conexiones⁹⁹. Sin embargo, actualmente no se dispone de ninguna métrica “natural” sobre el espacio de moduli ni siquiera de las superficies algebraicas complejas más tratables (las K3). Esta es una prueba más de cómo problemas cotidianos requieren desarrollos muy avanzados de investigación en la mal llamada Matemática Pura.

Teoría Económica: Equilibrio general

El paradigma dominante en Teoría Económica es la *Teoría del Equilibrio General*¹⁰⁰.

De una manera muy simplificada se basa en una igualdad entre las funciones de oferta f_{iS} (S: Supply) y demanda f_{iD} (D: Demand) con respecto al i -ésimo un bien o servicio, en cualquier tipo de mercado. Dicha igualdad se expresa en términos de la anulación de $g_i := f_{iS} - f_{iD}$; en la práctica se trata de minimizar dicha función, lo cual conduce a interesantes problemas de Optimización y, desde el punto de vista dual, de Control. Salvo en el caso lineal (completamente inverosímil), el equilibrio no tiene por qué ser único. Ninguna de las funciones más utilizadas en las diferentes áreas de la Teoría Económica (Macro/Micro, Comercio Internacional, Economía Financiera) es lineal.

Aunque las funciones a considerar no tienen por qué ser polinómicas, para facilitar su implementación computacional, las estrategias de discretización y el análisis de soluciones, es conveniente adoptar aproximaciones polinomiales. En la práctica es necesario analizar las regiones de exceso de oferta $g_i \geq 0$ ó de demanda $g_i \leq 0$ para tratar de controlar la convergencia hacia los valores teóricos de equilibrio.

Por ello, la estrategia inicial para encontrar equilibrios se basa resolver problemas de optimización bajo diferentes tipos de restricciones¹⁰¹. Cuando las restricciones son lineales, el equilibrio se calcula “desplazando” la restricción lineal hasta alcanzar un punto crítico (representado como una tangencia) que muestra el valor óptimo. Este tipo de métodos recibe el nombre de “Estática Comparativa” y se describen en los primeros cursos de Micro- y Macroeconomía.

La solución es única si la función con la que se trabaja o la región a la que se aplica es convexa. Aunque se utiliza habitualmente, esta hipótesis es falsa, pues cualquier shock (debido a un comportamiento coordinado de agentes, p.e.) modifica la convexidad. En otras palabras, el comportamiento de los agentes tanto individuales como agregados no sigue pautas modelables en términos de

⁹⁹Este argumento está tomado de los funcionales de acción tipo Yang-Mills ubicuos en el modelo estándar para la unificación de interacciones en Física Teórica (ver más abajo)

¹⁰⁰En este apartado no se discute dicho paradigma que, a pesar de contar con varios Premios Nobel, no hay ninguna evidencia empírica que lo soporte. La Economía real está siempre en desequilibrio, a partir del cual los diferentes agentes obtienen beneficios o pérdidas. Para una discusión más detallada ver mi curso sobre Métodos Diferenciales en Teoría Económica

¹⁰¹Algunos ejemplos básicos son la restricción presupuestaria en Teoría del Consumidor o la relativa a la utilización de Factores de Producción en Teoría de Empresa

conjuntos convexos. Por ello, los equilibrios no son únicos ni siquiera en mercados competitivos o con información completa.

Algunos de los *problemas a resolver* son: calcular el número de equilibrios que pueden aparecer, llevar a cabo una localización aproximada, identificar el tipo topológico y controlar la dinámica en un entorno de cada equilibrio, minimizando los efectos adversos. Para ello, es necesario estudiar las propiedades vinculadas a las diferentes aproximaciones. Para empezar, existen *diferentes descripciones para un equilibrio* que etiquetamos como

- *Topológica*: Punto fijo para una aplicación definida sobre un conjunto finito de bienes o servicios. Los resultados fundamentales son Teoremas de Punto Fijo para correspondencias entre conjuntos (Kakutani, 1949). Si se normalizan los precios de bienes o servicios con respecto al precio del dinero, el vector de precios toma valores en una esfera, por lo que la identificación de equilibrios es una consecuencia del Teorema de Brouwer del punto fijo (Arrow, Debreu). Esta descripción presupone información completa sobre el mercado, algo que es imposible.
- *Dinámico*: Ceros de un sistema de EDO correspondiente a la evolución espacio-temporal de un mercado. La anulación simultánea de las funciones asociadas a cada EDO proporciona el conjunto de puntos de equilibrio del sistema. En términos matemáticos, se trata de un problema de optimización simultánea. Esta solución presupone un ajuste simultáneo, algo que es completamente inverosímil. Además los agentes, no siempre toman decisiones óptimas con respecto a su nivel de conocimiento.
- *Estadístico*: Solución de un juego no-cooperativo (Nash) en el que ningún jugador mejora su situación, sin empeorar la del otro jugador ¹⁰². Si las posibles mejoras se representan mediante desigualdades entre funciones algebraicas, se trata de resolver un problema de Geometría Semialgebraica bajo condiciones de incertidumbre.

Las hipótesis sobre las que descansan las aproximaciones topológica y dinámica no son realistas. La aproximación estadística no proporciona un modelo estructural, sino muy casuístico que ignora los procedimientos de optimización asociados a entidades supervisoras que puedan estabilizar el mercado. No es difícil introducir mejoras para cada una de las aproximaciones:

- En presencia de información incompleta para los mercados, el conjunto de k bienes ó servicios con trayectorias independientes se representa mediante puntos de una Grassmanniana $Grass(k, N)$. Los Teoremas de Punto Fijo sobre Grassmannianas proporcionan una mejora significativa con respecto al Teorema de Brouwer ¹⁰³. Por otro lado, ningún mercado es homogéneo

¹⁰²Esta situación ya es conocida por los análisis de oligopolio desarrolladas a mediados del s.XIX

¹⁰³La primera formulación de esta idea se debe a A.Mas-Collel

y además existe una estratificación asociado a (des)agregaciones sucesivas; por ello, la aproximación basada en Grassmannianas es insuficiente. Una primera mejor procede de “empaquetar” bienes o servicios en cantidades agregadas a nivel regional, nacional o internacional en subespacios de Variedades de Banderas incompletas. Los Teoremas de Punto Fijo sobre Variedades de Banderas mejoran de forma significativa los resultados actualmente disponibles.

- Para mostrar cómo alcanzar los equilibrios o las zonas estables para dinámica, es necesario desarrollar las herramientas de control apropiadas para cada problema. Para minimizar la casuística, es conveniente realizar el modelado sobre espacios con propiedades universales (esfera, grassmanniana, variedades de banderas). Además, las EDO con ajuste simultáneo sobre espacios cartesianos con restricciones deben ser reemplazadas por EDO con ajuste secuencia sobre espacios de matrices que representen la evolución espacio-temporal para cantidades agregadas. Las ecuaciones tipo Ricatti sobre Variedades de Banderas (incluyendo el caso de Grassmannianas) proporcionan una aproximación bastante más razonable que permite identificar y corregir el tipo de desequilibrio mediante modelos de control.
- La Teoría de Juegos no-cooperativos (tipo Nash, p.e.) no tiene en cuenta factores como las rigideces del mercado (inelasticidad de los factores), ni la capacidad de mediación (interpolación no-lineal, p.e.), ni la naturaleza estratificada de los espacios económicos sobre los que actúan los diferentes agentes. Es necesario desarrollar modelos que permitan incorporar todos estos efectos.

La referencia clásica más completa para métodos diferenciales en Teoría Económica es [Tak93]¹⁰⁴. Lamentablemente, no existe un tratamiento sistemático similar que tenga en cuenta bifurcaciones, un análisis de los diferentes tipos de (in)estabilidad y el diseño de herramientas de control basado en (hiper)superficies de manera compatible con las diferentes áreas y niveles de agregación (Micro/Macroeconomía, Comercio Internacional, Finanzas).¹⁰⁵

Geometría Tropical y Teoría Económica

La *Geometría Tropical* se puede entender como una versión lineal a trozos (PL: Piecewise Linear) de la Geometría Algebraica ordinaria¹⁰⁶. En Topología, Álgebra y Geometría se utilizan con mucha frecuencia técnicas de tipo combinatorio basadas en la superposición de estructuras lineales a trozos. Inicialmente,

¹⁰⁴[Tak93] A.Takayama: *Analytical Methods in Economic Theory*, Cambridge Univ Press, 1993

¹⁰⁵Para una aproximación complementaria con incursiones a cada uno de estas áreas ver mis notas sobre *Teoría Económica. Una aproximación diferencial*

¹⁰⁶[Mac09] D.Maclagan and B.Sturmfels: *Introduction to Tropical Geometry*, pdf accesible en Internet

se consideran objetos y funciones con propiedades de convexidad. La estructura combinatoria proporciona un soporte para el cálculo de invariante de tipo topológico, algebraico o geométrico. Algunos casos típicos aparecen en

- *Topología Algebraica* en relación con la (co)homologías simplicial o singular.
- *Álgebra Conmutativa* en relación con bases de Groebner,
- *Geometría Algebraica* en relación con polígonos/poliedros convexos (de Newton, p.e.) geometría tórica (fans, p.e.), variedades determinantes, etc

La idea básica consiste en resolver en primer lugar la parte combinatoria de un problema mediante Geometría Tropical. Formalmente, sobre $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se definen dos operaciones

$$x \oplus y = \min\{x, y\} \quad , \quad x \otimes y = x + y$$

que dotan a $\mathbb{T} := (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \otimes)$ de la estructura de semianillo al que se llama *semianillo tropical*

- Un *monomio tropical* en este semianillo es una aplicación lineal que se representa en aritmética clásica como una función lineal de las variables con coeficientes enteros.
- Un *polinomio tropical* en este semianillo es el mínimo de un conjunto finito de monomios, por lo que se representa mediante un función cóncava, continua y lineal a trozos.
- Una *hipersuperficie tropical* asociada a un polinomio es el conjunto de puntos en los que el polinomio tropical es no diferenciable.

La Geometría Tropical de las ecuaciones polinomiales sobre $\mathbb{T}$ se pueden interpretar como igualdades y desigualdades sobre los números reales $\mathbb{R}$. La utilización de técnicas de Geometría Tropical en Geometría Enumerativa se muestran en el apéndice del módulo 5.

Algunas aplicaciones recientes de la Geometría Tropical a diferentes aspectos de la Teoría Económica se pueden ver en [Kri14]¹⁰⁷

Uno de los repositorios más amplios de aplicaciones software para múltiples aspectos de la Geometría (incluyendo herramientas relacionadas con Geometría Tropical) se puede ver en <http://www.scipy.org/topical-software.html>

¹⁰⁷[Kri14] N.Krivulin: “Tropical Optimization Problems”, <http://arxiv.org/pdf/1408.0313v1.pdf>

0.3.5. Modelo estándar y Gran Unificación

Básicamente y dependiendo de la escala a la que actúan, hay cuatro tipos de interacción en Física Teórica que se etiquetan como gravitatoria, electromagnética, débil y fuerte. El modelo estándar se refiere a la unificación entre las tres últimas interacciones. Las ecuaciones estructurales fueron descritas por Yang y Mills y son invariantes por la acción de los grupos estructurales $U(1)$, $SU(2)$ y $SU(3)$, para las interacciones electromagnética, débil y fuerte respectivamente.

Por ello, el producto de estos tres grupos clásicos proporciona un marco estructural para la unificación de dichos tipos de interacción, al que se llama *modelo estándar*. Un reto bastante difícil es llevar a cabo una unificación del modelo estándar con la interacción gravitatoria; a este problema se le etiqueta como la *Gran Unificación* para la que se han propuesto diferentes opciones desde los años setenta.

La dificultad de la Gran Unificación no se debe a un problema de escala (el salto de órdenes de magnitud de la electromagnética con la interacción fuerte es aún mayor), ni tampoco a un problema de encontrar un grupo “suficientemente” grande, ni al tipo de ondas (también existen las gravitatorias), sino al substrato común basado en la Mecánica Cuántica para el modelo estándar y la Geometría (Pseudo-)Riemanniana para la Relatividad General.

Por ello, la mayor parte de los esfuerzos desde los años sesenta se han orientado hacia una *cuantización de la interacción gravitatoria*. A las teorías que tratan de resolver este problema se las etiqueta como GUT (Great Unification Theories). A pesar de los diferentes y muy interesantes intentos para resolver esta cuestión, aún no se dispone de una solución matemática satisfactoria y, mucho menos, reconocida por los Físicos como “verificable” sin recurrir a cantidades de energía fuera del alcance de las tecnologías disponibles.

Desde un punto de vista histórico, a mediados de los años cuarenta, Von Neumann desarrolla una versión geométrica de la Mecánica Cuántica desarrollando una estructura riemanniana sobre espacios de Hilbert que se ha convertido en un estándar para una aproximación geométrica al problema sobre espacios de funciones.¹⁰⁸ Una opción para las GUT consiste en desarrollar un esquema similar al de Von Neumann para las ecuaciones del campo gravitatorio sobre espacios localmente simétricos.

Las soluciones ideales para fenómenos de tipo ondulatorio se reformulan geoméricamente en términos de (imágenes de) rectas ó de sus compactificaciones dadas por (curvas equivalentes a) circunferencias y sus deformaciones. Uno de los desarrollos más relevantes relacionados con este tipo de modelos está dada por los espacios twistor que se comentan en el primer apartado. La cuantización de este fenómeno motiva la introducción de ondas solitarias (solitones) que conservan su forma a lo largo de su propagación; en el segundo apartado se presentan algunos aspectos geométricos de los solitones.

¹⁰⁸Una reformulación geométrica del modelo de Von Neumann se puede ver en el último capítulo del módulo 2 (Linealización) de mis apuntes sobre Geometría Diferencial

En el tercer apartado se presentan las (perturbaciones de) las soluciones autoduales de Yang-Mills en espacios 4-dimensionales (instantones, p.e.), que ha dado lugar a la demostración de algunos de los resultados más importantes para (subvariedades de dimensión 2 de) las variedades 4-dimensionales. En el último apartado se presentan algunos de los resultados y retos más interesantes relacionados con las supercuerdas. El cómputo de curvas racionales en variedades de dimensión tres (módulo 6) de este curso muestra una conexión estructural con la Geometría Enumerativa (módulo 5 de este Curso).

Nota.- Los tópicos que se presentan en esta subsección se abordan con más detalle en el módulo 7: Física, Geometría y Topología que es la prolongación de los 6 módulos correspondientes a cada una de las áreas de Matemáticas sobre las que he impartido Cursos (Geometría Diferencial/Algebraica, Topología Algebraica/Diferencial. Por ello, tan sólo se presentan algunas pinceladas significativas para “despertar la curiosidad” y que ponen de manifiesto el carácter fragmentario de los conocimientos actuales en dimensión real ≥ 3

Espacios twistor

Una estrategia bastante común en Matemáticas consiste en asociar objetos complejos a elementos reales de un espacio para facilitar su manipulación. El ejemplo algebraico trivial es la introducción de los números complejos para garantizar la existencia de soluciones de ecuaciones con coeficientes reales. La interpretación del análisis clásico de Fourier en términos complejos es otro ejemplo clásico en Análisis. El ejemplo trivial geométrico es la representación de giros en el plano mediante productos por números complejos.

Otros *ejemplos menos triviales* pero también clásicos están dados por la representación de las rectas del espacio ordinario como el producto (de Segre) $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ (la cuádrica de Klein en $\mathbb{P}^5$) o bien las circunferencias del espacio 3D ordinario mediante los puntos de una cuádrica en $\mathbb{CP}^4$ ¹⁰⁹.

Todos estos ejemplos son casos particulares de los *espacios twistor* introducidos por R. Penrose (1967) para representar los rayos de luz en el espacio-tiempo cuyo soporte está dado por Grassmannianas de rectas ¹¹⁰.

Para motivar algunas de estas cuestiones a partir de los ejemplos más elementales es conveniente recordar algunos hechos básicos de las Grassmannianas $G(2, 4)$ de rectas $\ell \subset \mathbb{P}^3$. La descomposición celular de $G(2, 4)$ (cuádrica de Klein en $\mathbb{P}^3$) proporciona una base para la homología y, por dualidad, para la cohomología. Recordemos la descripción en el grado intermedio:

¹⁰⁹La relación de este ejemplo con la Geometría Conforme se desarrolla en el Curso sobre *Robotics. A hierarchised approach*.

¹¹⁰Detalles y referencias recientes (más próximas al marco de la Geometría Diferencial que a la Algebraica) en J. Frauendiener and R. Penrose: “Twistors and General Relativity”, en B. Engquist and W. Schmid (eds): *Mathematics Unlimited: 2001 and Beyond*, Springer-Verlag 479-505, 2001

Fijada una bandera completa $p_0 \in \ell_0 \subset \pi_0 \subset \mathbb{P}^3$, la doble reglación de la Grassmanniana de rectas $Grass(2, 4)$ en $\mathbb{CP}^3$ mediante los sistemas de α -planos $\{\ell \subset \mathbb{P}^3 \mid p_0 \in \ell\}$ y de β -planos $\{\ell \subset \mathbb{P}^3 \mid \ell \subset \pi_0\}$ proporciona los generadores para la homología en grado 2. Por dualidad, se obtienen los generadores para la cohomología que son los que realmente interesan para la resolución de las EDP.

La (anti-)dualidad interna entre los generadores de grado 2 para la (co)homología permite agrupar las soluciones de las EDP del modelo estructural por paquetes en “congruencias de rectas” como soporte para la dinámica. Recordemos que una congruencia de rectas es un ciclo 2-dimensional en la Grassmanniana 4-dimensional; por ello, es una combinación $a\alpha + b\beta$ de los dos generadores de la (co)homología de $Grass(2, 4)$ representados por los pares de planos proyectivos que proporcionan la reglación de la cuádrica de Klein Q_K . La geometría de las congruencias de rectas es clave para el estudio de propiedades de variedades más generales que las grassmannianas.

La reformulación global sobre variedades se inicia en los años ochenta y se desarrolla en términos de fibrados vectoriales de rango 2 sobre $Grass(2, 4)$ con restricciones adicionales. Una aplicación elemental (aunque poco explotada) de este enfoque a cuestiones de renderización utiliza la idea siguiente: Cada foco de luz o cada cámara en una escena se representa como un plano proyectivo (isomorfo a un α -plano), mientras que el comportamiento de la luz sobre la superficie se gestiona en términos de (trazas de) rectas sobre el plano tangente a la superficie S^β que acota cada objeto volumétrico B^β en la escena.¹¹¹

De forma casi simultánea, Calabi demuestra que las superficies minimales en la esfera euclídea $\mathbb{S}^n$ se pueden describir en términos de curvas holomorfas en un espacio complejo que es el fibrado de las estructuras casi-hermíticas sobre una variedad de dimensión par¹¹².

La incorporación del análisis armónico (asociado a las soluciones del operador de Laplace generalizado a variedades), permitió demostrar que dicho objeto es un fibrado twistor y, bajo circunstancias bastante favorables, es una variedad compleja. El caso más sencillo corresponde a $\mathbb{S}^4$ cuyo fibrado twistor es $\mathbb{CP}^3$ que es precisamente el espacio twistor para el espacio-tiempo de Minkowski (M, ds^2) donde $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$.

La versión dinámica, la relación con superficies minimales y con la geometría conforme son aún más interesantes, pero requieren conocimientos adicionales que se presentan en el módulo 4 (Superficies Algebraicas) de esta materia. Una presentación mucho más completa de las conexiones con la Física Teórica se puede ver en [War90]¹¹³

En cualquier caso, la mayor parte de los tópicos mencionados requieren conocimientos adicionales de Física Teórica y son más avanzados de los que corresponden al carácter básico de los contenidos expuestos en este Curso. Por ello no

¹¹¹Los detalles se presentan en el module B_{43} (Renderization) de la materia B_4 (Computer Graphics).

¹¹²Estos tópicos se abordan al final del módulo 4

¹¹³[War90] R. S. Ward and R. O. Wells, R. O., Jr.: *Twistor geometry and field theory*. Cambridge Univ. Press, 1990

serán detallados, remitiendo a la literatura especializada para un tratamiento más sistemático.

Solitones

Un solitón es una perturbación localizada permanente de una onda no-lineal. De una forma intuitiva, se puede interpretar como una onda “solitaria” que no pierde su forma al propagarse; ejemplos clásicos bien conocidos corresponden a la formación de olas en canales estrechos cuando sube la marea en zonas próximas a la costa.

En el caso de curvas algebraicas proyectivas complejas los solitones aparecen como superposición de las funciones theta de curvas hiperelípticas, es decir, con $g > 1$. Clásicamente, es conocido (B.Riemann, 1857) que las curvas hiperelípticas dependen de $3g - 3$ parámetros.

Por otro lado, la parte no trivial de la $g \times g$ -matriz de períodos $(\tau_{ij} := \int_{\beta_i} \omega_j)$ es simétrica y, por ello, depende de $\frac{1}{2}g(g+1)$ parámetros. Esta matriz induce una polarización (forma bilineal no-degenerada representada por la integración de formas) sobre la superficie de Riemann (modelo real de la curva algebraica C). Esta polarización dota a la Jacobiana $Jac(C)$ de una estructura como variedad abeliana principalmente polarizada. Para $g \geq 4$ se tiene que $\frac{1}{2}g(g+1) > 3g - 3$. Esta desigualdad motiva el problema siguiente:

Problema de Schottky (1909): Determinar si una variedad abeliana principalmente polarizada es una variedad Jacobiana.

El formalismo básico para estas cuestiones se presenta en los últimos capítulos del módulo 1 (Curvas Algebraicas) de esta materia. El problema de Schottky es muy difícil de resolver y desde principios del siglo XX ha tenido varias aproximaciones de tipo algebraico, analítico y diferencial.

Una de las aproximaciones más sorprendentes en relación con la solución negativa del problema se aborda en términos del lugar singular del divisor Θ de la curva; “curiosamente” dicho lugar singular se expresa en términos de la existencia de trisecantes (que dan lugar a puntos triples sobre proyecciones genéricas). Esta inesperada conexión entre aspectos analíticos (embebimiento asociado al divisor Θ y Geometría Algebraica Proyectiva) requiere desarrollos adicionales que sólo se abordan a partir de mediados del s.XX (Andreotti, Mumford, et al

114

De forma paralela y desde el punto de vista diferencial, los solitones aparecen inicialmente como soluciones aisladas de cierto tipo de EDP. La superposición no-lineal de soluciones a esta jerarquía KP se representa como puntos de una variedad de Grassmann en espacios de dimensión infinita. La analogía con una versión geométrica del análisis de Fourier es clara, pero no parece haber sido explotada.

¹¹⁴Ver más detalles https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Schottky_problem

De forma sorprendente (aún sin una explicación estructural), la jerarquía KP de las ecuaciones de solitones proporcionan el único método conocido para resolver el problema de Schottky. Este enfoque ha sido desarrollado a finales de los ochenta por van der Geer (1985) utilizando la topología (espacios recubridores) de los espacios de moduli de las curvas algebraicas de género g , con refinamientos posteriores de Donagi (1988).

Instantones

Las ecuaciones estructurales para los modelos de interacción fuerte fueron formuladas de forma independiente por Yang y Mills en 1953. A diferencia de las ecuaciones de Maxwell, se trata de ecuaciones no-lineales cuya integración plantea problemas realmente difíciles. Desde el punto de vista físico, estas ecuaciones fueron objeto de polémica desde poco después de su aparición por eminentes físicos como Pauli (con su célebre frase “Not even wrong”) pues, entre otras cosas, postulan la existencia de partículas sin masa que adquieren dicha masa en los procesos de ruptura de simetrías.

Desde el punto de vista algebraico, se pueden considerar como teorías gauge que extienden la acción del grupo unitario $U(1)$ (característico del electromagnetismo al grupo de la interacción electrodébil dado por $U(1) \times SU(2)$ y al grupo de la QCD dado por $SU(3)$. Según el enfoque gauge ¹¹⁵, el grupo inicial para estudiar el modelo estándar (unificación entre las interacciones electrodébil y fuerte) estaría dado por $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. De una forma ideal, a muy altas energías todas las “constantes de acoplamiento” convergerían hacia un único valor antes de la “ruptura de simetrías” ¹¹⁶. Para poder verificar esta hipótesis, es necesario analizar las soluciones de las ecuaciones de Yang-Mills.

Las primeras soluciones a las ecuaciones de Yang-Mills fueron dadas en 1975 por Belavin, Polyakov, Schwarz y Tyupkin (BPST) en una versión euclídea del espacio-tiempo 4D para la interacción electrodébil. Están localizadas en el entorno de un punto que se desplaza (de ahí su nombre de instantones) y verifican una condición de auto-dualidad que permite interpretarlas como superficies en un espacio 4-dimensional. Esta aproximación es compatible con los métodos de perturbación de soluciones que se consideran en el entorno de una solución auto-dual, y no para pequeños entornos de la solución nula como ocurría en el enfoque clásico. Ello requiere estudiar las deformaciones para estas perturbaciones de las soluciones autoduales y analizar las obstrucciones a la prolongación de dichas soluciones. La extensión de este enfoque al marco QCD para la interacción fuerte se reveló como un problema muy difícil.

A lo largo de una estancia de Singer en Oxford invitada por Atiyah, ambos se dieron cuenta de que era posible calcular el *número* de las soluciones generalizadas de Dirac utilizando los Teoremas del Índice (medalla Field, 1966) que

¹¹⁵Este enfoque se desarrolla en el módulo 7: Física, Geometría y Topología

¹¹⁶Una introducción a la bifurcación equivariante se desarrolla en el módulo 5 de Topología Diferencial

habían demostrado a mediados de los años sesenta ¹¹⁷. Poco después, E.Witten asistió como estudiante a las conferencias impartidas por Atiyah durante su estancia en el MIT (1977) y, posteriormente, se desplazó a Oxford donde extendió (1978) las soluciones del modelo BPST (tipo instantones) a soluciones más generales de las ecuaciones de Yang-Mills no necesariamente correspondientes a soluciones auto-duales.

La comprensión de este fenómeno requería un estudio más detallado de la geometría y la topología de las variedades 4-dimensionales que fue llevado a cabo por S.Donaldson, bajo la dirección de Atiyah, trabajo por el que recibió la Medalla Field (1986). La extensión de estos resultados y su aplicación a las teorías de campos cuánticos 2D (modelo de “juguete”) fue iniciada por E.Witten y posteriormente extendidas al estudio de anomalías y a los fenómenos de ruptura de simetrías en el marco de la Mecánica Cuántica. Por estos trabajos y otros muchos desarrollados a lo largo de los años ochenta, E.Witten recibió la Medalla Field en 1990 (primer físico en recibir esta distinción). ¹¹⁸.

Elementos de Supercuerdas y Supersimetrías

El cálculo del número de soluciones de las ecuaciones de YM para el enfoque BPST motivó un estudio más detallado de la geometría Enumerativa (módulo 5) de curvas racionales (supercuerdas) sobre threefolds (módulo 6) que empieza a desarrollarse a finales de los ochenta.

En este apartado se comentan algunas ideas básicas relacionadas con la geometría algebraica de estos objetos. ¹¹⁹

De una forma *muy simplificada*, algunos elementos clave para entender el interés de métodos de Geometría Algebraica para las GUT (Great Unification Theories) consiste en

1. Interpretar la (compleción de) geodésicas como si fueran rectas proyectivas módulo transformaciones birracionales, es decir, curvas racionales.
2. Contar el número de curvas racionales, a las que se llama *cuerdas*, contenidas en variedades que son el soporte para la resolución de las ecuaciones asociadas a los diferentes tipos de interacción.
3. Introducir simetrías compatibles con la estructura del espacio ambiente y los modelos de propagación sobre las cuerdas, obteniendo las llamadas *cuerdas supersimétricas*.

¹¹⁷El cálculo de soluciones de un sistema de ecuaciones es un problema típico de la Geometría Enumerativa que se introduce en el módulo 5

¹¹⁸Una versión más detallada de estos tópicos se presenta en el módulo 7

¹¹⁹Un comentario sobre las conexiones entre Supercuerdas y Geometría de Threefolds aparecerá en una versión posterior de este documento. Para más detalles ver el módulo 7 (actualmente en reelaboración)

4. Modelar y comparar los diferentes modos de vibración para dichas cuerdas supersimétricas para explicar las fuerzas fundamentales de la naturaleza (responsables de los diferentes tipos de interacción).

Según esta Teoría, cada armónico (modos principales de vibración) determina un tipo de partícula. Por ello, la determinación de armónicos y su control mediante simetrías (estimables como simetrías infinitesimales) proporcionarían la clave para la clasificación y, por consiguiente, para la unificación. Lamentablemente y a pesar de los esfuerzos realizados en los centros de Altas Energías aún no hay evidencia empírica que permite justificar la presencia de dichas supersimetrías.

Una cuestión crucial para “saber dónde buscar” consiste en identificar no sólo cuántas soluciones hay (caso de haber un número finito), sino cuáles son las *restricciones estructurales* que deben verificar. Hay varios tipos de restricciones pueden ser relativas a

- el *embebimiento en variedades* casi-homogéneas o al menos localmente simétricas para algún modelo del espacio-tiempo en relación con la interacción gravitatoria, p.e.);
- los *niveles críticos de funcionales* sobre orbifolds (paquetes de órbitas); este tópico se aborda en Topología Geométrica ¹²⁰;
- las *simetrías vinculadas a Ecuaciones Diferenciales* que es un enfoque típico de las “simetrías especulares” y la formalización de argumentos procedentes de la Física Teórica). ¹²¹

Los trabajos de E.Witten y sus colaboradores (algo difíciles de leer) proporcionan materiales de gran interés para el desarrollo de este tipo de problemas y algunas de las intrincadas relaciones entre los mismos y las GUT.

¹²⁰Parte II de mis apuntes sobre Topología Algebraica y Geometría

¹²¹En la url <http://www.claymath.org/library/monographs/cmim01c.pdf> se puede leer una de las referencias más completas sobre Mirror Symmetry.

0.4. Estructura del Curso

En esta sección se enumeran los tópicos centrales para la Geometría Algebraica con algunos breves comentarios relativos por un lado al Álgebra Local (Conmutativa y Homológica) y la Topología (Algebraica y Diferencial), debido a la utilización ubicua de resultados de Álgebra para el estudio de propiedades locales y de Topología para el estudio de propiedades globales. Los primeros son cruciales para resolver problemas de caracterización, mientras que los segundos proporcionan la clave para abordar problemas de clasificación.

En la introducción a cada uno de los módulos mencionados se puede encontrar un desarrollo bastante más detallado de las ideas básicas que sólo se esbozan en esta sección.

Un compendio de técnicas de Geometría Algebraica debería incluir al menos los módulos siguientes:

1. *Curvas algebraicas*
2. *Variedades algebraicas:*
3. *Haces y cohomología:*
4. *Superficies y Ciclos Algebraicos:*
5. *Geometría Enumerativa:*
6. *Variedades tridimensionales:*

La descripción anterior no es exhaustiva y deja a un lado tópicos muy importantes como los relacionados con la Teoría Geométrica de Invariantes, los problemas de moduli, los Grupos Algebraicos, o el marco general de la Teoría de Esquemas. Cualquiera de ellas daría lugar al desarrollo de otro módulo. Sin embargo, ninguna de ellas ha sido impartida por el autor y la organización de los materiales daría lugar a una extensión excesiva de la materia propuesta.

En un Curso Académico completo es muy difícil impartir los 6 módulos mencionados, pues cada uno tiene una duración media aproximada de tres meses. Por ello, esta materia se adapta a una asignatura impartida a lo largo de dos Cursos Académicos con duración anual. La desaparición de la mayor parte de estos contenidos de la Licenciatura de Matemáticas ha dado lugar a que la mayor parte de estos módulos ya no se impartan o aparezcan de forma esporádica en algunos cursos del Tercer Ciclo o, más recientemente, del máster de Investigación en Matemáticas.

0.4.1. Módulo 1: Curvas algebraicas

Según O.Zariski, cualquier estudiante que desee iniciarse en Geometría Algebraica debe estar familiarizado con la Teoría de Curvas Algebraicas. Por ello, no es ninguna originalidad empezar con este tópico. Las curvas algebraicas proporcionan un soporte común cuyo interés procede de ser los objetos geométricos más simples desde el punto de vista algebraico; en particular, proporciona soporte a la intersección de diferentes técnicas procedentes del Álgebra (anillos, cuerpos de funciones) o de la Teoría de Números (extensiones de cuerpos, valoraciones) y su versión analítica (funciones multivaloradas sobre los modelos reales dados por superficies de Riemann) ó topológica (clasificación de superficies compactas).

En el *módulo 1* se introducen las nociones básicas de Álgebra Conmutativa que permiten resolver problemas de intersección (Bézout y sus extensiones), sistemas lineales (Max Noether), recubrimientos ramificados (Hurwitz), cálculo de caracteres proyectivos (Plücker), invariantes birracionales (género) y relaciones entre caracteres e invariantes (Riemann-Roch). Se proporciona una introducción al enfoque trascendente (Abel) y a la parametrización local para el caso singular (Puiseux). El manual de referencia es el libro de W.Fulton: *Algebraic Curves*

El módulo 1 se puede considerar como una extensión de materiales contenidos en el libro de Fulton, incluyendo algunas excursiones vinculadas a los enfoques topológico y analítico. Una lectura reduccionista (la más habitual) del libro de Fulton da lugar a una interpretación de la Geometría de Curvas Algebraicas como una “ilustración” del Álgebra Conmutativa. En el enfoque que desarrollamos, la recuperación de materiales geométricos (ignorados en [Ful] pero parcialmente re-introducidos en [Har]), analíticos, diferenciales y topológicos. Contiene los capítulos siguientes:

1. *Conjuntos algebraicos afines*: El resultado fundamental es el Teorema de los Ceros de Hilbert que proporciona un diccionario natural entre los lenguajes algebraico y geométrico.
2. *Elementos de Álgebra Conmutativa*: Se introducen las nociones básicas relativas a anillos de polinomios, valoraciones (como análogo a funciones sobre espacios) y cálculo con ideales. Todos los conceptos se ilustran con aplicaciones básicas al caso de curvas planas.
3. *Curvas proyectivas planas* Sistemas lineales. Teoría Básica de Intersección. Puntos múltiples. Los resultados fundamentales son los Teoremas de Bézout (para el cálculo del número de intersección) y de Max Noether (para sistemas lineales).
4. *Resolución de singularidades*: Aplicaciones racionales. Puntos simples y singulares. Explosiones. Transformaciones cuadráticas. Normalización. Además de presentar las nociones básicas relacionadas con la resolución de singularidades, se muestran diferentes procedimientos para obtener modelos no-singulares de curvas.

5. *Divisores sobre una curva. Teorema de Riemann-Roch:* Divisores y sistemas lineales de puntos sobre curvas. Relaciones de equivalencia. Derivaciones y Diferenciales sobre curvas. El divisor canónico. Aspectos intrínsecos y extrínsecos. El Teorema de Riemann-Roch.
6. *Recubrimientos y ramificación:* Superficie de Riemann asociada a un polinomio. Teorema de Riemann-Hurwitz. Aplicaciones en el espacio proyectivo. Superficies de Riemann como variedades proyectivas. Adjunción.
7. *Desarrollos analíticos* Algunos resultados de Geometría Analítica Local: Teorema Preparatorio de Weierstrass. Teorema de Parametrización Local. Aplicación al caso de curvas. Teorema de Puiseux. Polígono de Newton. Caracteres aritméticos.
8. *El enfoque trascendente:* Integrales de formas sobre curvas algebraicas. Elementos de Topología de Superficies Compactas. Teorema de Abel-Jacobi. Matrices de períodos (Riemann). Algunas aplicaciones a curvas elípticas e hiperelípticas.
9. *Elementos de Geometría Conforme:* Nociones básicas. El grupo Conforme. El teorema de Uniformización de Riemann. El operador de Laplace. Versión discreta. Aplicaciones a multimedia.

Algunas referencias para el módulo 1

No es posible entender la Geometría Algebraica (y sus posteriores desarrollos) sin una visión histórica de la Teoría de Curvas Algebraicas en sus diferentes aspectos geométricos, trascendentes y aritméticos. Por ello, además del libro de W.Fulton que se toma como referencia para los desarrollos presentados en este módulo, se recomienda la lectura de otros manuales que han sido escritos bajo perspectivas complementarias (trascendente o aritmética, sobre todo).

Los manuales más próximos al enfoque basado en Álgebra Conmutativa de la Geometría Algebraica que se desarrolla en este módulo son:

[Ful08] W.Fulton: *Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry*, 3rd ed. 2008 ¹²²

[Har11] J.Harris: *Geometry of Algebraic Curves*, Fall 2011.

[Rei88] M.Reid: *Undergraduate algebraic geometry*, London Math. Soc. Student Texts 12, 1988.

[Wal78] R.J.Walker: *Algebraic Curves* (1st ed 1978), Springer-Verlag 1991

Para el enfoque trascendente ver

[Cle03] C. H.Clemens: *A Scrapebook of Complex Curve Theory* (2nd ed), American Mathematical Society, 2003.

[Gri76] P. Griffiths, J. Harris: *Principles of algebraic geometry*, John Wiley, 1976 (2nd ed, 1994)

¹²²La primera edición fue publicada por Benjamin Inc. (1st ed, 1969). Hay trad. esp. en Ed.Reverté.

Desarrollos más avanzados que los presentados aquí se pueden consultar en

[Wei71] A.Weil: *Courbes algébriques et variétés abéliennes*, Hermann eds, 1971

La Geometría Computacional Conforme ha tenido un crecimiento explosivo (cerca de 700K referencias en Google) desde la aparición de [Gu07]. Además del curso disponible en la web de Gu, algunas de las referencias más importantes para los materiales contenidos en este module A_{31} son

[Gu07] Gu and Yau: *Computational Conformal Geometry*, Stony Brook Lect, Intl Press, 2007.

[Jin20] Jin, Gu, He and Wang: *Conformal Geometry*, Springer-Verlag, 2020.

0.4.2. Módulo 2: Variedades algebraicas

Como siempre, los problemas fundamentales a resolver son la caracterización y clasificación de variedades algebraicas, en este caso, de dimensión arbitraria. La extensión de los resultados disponibles para curvas a dimensión superior presenta problemas difíciles de resolver, que requieren desarrollos más avanzados de las herramientas auxiliares procedentes del Álgebra (Conmutativa y Homológica) y de la Topología (Algebraica y Diferencial). Para fijar ideas y minimizar los prerequisites, se supone inicialmente que las variedades son reducidas e irreducibles ¹²³.

Las referencias que he seguido habitualmente para impartir este curso son los libros de Itaka [It82], Mumford ([Mum70], [Mum75]) y Shafarevich [Sha74] por orden alfabético. La aparición posterior del librito de Reid [Rei88] y de J.Harris [Har10] proporcionan una espléndida introducción a aspectos básicos de la Geometría Algebraica que hacen mucho más atractiva esta materia.

Estos apuntes del módulo 2 siguen básicamente el esquema propuesto por I.R.Shafarevich con algunas excursiones motivadas por las referencias mencionadas más arriba. El módulo 2 contiene los capítulos siguientes:

1. *Variedades afines y aplicaciones racionales*: Se revisan las nociones básicas relativas al caso afín. El resultado fundamental es el Teorema de los Ceros de Hilbert para el que se presenta una demostración basada en la versión geométrica del Teorema de Normalización (M.Noether). Se muestra cómo pegar datos locales usando funciones racionales, con especial atención a los morfismos de tipo finito.
2. *Variedades proyectivas* Se analiza el espacio proyectivo desde el punto de vista de la Geometría Algebraica, insistiendo en las operaciones básicas (cortar y proyectar). Se introducen espacios homogéneos básicos y se analizan algunas propiedades topológicas.
3. *Variedades casi-proyectivas y morfismos*: El pegado local de variedades afines proporciona variedades casi-proyectivas. Se estudian morfismos regulares y aplicaciones racionales. Se construyen los embebimientos de Veronese y Segre mostrando algunas aplicaciones. Además de los embebimientos del espacio proyectivo, se estudian las aplicaciones finitas sobre el espacio proyectivo (como extensión del Teorema de Normalización) o, con más generalidad, variedades (uni)racionales.
4. *Dimensión. Parametrización local*: Se presentan diferentes aproximaciones (racional, algebraica, diferencial) a la noción de dimensión. Se analiza especialmente el caso singular y las extensiones de las nociones de parametrización local al caso singular. Se introducen las nociones de cono tangente y variedad conormal, así como una primera aproximación a la dualidad geométrica.

¹²³La extensión a esquemas se desarrolla en el módulo 3

5. *Aplicaciones birracionales. Normalización: σ -procesos.* Transformaciones cuadráticas y monoidales. Cierre íntegro. Transformación de Nash. Normalización. Noción de desingularización.
6. *Divisores y Formas Diferenciales:* Hipersuperficies. Divisor de una función. Divisores y aplicaciones racionales. Relaciones de equivalencia algebraica y racional sobre divisores. Descripción algebraica de las diferenciales. Divisor canónico. El anillo canónico. Introducción a la clasificación de variedades.
7. *Elementos de Teoría Local de Intersección:* Índice de interacción. Invariancia. Extensiones del Teorema de Bézout. Equivalencia numérica. Estructura multiplicativa sobre el anillo de ciclos. El caso de superficies.
8. *Aspectos topológicos globales:* Secciones y Proyecciones. Sistemas Lineales de Ciclos sobre Variedades. Conexividad. Introducción a la teoría de Lefschetz. Fibrados Vectoriales sobre Variedades. Fibrados Lineales y Divisores.
9. *Superficies conformes y aplicaciones:* Elementos de Álgebra Geométrica. Álgebras de División. Relaciones entre estructuras real, compleja y cuaterniónica. El caso de superficies. Algunas aplicaciones a IST,

Los manuales más próximos al enfoque basado en Álgebra Conmutativa de la Geometría Algebraica que se desarrolla en este módulo son:

[Har10] J.Harris: *Introductory algebraic geometry. A first Course*, GTM 133, Springer-Verlag, 2010.

[Iit82] S.Iitaka: *Algebraic Geometry. An introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties*, GTM, 76, Springer-Verlag, 1982.

[Mum75] D. Mumford: *Algebraic Geometry I. Complex Projective Varieties*, Springer-Verlag, 1975.

[Rei88] M.Reid: *Undergraduate algebraic geometry*, London Math. Soc. Student Texts 12, 1988.

[Sha74] I.Shafarevich: *Basic Algebraic Geometry*, GMW 213, Springer-Verlag, 1974

Desarrollos más avanzados que los presentados aquí se pueden consultar en

[Har77] R.Hartshorne: *Algebraic geometry*, GTM, Springer, 1977.

[Huy05] D.Huybrechts: *Complex Geometry. An Introduction* Universitext, Springer-Verlag, 2005.

[Mum74] D.Mumford: *The red book of varieties and schemes*, 1974

[Muk03] S.Mukai: *An introduction to invariants and moduli*, Cambridge Studies in Adv. Math. 81, 2003.

[Nee07] A.Neeman: *Algebraic and analytic geometry*, London Math. Soc. LNS 345, Cambridge Univ. Press, 2007

[Wel08] R.O. Wells: *Differential Analysis on Complex Manifolds* (3rd ed), GTM 65, Springer-Verlag, 2008.

0.4.3. Módulo 3: Esquemas, haces y cohomología

La Teoría de Fibrados Vectoriales (como extensión de los fibrados tangente τ_M y cotangente Ω_M^1) sobre variedades diferenciables M y su cohomología a coeficientes constantes ya estaba consolidada a mediados de los cincuenta. Sin embargo, operaciones básicas (como considerar núcleos o conúcleos, p.e.) no proporcionaban objetos dentro de la misma categoría. Asimismo, su aplicabilidad a variedades algebraica o analíticas presentaba serias dificultades debido a la posible aparición de singularidades.

En esta situación J.P.Serre y A.Grothendieck introducen las nociones de prehaz y haz que permiten solventar algunas de las deficiencias que presentaba la teoría clásica basada en fibrados. La extensión de la cohomología con soporte compacto al caso de (pre)haces abre unas posibilidades casi inagotables, no sólo para recuperar resultados clásicos con demostraciones rigurosas, sino para una cantidad cada vez mayor de nuevos resultados.

Para entender la ubicuidad de los métodos basados en cohomología de haces, es necesario pensar en esta teoría como una herramienta absolutamente general para resolver problemas de ecuaciones que pueden afectar a funciones, distribuciones de campos, sistemas de formas o una combinación de todas ellas. En este contexto, la anulación de la cohomología a valores en un haz $\mathcal{F}$ (inicialmente coherente) pone de manifiesto que no hay obstrucciones a la resolución de sistemas de ecuaciones (polinómicas, diferenciales, analíticas) ó, alternativamente, que no hay obstrucciones a la prolongación o a la deformación, dependiendo de los haces que se consideren.

El módulo 3 contiene los capítulos siguientes:

1. *Fibrados sobre Variedades*: Fibrados tangente y cotangente. Operaciones. Fibrados tensoriales. Cambio de base. Cohomología con soporte compacto. Invariantes.
2. *Prehaces y haces*. Nociones básicas. Algunos ejemplos significativos. Operaciones. Haces coherentes. Haces amplios. Haz canónico
3. *Morfismos*
4. *Cohomología de Haces. Aspectos generales*. Introducción algebraica. Cohomología de Čech. Algunas aplicaciones avanzadas. Invariantes topológicos.
5. *Comparación entre cohomologías*: Espacios clasificantes. Cohomología con soporte compacto. Clases características. Relación con la cohomología singular.
6. *Cohomología en Geometría Algebraica*: Cohomología para los casos diferenciable, algebraico analítico. Apéndice algebraico sobre funtores derivados.
7. *Algunas aplicaciones*

Algunas referencias para el módulo 3

[EGA] A.Grothendieck and J.Dieudonné: *Éléments de Géométrie Algébrique* I (1960), II(1961), III(1963), IV (1964-67). Institut d'Hautes Études Scientifiques (IHES)

[Eis00] D. Eisenbud, J. Harris: *The geometry of schemes*, GTM, Springer-Verlag, 2000.

[God66] R.Godement: *Topologie algébrique et Théorie des Faisceaux*, Ed. Hermann, 1966 (2ème éd).

[Har77] R.Hartshorne: *Algebraic geometry* (3rd ed, 2000), GTM, Springer-Verlag, 1977.

[Mum74] D.Mumford: *Red book of varieties and schemes*, 1974

[Sho06] Shokurov and Danilov: *Algebraic geometry I. Algebraic curves, manifolds and schemes*, I.R. Shafarevich, (ed.), Springer-Verlag, 2006.

Desarrollos más avanzados que los presentados aquí se pueden consultar en

[Bai77] W. L. Jr Baily, T. Shioda, eds: *Complex Analysis and Algebraic Geometry. A collection of papers dedicated to K.Kodaira*, Cambridge Univ. Press, 1977

[Har66] R. Hartshorne: *Residues and duality*, LNM20, Springer-Verlag 1966

[Hir66] F. Hirzebruch: *Topological methods in algebraic geometry* (2nd ed, 1978), Springer-Verlag, 1966.

David Eisenbud; Joe Harris (1998). *The Geometry of Schemes*. Springer-Verlag. ISBN 0-387-98637-5.

Robin Hartshorne (1997). *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag. ISBN 0-387-90244-9.

David Mumford (1999). *The Red Book of Varieties and Schemes: Includes the Michigan Lectures (1974) on Curves and Their Jacobians* (2nd ed.). Springer-Verlag. ISBN 3-540-63293-X. doi:10.1007/b62130.

Qing Liu (2002). *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford University Press. ISBN 0-19-850284-2.

0.4.4. Módulo 4: Superficies y ciclos algebraicos

En este módulo se lleva a cabo un estudio de algunas de las propiedades de superficies que resultan significativas para los problemas de caracterización y clasificación. La clasificación algebraica de superficies no-singulares ya era esencialmente conocida a principios del s.XX por la Escuela Italiana (liderada por Castelnuovo y Enriques, 1909). Se incorporan algunos elementos adicionales vinculados a superficies analíticas, donde se introducen algunas Para simplificar y motivar desarrollos más avanzados sólo se considera el caso complejo.

La caracterización de variedades analítica o bien Kähler como variedades algebraicas fue llevada a cabo a partir del Teorema de embebimiento (en el espacio proyectivo) de Kodaira. Por ello, la clasificación de superficies no se puede considerar como completa hasta los trabajos de K.Kodaira a partir de los sesenta. La clasificación de variedades complejas compactas 2D (no necesariamente algebraicas) extiende la clasificación de las superficies algebraicas de la Escuela Italiana (5 tipos) a los siete tipos que se presentan en este módulo. Cabe destacar el estudio realizado por Kodaira de las fibraciones por curvas elípticas de superficies, por un lado, y la caracterización de las superficies K3 (Kummer, Kähler, and Kodaira) como deformaciones de superficies cuárticas en $\mathbb{P}^4$ que forman una única clase módulo difeomorfismos (Kodaira).

Desde un punto de vista más abstracto, a principios de los cincuenta H.Cartan y J.P.Serre habían introducido la sucesión exacta de cohomología asociada a la aplicación exponencial que permite relacionar aspectos algebraicos y analíticos (holomorfos en el caso complejo). Reemplazando el haz estructural por el haz (co)tangente, se obtiene una primera descripción sintética de las deformaciones llevada a cabo por K.Kodaira y D.C.Spencer que extiende los primeros resultados de H.Cartan y J.P.Serre al caso analítico complejo, abriendo asimismo el camino a posteriores desarrollos para el caso singular o, más recientemente, para cuerpos de característica arbitraria.

La extensión a las potencias del fibrado cotangente (el haz dualizante, en el caso singular) permite conectar con los problemas de clasificación y reintroducir la dualidad de una manera puramente formal, conectando con el enfoque clásico de residuos (R.Harsthorne, 196?). La extensión a haces coherentes más generales aparece ya perfectamente definida a mediados de los sesenta.

El Teorema de anulación de Kodaira que permite simplificar muchos de los cálculos relacionados con la cohomología se extiende a haces mucho más generales [Esn92]. De este modo, es posible obtener, reinterpretar y extender resultados clásicos de adjunción de la Geometría Algebraica Italiana ¹²⁴

El módulo 4 contiene los apartados siguientes:

1. *Curvas y Ciclos sobre superficies*
2. *Riemann-Roch para superficies. Adjunción*
3. *Superficies regladas. Pencils*

¹²⁴Estos tópicos se abordan al final del módulo 5 para facilitar su reinterpretación geométrica

4. *Superficies racionales. Aplicaciones a Ingenierías*
5. *La clasificación de Castelnuovo-Enriques*
6. *Tipos particulares de superficies*
7. *Aspectos topológicos. Teoría de Hodge básica*
8. *Desingularización de superficies*

Algunas referencias para el módulo 4

Los manuales más próximos al enfoque basado en Álgebra Conmutativa de la Geometría Algebraica que se desarrolla en este módulo son:

[Bar84] W.Barth,, C. Peters and Van de Ven: *Compact Complex Surfaces*, Springer. 1984.

[Bea03] A. Beauville: *Complex algebraic surfaces* (2nd ed), London Mathematical Society, 2003.

[Rei96] M. Reid: *Chapters on algebraic surfaces*, arXiv:alg-geom/9602006, 1996.

[Sha67] I.Shafarevich: *Algebraic Surfaces*, Proc. Steklov Institute, Amer. Math Society, 1967.

[Zar71] O.Zariski: *Algebraic Surfaces*, Springer-Verlag, 1971.

Desarrollos más avanzados que los presentados aquí se pueden consultar en [Bar84] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven: *Compact complex surfaces*, Springer-Verlag, 1984.

[Dem12] J.-P. Demailly: *Complex Analytic and Differential Geometry*, 2012

[Huy00] D. Huybrechts: *Complex geometry. An introduction*, Springer-Verlag, 2000.

[Mum70] D.Mumford: *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press 1970

[Mur10] J. Murre: *Lectures on algebraic cycles and Chow groups* (2nd ed), Cambridge Univ. Press, 2010

[Voi02] C. Voisin: *Hodge theory and complex algebraic geometry I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge Univ. Press, 2002.

[Voi03] C. Voisin: *Hodge theory and complex algebraic geometry II*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge Univ. Press, 2003.

0.4.5. Módulo 5: Geometría Enumerativa

El *objetivo* de la Geometría Enumerativa es identificar cuándo un problema tiene un número finito de soluciones y, en el caso afirmativo, determinar el número de soluciones “contadas propiamente” que tiene dicho problema. Este problema aparece formulado de forma similar por primera vez en la Conferencia impartida por D.Hilbert en el ICM de París (1900) y se etiqueta como el Decimoquinto problema de Hilbert.

La resolución de este problema requiere el desarrollo de una correcta *Teoría de Intersección* que no ha estado disponible hasta el libro de W.Fulton (1984). La noción clave es la de multiplicidad de intersección que presenta una larga y tortuosa historia con múltiples intentos fallidos hasta llegar a la fórmula de los *Tor* de J.P.Serre que es la primera noción que permite resolver todas las patologías (vinculadas a componentes inmersas ó singularidades, p.e.) que habían aparecido en relación con aproximaciones anteriores al caso algebraico.

No obstante, para muchas aplicaciones basta con nociones más sencillas e intuitivas que se presentan en las primeras lecciones del Curso y que permiten conectar con aspectos de la Geometría Diferencial o Analítica, a través de un enfoque topológico. Las técnicas utilizadas en Geometría Enumerativa muestran frecuentemente conexiones entre aspectos intrínsecos y extrínsecos de variedades o, con más generalidad, esquemas.

Las soluciones de los problemas de Geometría Enumerativa pueden ser puntos de variedades proyectivas o bien puntos de esquemas. En el segundo caso, como dichos puntos están dados por ideales primos $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(A)$, dichas soluciones pueden ser asimismo subvariedades irreducibles. Un caso particularmente interesante corresponde a curvas racionales sobre variedades (threefolds, en particular) que se han revelado recientemente de gran utilidad para algunos problemas de Física Teórica en el marco de supercuerdas.

Este módulo tiene su origen en una asignatura de Tercer Ciclo impartida durante el Curso 1983-84 en el Seminario de Geometría Algebraica de la Universidad de Valladolid. En el momento de redactar los apuntes de este módulo, el libro *Intersection Theory* de Fulton no estaba disponible. Por ello, los elementos utilizados como referencia fueron los artículos de Kleiman (Oslo, 1977) y algunos artículos de W.Fulton y R.MacPherson de finales de los setenta y principios de los noventa.

Aunque el libro de W.Fulton se ha convertido en la referencia universal, su lectura no es fácil y, por ello, el enfoque presentado en este módulo sigue siendo de utilidad como una introducción a algunos aspectos de la moderna Teoría de Intersección desde una perspectiva más sencilla, incluyendo elementos históricos que habitualmente se encuentran dispersos en la literatura.

A la redacción original se han añadido dos capítulos correspondientes a

- Una versión extendida de las conferencias sobre *Variedades Polares* impartidas por R.Piene (Mayo, 1984) ¹²⁵;

¹²⁵La redacción de estas notas por JF fue publicada dentro de la Serie de Monografías de

- un capítulo sobre *Teoría de Adjunción* que fue presentado como Memoria para una estancia en el Instituto Max Planck de Bonn que, por razones personales, no llegó a efectuarse. Una extensión de este enfoque dio lugar al trabajo (no publicado) sobre la demostración de las cotas de Castelnuovo-Mumford por JF (1991) y que se presenta en el módulo 6.

El módulo 5 contiene los capítulos siguientes:

1. *Geometría Enumerativa Lineal*: Grassmannianas. Teorema de la Base. Anillo de cohomología. Fórmulas de Pieri y de Giambelli. Variedades de Banderas.
2. *Relaciones sobre Ciclos Algebraicos*: Conceptos básico. Multiplicidad de intersección. Especialización de ciclos.
3. *Equivalencia numérica*: Grado y número de intersección. Una aproximación diferencial. Autointersección. Característica de Euler-Poincaré. El principio de conservación del número en el grupo de Grothendieck.
4. *Clases de Chern*: Nociones básicas y propiedades elementales. El Teorema de Gauss-Bonnet y algunas extensiones. Autointersección y Fórmula llave. El Teorema de Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieck. Teoremas del Índice.
5. *Ramificación*: Conceptos básicos. Riemann-Hurwitz para curvas. Fibrados y variedades secantes. Diferenciales relativas. Riemann-Hurwitz para variedades.
6. *Variedades Polares*: Geometría Intríneca y Extrínseca. Espacios osculantes. Haces de partes principales. Fórmulas de Plücker para curvas. Fórmulas de Salmon-Cayley-Zeuthen-Pieri. Variedades duales.
7. *Adjunción*: El fibrado canónico y el haz dualizante. El anillo canónico. Diferentes tipos de adjuntas. Sistemas lineales sobre variedades. Anulación de la cohomología (Esnault, Kawamata, Vieweg).

Algunas referencias para el módulo 3

[Ful84] W.Fulton: *Intersection theory* (2nd ed, 1998), GMW, Springer-Verlag 1984.

Desarrollos más avanzados que los presentados aquí se pueden consultar en [Esn92] H.Esnault and E.Vieweg: *Lectures on Vanishing Theorems*, Birkhauser, 1992.

0.4.6. Módulo 6: Variedades tridimensionales

Nota previa. - Este módulo tiene su origen en un Curso impartido por M.Reid en la Universidad de Valladolid en 1992 sobre el programa de Mori (medalla Fields en 1990) y resultados relacionados. En cierto modo, se puede entender como una versión extendida (sólo autorizada para los primeros capítulos) de los apuntes escritos por JF con diferentes “excursiones” hacia algunos tópicos incluidos en las referencias que aparecen más abajo. Una versión ampliada de este curso fue impartida posteriormente por el prof. M.Reid en Salt-Lake City; lamentablemente no ha sido nunca publicada. Más allá de los trabajos de M.Reid y de los autores citados en el curso, la única contribución original del Curso concierne al desarrollo de resultados relacionados con la Geometría de las Threefolds con Singularidades Ordinarias. Para intentar respetar al máximo el estilo inicial de M.Reid, se ha mantenido la redacción en un inglés que debe ser revisado.

Los problemas de clasificación y caracterización de variedades o, con más generalidad, esquemas en dimensión arbitraria se abordan inicialmente en términos del anillo canónico

El módulo 6 contiene los capítulos siguientes:

1. *Background from surfaces and the aim of classification of 3-folds*
2. *Bending and breaking in Mori theory*
3. *Theorem on the cone and contraction*
4. *Canonical and terminal singularities*
5. *Flips and log flips, minimal models*
6. *Kodaira dimension and the abundance theorem*
7. *Some ideas in the Geometry of uniruled varieties*

Algunas referencias para el módulo 6

[Cle89] H.Clemens, J.Kollár, and S.Mori: *Higher-dimensional complex geometry*, Astérisque 166, 1989.

[Iit82] S.Iitaka: *Algebraic Geometry. An introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties*, GTM, 76, Springer-Verlag, 1982.

[Kol98] J.Kollár, and S.Mori: *Birational geometry of algebraic varieties*, with the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti. Transl. from the 1998 Japanese original. Cambridge Tracts in Math. 134, 1998.

[Mat02] K.Matsuki: *Introduction to the Mori program*, Universitext. Springer 2002.

[Uen75] K.Ueno: *Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces*. LNM, Springer-Verlag, 1975.

References given by M.Reid to follow his 1992 Course are the following ones:

- [Ale91] V. Alexeev: "General elephants for Mori fiber spaces", *Preprint, Utah*, 1991
- [Din87] M. Reid: *Tendencious survey of 3-folds*, *Proc. Symposium Pure Math (Algebraic geometry (Bowdoin, 1985))*, Amer. Math Soc. 1985 (this reference appears as *Dinosaurs* following the Reid's terminology).
- [Kaw91] Y. Kawamata: "The abundance theorem", *preprint, Univ. of Tokyo*, 1991
- [Kaw87] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki: "Introduction to the minimal model program, Alg. Geometry (Sendai, 1985)", *Adv. Studies in Pure Math* 10, Kinokuniya - North Holland, 283-360, 1987.
- [Kol87] J. Kolla'r: "The structure of algebraic threefolds - an introduction to Mori's program", *Bull Amer. Math. Soc* 17, 211-273, 1987.
- [Koll91] J. Kolla'r, Y. Miyaoka and S. Mori: "Rationally connected varieties", *RIMS, Kyoto and Utah preprint*.
- [Miy86] Y. Miyaoka and S. Mori: "A numerical criterion of uniruledness", *Ann of Math* 124, 65-69, 1986.
- [Mor79] S. Mori: "Projective manifolds with ample tangent bundles", *Ann. of Math* 110, 593-606, 1979.
- [Mor82] S. Mori: "Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective", *Ann. of Math* 116, 133-176, 1982.
- [Mor88] S. Mori: "Flip theorem and the existence of minimal models for threefolds", *J. Amer. Math. Soc.* 1, 117-253, 1988.
- [Rei83] M.Reid: "Projective morphisms according to Kawamata", *Preprint, Univ. of Warwick*, 1983
- [Rei91] M.Reid: "Birational geometry of 3-folds according to Sarkisov", *Lecture notes April 1991*
- [Sho85] Shokurov: The nonvanishing theorem, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* 49 (1985), 635-651 = *Math USSR Izv.* 19 (1985), 591-604
- [Sho01] Shokurov: "3-fold log flips", *Izv. Akad. Nauk Ser. Mat.* (to appear) *Warwick preprint* 35, 1991.
- [Cle88] H. Clemens, J. Kolla'r, S. Mori: *Higher-dimensional complex geometry*, *Astérisque* 166, 1988.
- [Uta91] Several authors: Proceedings of summer school, Aug 1991, mainly on [Shokurov 2], to appear
- [Wil87] P. M. H. Wilson: "Towards birational classification of algebraic varieties", *Bull. London Math. Soc.* 19, 1-48, 1987.
- [YGC87] M. Reid: "Young person's guide to canonical singularities", *Proc. Symp. Pure Math (Algebraic geometry, Bowdoin, 1985)* 46, Amer. Math. Soc. 1987, 345-416

Desarrollos más avanzados que los presentados aquí (incluyendo conexiones muy interesantes con la Física de Supercuerdas) se pueden consultar en

- [Can87] P. Candelas: "Lectures on Complex Geometry", in *Superstrings'87 (Proc. Trieste)*. 1987.

[Cox99] D. Cox and S. Katz: *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry*, vol. 68 of Math Surveys and Monographs. Amer. Math. Society, 1999.

[Gre87] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten: *Superstring Theory. Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, 1987.

[Hor03] K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, and E. Zaslow: *Mirror Symmetry*, vol. 1 of Clay Mathematics Monographs. American Mathematical Society, 2003.

[Hub92] T. Hübsch: *Calabi-Yau Manifolds: A Bestiary for Physicists*. World Scientific, 1992.