

CAPITULO 5: PEGADO Y CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA DE SUPERFICIES

JAVIER FINAT, OCTUBRE 2018

CONTENTS

1. Pegado de datos	2
1.1. Operaciones de grupos	2
1.2. Producto fibrado	3
1.3. El Teorema de Seifert-Van Kampen	5
1.4. Algunas aplicaciones del Teorema de Van Kampen	9
2. Clasificación 2D: TTA	11
2.1. Clasificación 2D: El caso orientable	11
2.2. El caso no-orientable	12
2.3. Polígonos fundamentales (TTA)	13
2.4. Una nota avanzada sobre la clasificación 3D	16
3. Invariantes Globales y Recubrimiento de Superficies (TTA)	20
3.1. Comportamiento de la característica de Euler-Poincaré	22
3.2. Espacios recubridores y Grupos discretos sobre superficies	24
3.3. Ejercicios	24
4. Recubrimientos ramificados de superficies (TTA)	25
4.1. Nociones básicas	25
4.2. Recubrimientos de la esfera con g asas	27
4.3. Teorema de Riemann-Hurwitz (TTA)	29
4.4. Algunas aplicaciones	32
5. Retos, Prácticas y Ejercicios	36
5.1. Retos	36
5.2. Prácticas	37
5.3. Ejercicios propuestos	37
5.4. Bibliografía comentada	38

El objetivo de este capítulo consiste en mostrar procedimientos efectivos de cálculo para el grupo fundamental de superficies compactas. Los resultados para el caso orientable se deben inicialmente a Moebius; sus argumentos fueron formalizados y extendidos al caso no-orientable por Poincaré en varios trabajos publicados a finales del s.XIX y comienzos del s.XX.

Para calcular el grupo fundamental de un espacio hay dos estrategias generales que consisten en calcular el espacio recubridor universal (y utilizar las propiedades de la proyección) ó bien en “pegar datos sencillos” cuyos grupos fundamentales se suponen conocidos. La primera estrategia ha sido expuesta en el capítulo anterior y la segunda se desarrolla en este capítulo, con una atención especial al caso de superficies. La técnica propuesta por el Teorema de Seifert y Van Kampen (resultado central de la primera mitad del capítulo) utiliza la “suma amalgamada” de grupos para pegar datos locales asociados a los grupos fundamentales expresados en términos de las presentaciones de grupos, donde se recupera la clasificación de superficies compactas, conexas y sin borde (Teorema de Poincaré).

En las secciones adicionales correspondientes a posibles trabajos se comentan cuestiones más avanzadas relacionadas con el problema de la ramificación y los invariantes globales (topológicos y algebraicos) que permiten relacionar las geometrías intrínseca y extrínseca de los objetos considerados. Éste es uno de los núcleos mas significativos donde se solapan las Geometrías Algebraica y Analítica para variedades complejas.

1. Pegado de datos

Para motivar las construcciones basadas en grupos consideremos un espacio topológico con forma de 8, es decir, dos circunferencias con un punto en común x_0 que elegimos como punto base (La lemniscata de Bernoulli proporciona un modelo algebraico). En el capítulo anterior se ha mostrado que el espacio recubridor universal de esta figura es un árbol en el que cada nodo tiene 4 aristas que confluyen y que se ramifica de forma indefinida; como cualquier árbol conexo es contractible, el espacio recubridor universal no aporta ninguna información significativa para el cálculo del grupo fundamental del 8. Si razonamos directamente, el grupo fundamental de cada circunferencia es cíclico infinito y generado por la clase a_i de un lazo $[\omega_i]$ que da una vuelta en torno a la i -ésima circunferencia C_i . Por ello, intuitivamente, el grupo fundamental asociado al 8 debería ser un producto (no necesariamente conmutativo) de colecciones de potencias de a_i . El Teorema de Seifert-Van Kampen garantiza que efectivamente ocurre así. Esta sección está dedicada a mostrar dicho resultado y algunas consecuencias elementales.

En esta sección seguimos Massey (1972) y Hatcher (2002)

1.1. Operaciones de grupos. Esta subsección repasa algunos de los conceptos introducidos en el capítulo 3 que guardan una relación más directa con el problema de clasificación de superficies a partir del cálculo de grupos de homotopía.

1.1.1. Producto libre de grupos. Definición.- Sean g y H dos grupos. El *producto libre* $G * H$ se define como el grupo cuyos elementos son *palabras* $g_1 h_1 g_2 h_2 \dots$ (ó $h_1 g_1 h_2 g_2 \dots$) de longitud arbitraria módulo las relaciones presenten en G y H . La

operación de grupo es la concatenación de palabras y la palabra vacía es el elemento identidad e para la operación de grupo.

1.1.2. *Producto amalgamado de grupos.* Sea K un tercer grupo junto con homomorfismos de grupos $i : K \rightarrow G$ y $j : K \rightarrow H$. Entonces el producto libre de G y H sobre K ó *producto amalgamado*, al que se denota por $G *_K H$ es el cociente de $G * H$ por la relación de equivalencia que resulta de identificar las imágenes $i(k)$ y $j(k)$ por los homomorfismos i y j , es decir, pasamos al cociente en $G * H$ módulo las relaciones $i(k)j(k)^{-1}$ (que identificamos con la unidad en el grupo).

Con más generalidad, si se utilizan presentaciones de grupos, para dos palabras arbitrarias A y B en $G * H$ y para $k \in K$ tenemos

$$Ai(k)B = Aj(k)B$$

Dichas relaciones generan un subgrupo N que es el mínimo subgrupo normal que contiene todos los elementos de la forma representada por los productos de la forma $[Ai(k)B][Aj(k)B]^{-1}$.

Frecuentemente, denotaremos el producto amalgamado también mediante $G \#_K H$ para no confundir el asterisco $*$ con las notaciones correspondientes a las aplicaciones inducidas correspondientes a las imágenes inversa (pullback) y directa (pushout) ó bien con la utilización del asterisco para las diferentes teorías de (co)homología. En relación con las cuestiones de presentación de grupos presentadas en capítulos precedentes, el producto amalgamado introduce las relaciones de la presentación sobre la descripción del objeto dado como producto libre.

Nota.- En la categoría de grupos, un producto amalgamado de grupos se puede definir para cualquier colección de grupos. La comprobación de que este objeto está bien definido es trivial en teoría de categorías (el producto amalgamado es un producto imagen directa por un par de aplicaciones en la categoría de grupos), pero es algo más laboriosa y se relega (ver Massey, 1973, p.e.)

Ejercicio.- Demuestra que si G y H son grupos cíclicos de orden p y q , respectivamente, con p y q primos entre sí, entonces el producto amalgamado coincide con el producto libre $G * H = \langle x, y \mid x^p = y^q = 1 \rangle$

1.1.3. *Factorización.* Una propiedad básica importante del producto libre $*_{i \in I} G_{\alpha_i} = \#_{i \in I} G_{\alpha_i}$ de grupos es que cualquier colección de homomorfismos $\varphi_{\alpha_i} : G_{\alpha_i} \rightarrow H$ se extiende de forma única a un homomorfismo $\#_{i \in I} G_{\alpha_i} \rightarrow H$. En particular, el valor de φ sobre una palabra $g_1 \dots g_n$ con $g_i \in G_{\alpha_i}$ es $\varphi_{\alpha_1}(g_1) \dots \varphi_{\alpha_n}(g_n)$. Utilizando esta fórmula para definir φ se obtiene un homomorfismo bien definidos (el proceso de reducir un producto no reducido en $*_{i \in I} G_{\alpha_i}$ no afecta a su imagen vía φ).

Por ejemplo, para el producto libre $G * H$ las aplicaciones inclusión $G \hookrightarrow G \times H$ y $H \hookrightarrow G \times H$ inducen un homomorfismo suprayectivo $G * H \hookrightarrow G \times H$.

Nota.- El producto amalgamado se utiliza para calcular el grupo fundamental de dos espacios conexos X e Y unidos por un subespacio conexo por arcos Z , donde K es el grupo fundamental del subespacio topológico Z .

1.2. Producto fibrado.

1.2.1. *Nociones básicas.* Dadas dos aplicaciones $f : Y \rightarrow X$ y $g : Z \rightarrow X$, el *producto fibrado* $P = Y \times_X Z$ es una terna (P, p_1, p_2) que se define de la forma siguiente: Las aplicaciones $p_1 : P \rightarrow Y$, $p_2 : P \rightarrow Z$ son las proyecciones sobre las primera y segunda componentes de

$$X \times_Y Z := \{(y, z) \in Y \times Z \mid f(y) = g(z)\}$$

El producto fibrado $P = Y \times_X Z$ el "menor objeto" que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P = Y \times_X Z & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X \end{array}$$

En otros términos, para cualquier aplicación otra terna (Q, q_1, q_2) con $q_1 : Q \rightarrow Y$ y $q_2 : Q \rightarrow Z$ siendo q_1 y q_2 las proyecciones sobre las primera y segunda componentes de

$$X \times_Y Z := \{(y, z) \in Y \times Z \mid f(y) = g(z)\},$$

existe una aplicación $u : Q \rightarrow P$ que hace conmutativos los correspondientes diagramas, es decir, tal que

$$q_1 = p_1 \circ u, \quad q_2 = p_2 \circ u$$

Un ejemplo típico mostrado en la Geometría Diferencial de Variedades es la imagen recíproca de un fibrado $\xi = (E, \pi, B)$ a través de una aplicación continua $g : Z \rightarrow B$ que permite inducir el *fibrado imagen recíproca* (*pull back*) $f^*\xi := (E \times_B Z, p_2, Z)$ sobre Z

Nota.- En el módulo V esta noción se extiende a espacios anillados $(X, \mathcal{O}_X)$ donde $\mathcal{O}_X$ denota el "haz estructural" de las funciones diferenciables, analíticas (holomorfas), algebraicas, racionales ó meromorfas; en este contexto, el producto fibrado $X \times_Y Z$ aparece dotado de una estructura natural dada por el producto tensorial de los haces correspondiente a cada uno de los marcos estructurales asociados.

1.2.2. Observaciones.

- La construcción de la imagen recíproca es general dentro de la categoría de conjuntos.
- Los monomorfismos son estables por imagen recíproca

Ejercicio.- ¿Son estables por imagen recíproca los epimorfismos por imágenes recíprocas? ¿y los isomorfismos?

1.2.3. *Reformulando el Producto Amalgamado.* El producto amalgamado (pushout) es el dual del producto fibrado. De una forma más explícita:

Dadas dos aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Z$, el *producto amalgamado* $P = Y \#_X Z$ es una terna (P, i_1, i_2) dada por un objeto P y dos aplicaciones $i_1 : Y \rightarrow P$, $i_2 : Z \rightarrow P$ inyectivas en el producto amalgamado

$$Y \#_X Z := \{(y, z) \in Y \times Z \mid i_1(y) = i_2(z)\}$$

El producto amalgamado $P = Y \#_X Z$ el "menor objeto" que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P = Y \#_X Z & \longleftarrow & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ Z & \longleftarrow & X \end{array}$$

En otros términos, para cualquier aplicación otra terna (Q, j_1, j_2) con $j_1 : Y \rightarrow Q$ y $j_2 : Z \rightarrow Q$ siendo j_1 y j_2 aplicaciones de inclusión sobre las primera y segunda componentes de

$$X \#_Y Z := \{(y, z) \in Y \times Z \mid i_1(y) = i_2(z)\},$$

existe una aplicación $u : P \rightarrow Q$ que hace conmutativos los correspondientes diagramas, es decir, tal que

$$j_1 = u \circ i_1, \quad j_2 = u \circ i_2$$

Para fijar ideas, se puede considerar el producto amalgamado P como si fuera una "intersección" de las imágenes directas mediante las aplicaciones i_1, i_2

1.2.4. Observaciones.

- La construcción de la imagen directa (pushout) es general dentro de la categoría de conjuntos.
- Los *espacios de adjunción* (ramilletes de esferas, aplicación cilíndrica, etc) descritos en el capítulo anterior en relación con estrategias de "pegado" son ejemplos de imágenes directa (pushout) en la categoría de espacios topológicos.
- El pegado de espacios punteados (en el que se identifican los puntos base de cada espacio punteado) es un ejemplo de imagen directa (pushout).

Ejercicio.- ¿Son estables por imagen recíproca Los epimorfismos? ¿y los isomorfismos?. Razona la respuesta.

1.3. El Teorema de Seifert-Van Kampen. El resultado fundamental de esta sección es el Teorema de Seifert-Van Kampen que permite calcular el grupo fundamental a partir de los grupos fundamentales asociados a los abiertos U_i de un recubrimiento $\mathcal{U}$ de X . Su aplicación al caso 2-dimensional permite recuperar la clasificación de superficies compactas (casos orientable y no-orientable) llevada a cabo por Poincaré a finales del s.xix, anticipada por Moebius para el caso orientable y completada posteriormente por Tietze (1916). Actualmente, continúan abiertos un gran número de problemas relacionados con la clasificación para el caso 3D que se comentan al final del capítulo (ver subsección de Retos).

Las estrategias habituales para "pegado de datos" para C^r -variedades M utilizan un recubrimiento por abiertos con condiciones de compatibilidad para el solapamiento $U_\alpha \cap U_\beta$ de abiertos coordinados; de una forma más explícita si $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una carta de M , se requiere que

$$\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1} \mid_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sea una C^r -equivalencia. Esta construcción proporciona buenos resultados cuando se tiene una estructura local que es localmente equivalente a espacios métricos (Geometría Diferencial) ó afines (Geometría Algebraica) desde el punto de vista topológico, pero tiene limitaciones obvias cuando el espacio presenta singularidades o cuando es unión arbitraria de componentes de diferentes dimensiones. Para cubrir estos casos, en el capítulo anterior se han introducido las nociones de ramilletes (bouquets) de esferas y sus extensiones a aplicaciones de tipo cilíndrico ó cónico.

Los ramilletes de esferas son de gran utilidad para identificar el tipo topológico en el entorno de una singularidad aislada para el caso complejo. Las construcciones de tipo cilíndrico ó cónico son de gran utilidad para identificar el comportamiento en torno a los diferentes tipos de singularidades que aparecen en espacios estratificados (ver Goresky y Macpherson, 1988, para una aproximación diferencial que extiende la Teoría Clásica de Morse); este tópico se aborda en el Bloque VI. En el bloque I estamos interesados en explotar la información que podamos extraer a partir del cálculo de grupos de homotopía. Algunas de las aplicaciones más relevantes de este enfoque para la Geometría Algebraica se pueden ver en Fulton y Hansen, 1981.

En una primera aproximación, para una hipersuperficie X dada localmente por $f(\underline{x}) = 0$ el lugar singular $Jac(f)$ descompone en unión de estratos (abiertos de diferentes dimensiones) que "pegamos" identificando células (asimismo de diferentes dimensiones); siguiendo una metodología similar a la de Riemann, en lugar de examinar las diferentes prolongaciones que se pueden realizar sobre el complementario del lugar de ceros y polos de una función meromorfa, ahora se trata de examinar las diferentes prolongaciones que se puedan definir en el complementario $X \setminus Sing(X)$ de dicho lugar singular $Sing(X)$.

En el marco algebraico reducido (componentes con multiplicidad igual a uno) y desde el punto de vista combinatorio, la linealización del lugar singular $Sing(X)$ se puede aproximar localmente mediante una configuración ordenada (arrangement $\mathcal{A}$) de hiperplanos H_i correspondientes a hiperplanos (ó con más generalidad conos) tangentes asociados al lugar singular. En muchos casos de interés, la localización relativa de las regiones correspondientes al *complementario de $Sing(X)$* se describe en términos de hiperplanos reflectantes cuyas configuraciones permiten realizar cálculos explícitos de la Topología en términos de grupos de homotopía o bien de (co)homología de manera puramente combinatoria ¹.

Esta presentación sugiere estudiar propiedades topológicas (número de componentes conexas, localización relativa, p.e.) del complementario de las configuraciones básicas de objetos geométricos que puedan aparecer. Las más sencillas son las asociadas a los ramilletes de esferas basadas en un punto que se pueden interpretar como "singularidades aisladas" (un ejemplo clásico es la distribución de ceros y polos de una función meromorfa en el caso de una variable compleja). Interesa desarrollar herramientas para el caso no-aislado en dimensión superior en presencia de restricciones que se interpretan como cerrados del espacio ambiente.

En el marco topológico no se dispone de las condiciones de finitud del caso algebraico y pueden surgir complicaciones como las asociadas a la suspensión de

¹El estudio de configuraciones de hiperplanos y su relación con singularidades asociadas a grupos de reflexiones ha sido llevado a cabo por Orlik y Solomon a finales de los setenta y principios de los ochenta; las aplicaciones a la cohomología de haces de formas diferenciales con polos preasignados es más reciente y se presenta al final del módulo III de mis apuntes de Geometría Algebraica

un toro, p.e. que se puede visualizar como una suma conexa infinita de toros (embebidos en un octaedro) cada vez más pequeños en las dos direcciones de los vértices de las pirámides. Para abordar el caso singular, es necesario disponer de herramientas que faciliten el pegado de datos y que extienden el caso regular; estas herramientas se introducen en el bloque III de estas notas. De momento y para fijar ideas, sólo se considera el caso regular en el que todos los procesos son finitos.

A continuación se muestra cómo llevar a cabo el pegado de datos algebraicos locales (grupo fundamental correspondiente a cada abierto de un recubrimiento) para obtener un invariante global (grupo fundamental) de todo el espacio X . Supongamos que X es unión de abiertos conexos por arcos U_α que contienen al punto base $x_0 \in X$. Denotemos por $i_{\alpha\beta}$ el homomorfismo de grupos

$$i_{\alpha\beta} : \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \pi_1(U_\alpha)$$

inducido por la aplicación inclusión $U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\alpha$. De una manera más gráfica se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccc} i_{\alpha*} : \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta) & \longrightarrow & \pi_1(U_\alpha) \\ i_{\beta,*} \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U_\beta) & \longrightarrow & \pi_1(U_\alpha) \#_{\pi_1(U_\alpha \cap U_\beta)} \pi_1(U_\beta) \end{array}$$

donde $\pi_1(U_\alpha) \#_{\pi_1(U_\alpha \cap U_\beta)} \pi_1(U_\beta)$ representa el *producto amalgamado* de grupos. Entonces, el morfismo natural

$$\Phi : \pi_1(U_\alpha) \#_{\pi_1(U_\alpha \cap U_\beta)} \pi_1(U_\beta) \rightarrow \pi_1(X)$$

es un isomorfismo de grupos, es decir, el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es el producto libre de los grupos $\pi_1(U_\alpha, x_0)$ y $\pi_1(U_\beta, x_0)$, pero amalgamado mediante $\pi_1(U_\alpha \cap U_\beta, x_0)$. Para entender la no-trivialidad de este resultado, nótese que los morfismos $i_{\alpha,*}$ e $i_{\beta,*}$ inducidos por las aplicaciones inclusión en general no son monomorfismos, lo cual requiere introducir el producto amalgamado $\#$ para facilitar el "pegado" de datos. Más formalmente, se tiene el resultado siguiente:

1.3.1. Teorema de Seifert-Van Kampen. *Teorema.*- Con la notación anterior, supongamos que cada intersección $U_\alpha \cap U_\beta$ es conexa por arcos. Entonces, el homomorfismo natural

$$\Phi : \#_\alpha \pi_1(U_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$$

es suprayectivo. Además, si la intersección $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ de cualquier terna es también conexa por arcos, entonces el núcleo $\text{Ker}(\Phi)$ es el *subgrupo normal* N generado por todos los elementos de la forma

$$i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1} \quad \text{para} \quad \omega \in \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta)$$

por lo que Φ induce un isomorfismo

$$\pi_1(X) \simeq \#_\alpha \pi_1(U_\alpha) / N$$

1.3.2. *Demostración de la suprayectividad.* Denotemos mediante $f : I \rightarrow X$ a un lazo con base en $x_0 \in X$. Elegimos una partición $0 = s_1 < s_2 < \dots < s_{m+1} = 1$ de I tal que cualquier subintervalo $[s_i, s_{i+1}]$ se aplica en un único U_α por f . Denotemos el subconjunto U_α que contiene a $f([s_i, s_{i+1}])$ mediante U_i y sea f_i la restricción del lazo f al camino $f([s_i, s_{i+1}])$. Entonces

$$f = f_m \circ \dots \circ f_1$$

Como $U_i \cap U_{i+1}$ es conexo por arcos, podemos elegir un camino g_i desde x_0 a $f(s_i)$ contenido en $U_i \cap U_{i+1}$. Consideremos el lazo

$$(f_m g_m^{-1})(g_m f_{m-1} g_{m-1}^{-1}) \dots (g_2^{-1} f_2 g_1)(g_1^{-1} f_1)$$

que es homótopo al lazo f y es una composición de lazos contenidos en distintos U_i . En consecuencia $[f] \in \text{Im}(\Phi)$.

1.3.3. *Demostración de la inyectividad.* Para un elemento $[f] \in \pi_1(X)$ construimos su *factorización*, es decir, su representación como un producto de lazos $[f_1], \dots, [f_k]$ de modo que cada lazo está contenido en algún U_i . Esta factorización es una palabra en el producto libre de los grupos fundamentales $\pi_1(U_\alpha)$ que se aplica en $[f]$ via Φ . Más arriba se ha visto que cualquier clase de homotopía de un lazo ω en X tiene una factorización. Debemos mostrar que dicha factorización es “esencialmente única” módulo el subgrupo N .

Para describir $\text{Ker}(\Phi)$ es ilustrativo describir todas las posibles factorizaciones de un lazo dado en X . Para empezar nótese que hay dos clases de composiciones y sus inversos:

- Combinar elementos adyacentes $[f_i][f_{i+1}]$ en un único término $[f_i f_{i+1}]$ si f_i y f_{i+1} están en el mismo espacio U_α
- Consideremos el término $[f_i] \in \pi_1(U_\alpha)$ que supondremos está en $\pi_1(U_\beta)$ si f_i es un lazo en $U_\alpha \cap U_\beta$

Definición.- Diremos que dos *factorizaciones* son *equivalentes* si y sólo si determinan el mismo elemento en $*_\alpha \pi_1(U_\alpha)/N$.

Por tanto, para verificar la inyectividad, basta demostrar que dos factorizaciones cualesquiera de un lazo f son equivalentes:

Denotemos mediante $[f_1] \dots [f_k]$ y $[f'_1] \dots [f'_\ell]$ dos factorizaciones de f . Entonces, las composiciones correspondientes de caminos son homótopas via $F : I \times I \rightarrow X$

Consideremos particiones $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ y $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ tales que cada rectángulo $R_{ij} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ se aplica via F en un único U_α que re-etiquetamos como U_{ij} .

Podemos suponer que las s -particiones subdividen las particiones que dan lugar a productos $f_1 \dots f_k$ y $f'_1 \dots f'_\ell$. Como los conjuntos U_α son abiertos, podemos perturbar los lados verticales de los rectángulos R_{ij} , de modo que cada punto en $I \times I$ esté en a lo sumo tres rectángulos R_{ij} . Asimismo, podemos suponer que existen al menos tres filas de rectángulos de modo que la perturbación se haga sólo en las filas intermedias, no en las filas superior ó inferior.

A continuación se re-etiquetan los rectángulos comenzando desde la fila inferior a la superior: Representaremos los lazos en X como caminos en $I \times I$ que recorren las aristas de izquierda a derecha. Sea γ_r el camino que separa los primeros r

rectángulos desde los rectángulos restantes. Por ello, γ_0 es la arista inferior de $I \times I$ mientras que γ_{mn} es la arista superior. La idea consiste en que cuando "impulsamos" γ_r a γ_{r+1} obtenemos factorizaciones equivalentes. Hay que refinar esta idea, pues γ_r no determina por sí misma una factorización.

Llamaremos "vértices" a las esquinas de los rectángulos R_i . Para cada vértice v con $F(v) \neq x_0$, denotemos mediante g_v el camino que va de x_0 a $F(v)$. Podemos elegir g_v para que esté en la intersección de dos de las tres U_{ij} correspondientes a los rectángulos R_i que contiene a v pues suponemos que las intersecciones de dos ó tres cualesquiera de los abiertos en el recubrimiento son conexas por arcos. Insertemos los caminos $g_v^{-1}g_v$ en $F|_{\gamma_r}$ en los vértices apropiados de forma similar a la suprayectividad de Φ . Esto proporciona una factorización de $F|_{\gamma_r}$.

Las factorizaciones asociadas a caminos sucesivos γ_r y γ_{r+1} son equivalentes, pues "impulsando" γ_r a lo largo del rectángulo R_{r+1} hasta alcanzar γ_{r+1} , el camino $F|_{\gamma_r}$ cambia a $F|_{\gamma_{r+1}}$ mediante una homotopía dentro de U_{ij} que corresponde a R_{r+1} . Por tanto, podemos elegir el mismo U_{ij} para todos los segmentos de γ_{r+1} en R_{r+1} .

Es posible conseguir que la factorización asociada a γ_0 sea equivalente a $[f_1] \dots [f_k]$ eligiendo el camino g_v para cada vértice v en la arista inferior de $I \times I$ para que esté contenido no sólo en los dos U_{ij} correspondientes a los dos pequeños rectángulos adyacentes que contienen a v sino también en el abierto U_α para la aplicación f_i que contiene a v en su dominio.

Si v es el extremo común de dos dominios de ese tipo tenemos $F(v) = x_0$ y no hay necesidad de insertar g_v . De forma similar, se demuestra que la factorización asociada a la restricción de F sobre la arista superior de $I \times I$ es equivalente a la de la factorización asociada a γ_0 y, por tanto, equivalente a $[f'_1] \dots [f'_\ell]$, lo cual concluye la demostración de la inyectividad del Teorema de Van Kampen.

1.4. Algunas aplicaciones del Teorema de Van Kampen.

1.4.1. *Ejemplo: Grupo fundamental de la esfera.* En particular, si X es una unión de sólo dos conjuntos A y B , con $C := A \cap B$, entonces

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(A) \#_{\pi_1(C)} \pi_1(B)$$

Para ilustrar esta idea, consideremos la esfera $\mathbb{S}^2$ y tomemos como conjuntos abiertos $A = \mathbb{S}^2 - \mathbf{N}$, $A = \mathbb{S}^2 - \mathbf{S}$ los complementarios de los polos norte y sur. Aplicando el teorema de Van Kampen se obtiene que

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(A) \#_{\pi_1(C)} \pi_1(B) \simeq \pi_1(X) \simeq \pi_1(A) \# \pi_1(B) / \text{Ker}(\Phi)$$

Como A y B son homeomorfos a $\mathbb{R}^2$ son simplemente conexos, por lo que $\pi_1(A) = \pi_1(B) = e$ y como consecuencia se obtiene que

$$\pi_1(\mathbb{S}^2) = e$$

En las subsección siguiente se abordan casos más avanzados que facilitan la clasificación de las superficies compactas conexas sin borde basada en el cálculo del grupo fundamental. Para ello, se necesita la descripción dada en el apartado siguiente:

1.4.2. *Suma amalgamada de presentaciones.* En este apartado se reutilizan algunas ideas básicas de presentaciones $\langle S|R \rangle$ de grupos G mostradas en el capítulo 3 para obtener una presentación de la suma amalgamada, adaptándolas al contexto del grupo fundamental. Denotemos mediante

$$\pi_1(U_\alpha) = \langle u_1, \dots, u_k | \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \rangle, \quad \pi_1(U_\eta) = \langle v_1, \dots, v_m | \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$$

Supongamos que $i_{\alpha*} : \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \pi_1(U_\alpha)$ e $i_{\beta*} : \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \pi_1(U_\beta)$ son los homomorfismos inducidos por las aplicaciones inclusión, con presentación para el grupo fundamental $\pi_1(U_\alpha \cap U_\beta)$ dada por

$$\pi_1(U_\alpha \cap U_\beta) = \langle w_1, \dots, w_p | \gamma_1, \dots, \gamma_q \rangle$$

Entonces una presentación del grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ asociada al recubrimiento $\{U_\alpha, U_\beta\}$ con punto base $x_0 \in U_\alpha \cap U_\beta$ tiene $S = \langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m \rangle$ como generadores y

$$R = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_n, i_{\alpha*}(\omega_i) i_{\beta*}(\omega_j)^{-1}, i_{\beta*}(\omega_j) i_{\alpha*}(\omega_i)^{-1} \quad 1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq n \rangle$$

como relaciones

1.4.3. *Homotopía de un ramillete de esferas.* En este apartado se proponen algunas aplicaciones básicas del Teorema de Seifert-Van Kampen cuya demostración se deja como ejercicio.

- Dados dos espacios punteados X e Y , verifica que el grupo fundamental del pegado basado en un punto es isomorfo al producto libre de los grupos de homotopía.
- Como consecuencia demuestra que el grupo fundamental de un ramillete (bouquet) de k circunferencias es el grupo libre con k generadores *Indicación:* Razona por inducción sobre el número de circunferencias del ramillete
- Calcula el grupo fundamental de un ramillete de k esferas n -dimensionales.
- Calcula el grupo fundamental de un ramillete de esferas de diferentes dimensiones.

La topología local en el entorno de una singularidad aislada de una hipersuperficie compleja (en particular, una curva en el plano) es la de un ramillete de esferas (Milnor, 1956?).

La extensión de los últimos items al caso de grupos de homotopía de orden superior es un problema más difícil que se aborda en el módulo III de estos apuntes.

1.4.4. *Homotopía de un grafo.* Cualquier grafo conexo contiene un árbol maximal (grafo sin ciclos). Los algoritmos tipo MSR (Maximum Spanning Tree) proporcionan una estrategia general para identificar ciclos en el grafo y, por consiguiente, para el borrado de aristas que desconectan los lazos. Un árbol es contractible, por lo que su grupo fundamental es trivial.

Ejercicio.- Diseña una estrategia para calcular la homotopía de un grafo *Indicación:* Utiliza el Teorema de Van Kampen adaptando la construcción a recubrimientos asociados a cada lazo que contienen el árbol maximal.

2. Clasificación 2D: TTA

Toda esta sección se debe entender como una propuesta para un trabajo teórico adicional (TTA)

2.1. Clasificación 2D: El caso orientable. En esta subsección se aborda la clasificación de superficies orientadas compactas conexas sin borde usando la identificación de cada una de estas superficies como un polígono de $4g$ lados con las identificaciones habituales. Para entender el interés del Teorema de Van Kampen en relación con el caso $g = 1$, basta considerar un recubrimiento del rectángulo $\mathcal{R}$ de lados a y b dado por un abierto U correspondiente al interior de $\mathcal{R}$ (cuyo grupo fundamental es trivial) y V como un entorno del borde. Tras identificar los lados opuestos, el borde se retracta a dos circunferencias con un punto en común, cuyo grupo fundamental es el producto directo $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. En este caso, la suma amalgamada de los grupos fundamentales da $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ con $aba^{-1}b^{-1}$ como única relación. Por ello, el grupo fundamental del toro es el grupo abeliano $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ con dos generadores a, b . Este mismo argumento se aplica al caso general

2.1.1. Superficies orientables de género g . Denotemos mediante X una superficie orientable compacta conexas sin borde de género g dada como un *polígono estándar fundamental* de $4g$ lados con la relación

$$(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}) \dots (a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) = 1$$

Entonces X es topológicamente equivalente a la suma conexas de g toros $M_g^2 = \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ y recíprocamente

2.1.2. Esquema de la demostración.

- (1) Elegir uno de los vértices del polígono como punto base para los lazos.
- (2) Recortar un disco $\mathbb{D}$ en el centro de la región poligonal $\mathcal{P}_{4g}$ de $4g$ lados.
- (3) La superficie con borde resultante de suprimir el disco es homotópicamente equivalente a un ramillete de $2g$ circunferencias.
- (4) Construir un "flujo" desde $\mathbb{S}^2$ hacia el borde de la región poligonal $\mathcal{P}_{4g}$ de $4g$ lados.
- (5) $\pi_1(X \setminus \mathbb{D}^2) \simeq \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \rangle$ es decir, el grupo libre de los lazos correspondientes a los lazos que hay en el borde $\partial \mathcal{P}_{4g}$
- (6) El borde $\partial \mathbb{D}$ como lazo en $X \setminus \mathbb{D}$ es homótopo a $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$
- (7) Consideremos el recubrimiento dado por el complementario $X \setminus \mathbb{D}$ del disco y un "collar externo" de la región poligonal acotada por el disco $\mathbb{D}$. La intersección de ambos abiertos es una corona circular cuyo grupo fundamental es isomorfo a $\mathbb{Z}$
- (8) Aplicando el Teorema de Van Kampen se obtiene que

$$\pi_1(X) \simeq \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \rangle / \langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$$

Ejercicio.- Completar los detalles Indicación: Ver Massey.

2.2. El caso no-orientable. En esta subsección se aborda la clasificación para el caso $2D$ no orientable en la que los objetos básicos son suma conexa de superficies orientables y de un número impar de planos proyectivos; se supone que esta descripción ya es conocida del Curso de Topología Geométrica. Recordemos que la *botella de Klein* se obtiene como un polígono estándar fundamental con la relación (dibujarlo)

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1 = 1$$

que representa una visualización del plano proyectivo con las identificaciones apropiadas (cross-cap; comparar con las construcciones del paraguas de Whitney ó de la sombrilla de Cartan). Para simplificar la presentación, suponemos ya realizada la descripción de la parte orientable y nos centramos en la no-orientable que es suma conexa de planos proyectivos.

2.2.1. Superficies no-orientables de género g . Denotemos mediante X una superficie orientable compacta conexa sin borde de género g dada como un polígono estándar fundamental de $2g$ lados con la relación

$$(a_1 a_1)(a_2 a_2) \dots (a_g a_g) = 1$$

(correspondiente al pegado de g planos proyectivos) y que justifica el cálculo del género topológico. Alternativamente, el pegado de n botellas de Klein da una superficie de género no-orientable $2g$ cuyo polígono estándar fundamental de $4g$ lados con la relación

$$(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}) \dots (a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) = 1$$

donde el último lado aparece con la orientación opuesta a la descrita para las superficies orientables. De una manera más geométrica, se puede visualizar dicha superficie como el resultado de adjuntar un plano proyectivo a la suma conexa de g toros, obteniéndose como *polígono estándar fundamental* una colección de $4g + 2$ aristas con la relación

$$(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}) \dots (a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) c^2 = 1$$

que representa el cross-cap $(2n + 1)$ -dimensional. Entonces X es topológicamente equivalente a

- la suma conexa $N_{1,g}^2 = K^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ donde K es la botella de Klein; o bien
- la suma conexa $N_{2,g}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ donde $\mathbb{P}^2$ es el plano proyectivo real.

Nótese que existen relaciones no triviales dentro del semigrupo de superficies cerradas:

$$\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{P}^2 \# \mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{P}^2 \# K^2$$

y

$$K^2 \# \mathbb{T}^2 \simeq K^2 \# K^2$$

donde K^2 la botella de Klein y $\mathbb{P}^2$ es el plano proyectivo real. Estos isomorfismos juegan un papel crucial en las descomposiciones que aparecen en relación con el cobordismo de superficies y que se desarrolla en el Bloque IV (Topología Geométrica).

2.2.2. completar con Massey

2.3. Polígonos fundamentales (TTA). *Toda esta subsección se debe entender como una propuesta para un trabajo teórico adicional (TTA)*

En el primer apartado se introducen algunas nociones básicas de diagramas de Dirichlet-Voronoi para el caso euclídeo que es el más simple. A continuación, se extiende este enfoque al caso del plano hiperbólico que es el más interesante desde el punto de vista de la clasificación de superficies comentada en las dos subsecciones precedentes. La conexión con acciones de subgrupos discretos de $\mathbb{PSL}(2; \mathbb{C})$ (enfoque más próximo a Dirichlet) pone en escena el interés de algunos de los desarrollos mostrados en los dos capítulos precedentes. Para más detalles ver A.F.Beardon (1983).

2.3.1. Diagramas de Voronoi. El diagrama de Voronoi $\mathcal{V}(S)$ asociado a un conjunto S de sitios $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N \in \mathbb{R}^2$ es un grafo cuyas aristas representan el conjunto de puntos que equidistan de los sitios más próximos. Las aristas determinan una descomposición del plano en *regiones de influencia* definidas como

$$\mathcal{V}(\mathbf{p}_i) := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i) \leq d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_j) \forall j \neq i\}$$

asociadas a cada sitio $\mathbf{p}_i \in S$, donde d es una *función distancia*. Obviamente, el mapa de Voronoi depende del tipo de distancia utilizado. Para fijar ideas y facilitar la visualización, en este apartado suponemos inicialmente que se trata de la distancia euclídea

Para simplificar, supondremos inicialmente que la función distancia es la euclídea. En este caso, el diagrama de Voronoi en el plano se construye propagando las mediatrices (perpendiculares por el punto medio del segmento) entre cada par de sitios más próximos.

- Si $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$, el diagrama de Voronoi está dado por la recta mediatriz $e_{12} := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) = d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2)\}$, que es la recta perpendicular al segmento $\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$ trazada por el punto medio $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$ (implementarla como ejercicio).
- Si $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$, el diagrama de Voronoi está dado por las 3 semirectas mediatrices e_{12}, e_{13}, e_{23} que se cortan en el circuncentro ó centro de la circunferencia que pasa por los tres puntos.

El problema empieza a ser interesante cuando S tiene al menos 4 puntos. Debe tenerse en cuenta que S puede tener varios cientos ó miles de puntos. Asimismo, los puntos pueden ser fijos (de interés en cuestiones estáticas de Visión Computacional ó Informática Gráfica) ó móviles (análisis e movimientos, usuarios de servicios de telefonía móvil, p.e.). Más detalles sobre estas cuestiones y sus aplicaciones en el capítulo 5 del Curso de Geometría Computacional. En el apartado siguiente se

desarrolla el enfoque correspondiente al modelo de Poincaré del plano hiperbólico dado en términos del semiespacio superior $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$

2.3.2. Polígono Métrico Fundamental (PMF). Dado $z_0 \in \mathbb{H}^2$ y un subgrupo discreto Γ de $\mathbb{PSL}(2; \mathbb{R})$ que actúa de forma propiamente discontinua sobre $\mathbb{H}^2$, se define el *polígono métrico fundamental* como el conjunto de puntos

$$F := \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, z_0) < d(z, gz_0) \ \forall g \in \Gamma\}$$

donde d es la *métrica hiperbólica* sobre el semiplano superior. El polígono fundamental métrico se la *región de Dirichlet* asociada al punto z_0 . Este polígono fundamental es el *dominio fundamental de la acción* de Γ , es decir, todas las demás regiones de Dirichlet se obtienen por la "traslación" del dominio mediante la acción de elementos $g \in \Gamma$. Algunas *propiedades interesantes* del polígono métrico fundamental PMF son las siguientes:

- PMF es *geodésicamente convexo*, es decir, la geodésica que conecta dos puntos cualesquiera del interior del polígono está contenida en PMF.
- $diam(PMF) \leq diam(\mathbb{H}/\Gamma)$ donde el diámetro de una región A se define como $diam(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$
- El cierre de PMF es compacto
- Si Γ no tiene puntos fijos en $\mathbb{H}$ y el cociente $\mathbb{H}/\Gamma$ es compacto, entonces PMF tiene un número finito de lados.
- Cada lado de PMF es un arco geodésico para la métrica hiperbólica.
- Para cada arista s del PMF existe otra arista s' tal que $gs = s'$ para algún $g \in \Gamma$. Por ello, el PMF tiene un número par de lados.
- El conjunto de elementos del grupo $g \in \Gamma$ que unen lados de PMF entre sí es un conjunto minimal de generadores de Γ .
- El semiplano superior está teselado por el cierre del PMF por la acción de Γ , es decir,

$$\mathbb{H} = \cup_{g \in \Gamma} g\bar{F}$$

donde $\bar{F}$ denota el cierre del PMF

2.3.3. Polígono Estándar Fundamental (PSF). La introducción del PMF permite reinterpretar el diagrama de Voronoi según un enfoque más próximos al enfoque de Dirichlet para el caso hiperbólico en términos del *Polígono Estándar Fundamental* (PSF). En efecto, a partir del PMF se construye el PSF en un número finito de pasos con las propiedades siguientes:

- Todos los vértices de PSF son equivalentes entre sí por la acción de algún $g \in \Gamma$
- El número de aristas de PSF es divisible entre 4.
- El PSF es convexo.
- Un elemento $g \in \Gamma$ lleva a lo sumo un lado de PSF en otro. Por ello, los lados se marcan por pares. Como la acción de Γ conserva la orientación, si una arista de etiqueta como a , entonces la arista del par se marca con la orientación opuesta a^{-1} .

- Las aristas de PSF se ordenan de modo que la lista de aristas adyacentes se escribe de la forma

$$(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}) \dots (a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1})$$

- Los lados se pueden ordenar para que sean arcos geodésicos.
- Cada arista de PSF es un lazo no trivial de $\mathbb{H}/\Gamma$. Por tanto, cada arista es un generador del grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{H}/\Gamma)$.
- Una presentación de $\pi_1(\mathbb{H}/\Gamma)$ está dada por una colección de $2g$ generadores $S\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g\}$ con una única relación

$$(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}) \dots (a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) = 1$$

- El género de la variedad cociente $\mathbb{H}/\Gamma$ es g

2.3.4. *Una forma explícita para PSF.* Como PSF es un representante del cociente $\mathbb{H}/\Gamma$, basta describir los $2g$ generadores a_k del subgrupo discreto Γ del grupo de las transformaciones fraccionarias (Moebius) que expresamos de forma matricial utilizando su representación como elementos de $SL(2; \mathbb{C})$

$$a_k = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\operatorname{sen} k\alpha \\ \operatorname{sen} k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^p & 0 \\ 0 & e^{-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \operatorname{sen} k\alpha \\ -\operatorname{sen} k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} \quad \text{para } 0 \leq k \leq 2g$$

donde

$$\alpha = \frac{\pi}{4g}(2n-1), \quad \beta = \frac{\pi}{4g}, \quad p = \ln \frac{\cos \beta + \sqrt{\cos 2\beta}}{\operatorname{sen} \beta}$$

Ejercicio.- Comprobar que estos generadores verifican la relación

$$(a_0 a_1 \dots a_{2g-1})(a_0^{-1} a_1^{-1} \dots a_{2g-1}^{-1}) = 1$$

2.3.5. *Notas y comentarios adicionales.* Habitualmente, el PMF y el polígono estándar fundamental PSF asociados a la métrica son diferentes. Así, p.e. para el caso de un toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ se tiene que PSF es un paralelogramo (asociado a los períodos de las funciones doblemente periódicas), mientras que el PMF es un hexágono cuyos lados son bisectores perpendiculares a las aristas del paralelogramo. Esta construcción se extiende a las geodésicas (como aristas de PSF) que conectan x con gx cuando $g \in \Gamma$; las bisectrices de las geodésicas generan un conjunto de curvas que forman el PMF

Como PSF es un representante del cociente $\mathbb{H}/\Gamma$, el área total de la superficie de Riemann es igual al área del polígono estándar. Como consecuencia del Teorema de Gauss-Bonnet, el *área del polígono estándar fundamental* es $4\pi(g-1)$ donde g es el género de la superficie de Riemann. En la sección siguiente se relaciona esta información con la asociada a cuestiones de ramificación para aplicaciones y, de una forma más concreta, con el Teorema de Riemann-Hurwitz.

2.4. Una nota avanzada sobre la clasificación 3D. La extensión del enfoque desarrollado en estos apartados al caso nD se realiza en términos de espacios localmente simétricos (las simetrías en cada punto están generadas por traslaciones infinitesimales y sus inversas) que se presentan con más detalle en el módulo IV. Intuitivamente, las simetrías vienen dadas por reflexiones a lo largo de geodésicas. Esta construcción es posible gracias a la construcción de entornos geodésicamente completos para cada punto de una variedad (pseudo)riemanniana. Este enfoque fue iniciado por E.Cartan (1926) y ha tenido un gran desarrollo a lo largo del siglo XX; para un tratamiento sistemático ver Helgason (1978) ó Wolf (1999). Para algunas conexiones con Física Teórica ver Besse (1987). Hay importantes conexiones con el Análisis Armónico que se abordan en el Bloque VI (Wolff, 2007). Además de los escritos de Thurston de principios de los 80 (notas de Princeton) esta subsección sigue básicamente Scott (1983).

Para fijar ideas nos limitamos a algunas observaciones básicas sobre el caso 3D. La construcción de entornos de puntos mediante geodésicas requiere la existencia de métricas con "buenas" propiedades que permiten visualizar propiedades de las variedades n -dimensionales; el caso más sencillo corresponde a espacios métricos que tienen curvatura constante y, en una segunda fase, relajaremos esta condición reemplazándola con propiedades relativas a espacios simétricos. Para fijar ideas, empezamos recordando algunas propiedades métricas de los diferentes tipos de espacios 2D

2.4.1. Métricas estándar. Desde principios del siglo XIX es bien conocido que hay tres tipos de geometrías (euclídea, esférica e hiperbólica) con curvatura constante según que la curvatura sea nula, positiva ó negativa. Esta clasificación está relacionada con el invariante global fundamental que es la característica de Euler-Poincaré

$$\chi(X) := V - E + F$$

donde V es el número de vértices, E el número de aristas y F el número de caras de una triangulación "apropiada" de X (ver Bloque II). En particular,

- Las únicas superficies cerradas con $\chi(X) > 0$ son la esfera $\mathbb{S}^2$ y el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$, ambas relacionadas por la existencia del doble recubrimiento $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ obtenido a través de la aplicación antipodal. Ambas admiten una métrica curvatura total constante positiva igual a 1.
- Las únicas superficies cerradas con $\chi(X) = 0$ son el toro $\mathbb{T}^2$ y la botella de Klein K^2 tienen curvatura total constante positiva igual a 0 (que recibe el nombre de "métrica plana")
- Todas las demás superficies compactas sin borde tienen una métrica de curvatura constante negativa igual a -1 . Cada una de dichas superficies se obtiene como el cociente del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^2$ por un subgrupo discreto Γ asociado al polígono fundamental (ver más arriba). Por ello, la aplicación de paso al cociente $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$ es una aplicación recubridora.

2.4.2. Una relación entre propiedades topológicas y geométricas. Para comprender mejor la relación entre propiedades topológicas y geométricas, recordemos que

- La métrica estándar ds^2 sobre el espacio euclídeo $\mathbb{E}^3$ induce una métrica sobre la esfera $\mathbb{S}^2$ que tiene una curvatura total constante positiva igual a 1 y que permite recuperar la métrica riemanniana a partir de esta información. Usando el doble recubrimiento $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, se obtiene una métrica sobre $\mathbb{P}^2$ definiendo la longitud de un camino γ como la longitud de una elevación a $\mathbb{S}^2$. Para que la longitud proporcionada por esta definición sea independiente de la elevación elegida es necesario que el recubrimiento doble sea (localmente) una isometría, algo que es obvio para la aplicación antipodal, pero que sugiere la utilización de los grupos de isometrías locales asociadas a los espacios recubridores de variedades más generales.
- Para obtener la métrica estándar sobre el toro $\mathbb{T}^2$ ó la botella de Klein K^2 se parte de la métrica euclídea sobre el plano $\mathbb{R}^2$ generada por dos traslaciones en direcciones independientes (para el toro $\mathbb{T}^2$) ó bien por una traslación y una reflexión (para la botella de Klein K^2). Obviamente, ambas son isometrías y la superficie topológica resultante se obtiene como el cociente del plano $\mathbb{E}^2$ por dos traslaciones (lo cual da lugar al toro $\mathbb{T}^2$) ó bien como el cociente por una traslación y una reflexión (para la botella de Klein K^2).
- Para obtener la métrica sobre cada una de las superficies restantes hay que construir el cociente del plano hiperbólico por el subgrupo discreto de isometrías que deja invariante el polígono fundamental descrito en la sección anterior

Nótese que *cualquier superficie compacta sin borde* F es el cociente X/Γ de un espacio X por un subgrupo discreto Γ de isometrías. Se dice entonces (Thurston, 1983) que la superficie F tiene una estructura geométrica modelada sobre el espacio X . En particular, para el caso $2D$, cualquier superficie se puede "modelar" sobre uno de los 3 tipos de espacios $\mathbb{E}^2$, $\mathbb{S}^2$ ó $\mathbb{H}^2$ que dan nombres a las geometrías euclídea, esférica e hiperbólicas.

2.4.3. Generalidades sobre el caso 3D. Parece natural preguntarse si el caso $3D$ es similar, es decir, si *cualquier sólido compacto sin borde* F es el cociente X/Γ de un espacio X por un subgrupo discreto Γ de isometrías. Obviamente, la primera cuestión a resolver es la descripción de los tipos básicos de espacios que podemos considerar. En este caso, además de contar con los 3 espacios básicos "obvios" $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{H}^3$, se tienen otros 5 que se denotan mediante $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ó $\tilde{SL}(2, \mathbb{R})$, Nil y Sol .

Una observación clave de Thurston consiste en extender la relación entre aspectos geométricos y topológicos introducida en los párrafos anteriores para demostrar que las métricas naturales ó estándar inducen estructuras que no pueden ser equivalentes. Así, p.e. $\mathbb{E}^3$ y $\mathbb{H}^3$ son homeomorfos a $\mathbb{R}^3$, pero

- $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ tiene $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ como recubrimiento universal que no puede ser homeomorfo a $\mathbb{S}^3$ ó bien a $\mathbb{R}^3$;
- $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ tienen una métrica natural que es el producto de las métricas estándar, pero difiere del comportamiento de los espacios homogéneos $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{H}^3$ (curvatura constante) en que es anisótropa: la variedad se comporta de forma diferente según la dirección que se tome ... y sin embargo, la variedad es homogénea, es decir, cuando se cambia el punto base, las irregularidades en la distribución siguen siendo las mismas;

- el grupo de isometrías del espacio recubridor $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ es el producto directo del grupo de isometrías de $\mathbb{S}^2$ por el grupo de isometrías de $\mathbb{R}$ (de hecho isomorfo a $O(2; \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2$ y, por consiguiente, no es isomorfo a $O(3, \mathbb{R})$)

Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto profundas relaciones entre aspectos métricos y topológicos en relación con el problema de clasificación de variedades en baja dimensión. Una cuestión crucial es la posibilidad no sólo de construir entornos a partir de propiedades métricas (enfoque propio del Análisis de los espacios métricos) ó de geodésicas (típico en Geometría Diferencial), sino también de identificar propiedades geométricas a partir del comportamiento *local* de la métrica cuando el espacio no tiene curvatura constante. Esta simple observación lleva a Thurston (1983) a introducir nociones que extienden el enfoque 2D al caso 3D en el marco de la *Conjetura de Geometrización* y que se abordan en el párrafo siguiente:

2.4.4. Estructuras geométricas y homotopía. Definición.- Se dice que una métrica ds^2 sobre una variedad M es *localmente homogénea* si para cualquier par de puntos $\underline{p}, \underline{q} \in M$ existen entornos $U = U(\underline{p})$ de $\underline{p}$, $V = V(\underline{q})$ de $\underline{q}$, junto con una *isometría* $(U, \underline{p}) \rightarrow (V, \underline{q})$. Se dice que M admite una *estructura geométrica* si M admite una métrica localmente homogénea completa.

Cualquier espacio recubridor $\tilde{M}$ de una variedad localmente homogénea M hereda una métrica natural tal que la proyección natural $p : \tilde{M} \rightarrow M$ es localmente una isometría. En consecuencia, si M admite una estructura geométrica, entonces el *recubrimiento universal* X de M hereda una estructura de *espacio completo localmente homogéneo*.

Como consecuencia de un Teorema de Singer (1960), una métrica sobre un espacio simplemente conexo (el espacio recubridor universal, p.e.) es homogénea, es decir, el grupo $Isom(X)$ de isometrías de X actúa de forma transitiva. Por consiguiente, el par $(X, Isom(X))$ define una geometría en el sentido de Klein (1873) y podemos decir que M admite una estructura geométrica modelada sobre X .

Teorema (Thurston).- Hay exactamente 8 geometrías 3D

Sin embargo, hay muchas variedades cerradas 3D que no poseen estructura geométrica en el sentido de Thurston. Por ejemplo, la única suma conexa de variedades cerradas que admite estructura geométrica es $\mathbb{P}^3 \# \mathbb{P}^3$. Sin embargo, si restringimos el tipo de variedades la situación es más favorable y, en cierto modo, similar al caso 2D:

Conjetura de Geometrización (Thurston).- Sea M una variedad 3D compacta orientable verificando que podemos

- cortar M por esferas 2D y toros 2D disjuntos en trozos N_i
- pegar bolas 3D a las esferas borde $\mathbb{S}^2$

Entonces M admite una estructura geométrica en el sentido de Thurston a la que llamaremos *T-estructura*)

Notas y comentarios adicionales

- La conjetura de Poincaré (ahora Teorema de Perelman) es un caso particular de la Conjetura de Geometrización de Thurston.

- La Conjetura de Geometrización de Thurston es cierta para las variedades de Haken (ver Mateev, 2010, para más detalles y extensiones recientes)

Las relaciones entre los aspectos algebraicos, analíticos, geométricos y topológicos para el caso tridimensional presentan aún un estado bastante más sofisticado que el caso de superficies. Aunque el caso complejo sea “más fácil” que el caso real, actualmente, se tienen más cuestiones difíciles abiertas que respuestas dentro del Programa de Geometrización propuesto por Thurston (ver módulo V para más detalles). Por ello, la sección siguiente está dedicada a explorar buena parte de estas relaciones para el caso mejor conocido que corresponde a las curvas proyectivas planas ó su versión topológica dada por las superficies de Riemann, cuya clasificación se ha presentado más arriba.

3. Invariantes Globales y Recubrimiento de Superficies (TTA)

Advertencia previa: Toda esta sección se debe entender como una propuesta para un trabajo teórico adicional (TTA). La unificación entre diferentes aspectos topológicos relacionados con espacios recubridores y Grupos discretos sigue el esquema propuestos por Katok (2010); otras referencias se indican en cada apartado.

Una motivación externa a los desarrollos matemáticos que se presentan en estas notas es el “reconocimiento de formas” a partir de las apariencias; esta motivación tiene un gran interés para áreas muy activas tanto de la Visión Computacional como del modelado 3D eventualmente dinámico, es decir, asociado a “modelos deformables”. La cuestión crucial consiste en especificar el tipo de deformaciones que se permiten para comparar diferentes objetos.

Una observación inicial importante consiste en que la clasificación topológica (por la orientabilidad y el número de asas) no permite discriminar entre objetos con apariencias muy diferentes (una bola topológica y un mamífero con todos los agujeros cerrados, p.e.). En otras palabras, el género g (número de agujeros) no es suficiente. Es necesario introducir herramientas intermedias “más finas” que permitan discriminar entre objetos con un aspecto diferente. El enfoque adoptado en esta sección está relacionado de diferentes maneras con la Geometría Conforme como intermedia entre la Geometría Riemanniana (la conservación de la métrica ds^2 es demasiado estricta) y la Topología General (demasiado laxa para facilitar la discriminación).

La clasificación de C^r -objetos (variedades X y morfismos, p.e.) depende del grupo G de transformaciones utilizado para comparar C^r -objetos. En el programa de Erlangen de F.Klein (1873), G es un grupo clásico (subgrupo de un grupo lineal) y X una estructura (euclídea, afín, proyectiva, típicamente) superpuesta a un espacio lineal; el análisis de esta situación muestra la equivalencia entre la clasificación de geometrías lineales y la de grupos clásicos, incluyendo la consideración de las geometrías simpléctica y de contacto asociadas a la Mecánica Analítica Lagrangiana ó Legendriana, respectivamente, y las jerarquías naturales entre las diferentes geometrías. El paso siguiente consiste en extender este esquema al caso de grupos continuos de C^r -transformaciones para $r = 0$ (caso continuo propio de la Topología General), $r = \infty$ (caso suave propio de la Geometría Diferencial), $r = \omega$ (caso analítico propio de la Geometría Analítica) y $r = alg$ (caso polinomial/racional propio de la Geometría Algebraica).

El enfoque topológico permite agrupar todos estos casos en el estudio de pares (X, G) donde X es un espacio topológico y G un grupo de transformaciones que actúa (via $a : G \times X \rightarrow X$) sobre el espacio original X . Dos puntos de vista complementarios consisten en añadir condiciones sobre X (como C^r -variedad) ó bien superponer estructuras adicionales sobre X que se comentan a continuación

- Las condiciones inicialmente introducidas sobre X son de tipo analítico (las de tipo algebraico son una reducción polinomial de las analíticas para el caso convergente). El primer caso no trivial corresponde al estudio de superficies (modelos de curvas complejas) sobre las que podemos considerar diferentes C^r -estructuras con casos extremos como el topológico $r = 0$ ó el analítico $r = \omega$ que puede ser considerado como suave a trozos. El estudio de este caso es el objetivo central de esta sección. El caso suave proporciona el soporte para introducir una métrica riemanniana ds^2 y considerar las

transformaciones de (M, ds^2) que dejan invariante la métrica (isometrías), cuestión que se aborda en la Geometría Diferencial de Variedades. Un caso intermedio entre el caso topológico (clasificación módulo homeomorfismos) y el caso diferenciable (clasificación módulo isometrías) está dado por las transformaciones conformes, es decir, por las transformaciones que conservan los ángulos.

- Estructuras adicionales localmente triviales verificando condiciones de compatibilidad que se formulan en términos de fibrados vectoriales, fibraciones topológicas ó (pre)haces según un orden decreciente en lo que se refiere a condiciones de "rigidez". El caso más simple corresponde a fibrados vectoriales $\xi(E, p, X, F, G)$ sobre X con fibra F y grupo estructural G . Para un fibrado vectorial la fibra genérica F es isomorfa a un espacio vectorial $V_{\mathbb{R}}$, por lo que el enfoque de Klein se traslada de forma natural a este caso. Cuando la fibra es un espacio discreto (caso de los espacios recubridores), interesa realizar un estudio unificado de (las representaciones de) el grupo de las transformaciones de la fibra F (grupo de monodromía). En este caso la clasificación topológica se lleva a la clasificación de los espacios recubridores y de (los subgrupos discretos de) el grupo de homotopía de la fibra.

Un estudio detallado de ambas extensiones está fuera del alcance de un curso introductorio como el presentado en estas notas. Por ello, nos restringimos al caso de superficies compactas conexas (modelos reales de las curvas algebraicas proyectivas planas, típicamente). En este caso, aparecen interesantes relaciones entre las estructuras conformes que podemos superponer a las superficies y el estudio de los subgrupos de las transformaciones que actúan sobre las fibras del espacio recubridor (eventualmente universal) de la superficie compacta. La clave para identificar las relaciones más profundas entre ambas cuestiones está asociada a la introducción de la Geometría Conforme que da lugar a teselaciones (asociadas a subgrupos discretos de $SL(2; \mathbb{R})$).

El resultado analítico inicialmente más significativo es Teorema (Riemann) según el cual cualquier disco topológico se puede aplicar de manera conforme sobre el disco unidad $\mathbb{S}^2$; la formulación clásica lo enuncia para cualquier superficie simplemente conexa con un borde simple. En la construcción original esta transformación se realizaba en términos de funciones analíticas modulo las transformaciones fraccionarias que son una representación de los elementos del grupo especial lineal del plano $SL(2; \mathbb{R})$. La composición de transformaciones conformes permite relacionar diferentes superficies de Riemann, extendiendo los resultados ya conocidos para el plano complejo. La introducción de diferenciales holomorfas ("derivadas" de las funciones analíticas verificando las condiciones de Cauchy-Riemann) permiten construir "desplazamientos infinitesimales" sobre la superficie de Riemann. De la misma forma que la integración de campos vectoriales genera homeomorfismos locales (Geometría Diferencial), la integración de las diferenciales holomorfas genera aplicaciones conformes sobre una superficie de Riemann que se pueden visualizar en términos de mapas de cuadriláteros curvados sobre las superficies.

El esquema descrito se completa con la información asociada a los espacios recubridores gracias al Teorema de Uniformización (Riemann): Cualquier superficie de Riemann puede ser aplicada de manera conforme sobre la esfera unidad, el plano euclídeo ó el espacio hiperbólico. Desde el punto de vista métrico (Geometría

Diferencial Riemanniana para el modelo real de superficies asociado a las curvas proyectivas complejas), cualquier superficie compacta de Riemann tiene curvatura total constante con respecto a la métrica riemanniana que es igual a $+1$ (Geometría Esférica), 0 (Geometría Euclídea) ó -1 (Geometría Hiperbólica). Esta clasificación se corresponde con el número de "asas" que tiene una superficie compacta igual a 0 (esfera), 1 (toro con la geometría plana inducida sobre el rectángulo) ó $g > 1$ (diferentes modelos hiperbólicos todos ellos equivalentes entre sí desde el punto de vista conforme). En todos estos casos, la teselación del modelo planar se obtiene a partir de la replicación de un modelo básico como un paralelogramo (para el caso $g = 1$ para la Geometría Euclídea, eventualmente sobre el toro), un octógono (para el caso $g = 2$ para la geometría hiperbólica) y así sucesivamente.

Cuestión.- ¿Cuál es el dominio fundamental para $g = 0$ (Geometría Esférica)?.

En lugar de adoptar el enfoque analítico (Riemann) ó algebraico (grupo conforme), se adopta un enfoque topológico de tipo global asociado a invariantes globales de los recubrimientos. En la primera subsección se calcula el grupo fundamental de superficies compactas para recubrimientos no-ramificados, se muestra cómo aplicarlo para identificar restricciones a los espacios recubridores de superficies y se analiza el comportamiento de la característica de Euler-Poincaré por la correspondiente aplicación recubridora.

Por el contrario, en las subsecciones siguientes se aborda el estudio de los recubrimientos ramificados de superficies, un tópico procedente del análisis complejo y de las curvas algebraicas (incluyendo teoría de modulo), pero que ha encontrado recientes aplicaciones y desarrollos adicionales en relación con la teoría de Gromov-Witten (para más detalles ver introducción a la sección sobre Riemann-Hurwitz).

3.1. Comportamiento de la característica de Euler-Poincaré. Dado un recubrimiento $M \rightarrow N$ entre superficies, en esta subsección se muestra cómo están relacionadas las características de Euler-Poincaré de X y de N con el número de hojas del recubrimiento p . De una forma más explícita se tiene el resultado siguiente:

3.1.1. Teorema. Para cualquier recubrimiento $p : M \rightarrow N$ de d hojas de la superficie compacta N por la superficie compacta M , las características de Euler de las superficies están relacionadas mediante

$$\chi(N) = d \chi(M)$$

Demostración:

Este resultado se puede demostrar de diferentes formas usando técnicas básicas de Geometría Algebraica (ver Hartshorne, 1977), Teoría de la Intersección (Ver Fulton, 1984, Cap.3), Topología Diferencial (ver Cap.IV del Curso de Geometría Enumerativa, p.e.) ó Superficies de Riemann (Ver Farkas y Kra). La demostración que se presenta en este apartado es más simple y utiliza sólo algunas propiedades básicas de triangulaciones para superficies, lo cual no restringe generalidad al argumento, tal y como veremos en el bloque II.

Denotemos mediante $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$ un recubrimiento de la variedad N por entornos cuyas imágenes inversas consisten en d conjuntos disjuntos que se aplican homeomórficamente sobre el correspondiente abiertos U_i . Consideremos una

triangulación $\mathcal{T}(N)$ de N y realicemos subdivisiones baricéntricas hasta que cada 2-símplice esté contenido en uno de los U_i . Calculamos la imagen recíproca $p^{-1}(\mathcal{T})(N)$ via p , para obtener una triangulación sobre M . Entonces la imagen inversa de cada 2-símplice de N consiste en d símlices $2D$, por lo que se tiene

$$\chi(M) = V_M - E_M + F_M = dV_M - dE_M + dF_M = d(V_M - E_M + F_M) = d\chi(N),$$
 donde V , E y F (con subíndices) se refieren al número de vértices, aristas y caras de la correspondiente superficie.

3.1.2. Ejemplo: Una obstrucción topológica al recubrimiento. No existe ningún recubrimiento de la superficie compacta $M_4^{(2)}$ de género 4 por la superficie $M_6^{(2)}$ de género 6.

Verificación: La característica de E.P. de $M_{(4)}^{(2)}$ es -6 , mientras que la característica de E.P. de $M_{(6)}^{(2)}$ es -10 , y -6 no divide a -10 .

3.1.3. Ejercicio básico (obstrucciones al recubrimiento). *Cuestión.-* ¿Es posible recubrir una superficie $M_7^{(2)}$ de género 7 por una superficie $M_5^{(2)}$ de género 5?

Nótese que si $2 - 2g_2 = d(2 - 2g_1)$ para algún d , implica que

$$g_2 = d(g_1 - 1) + 1$$

es decir, los recubrimientos de una superficie de Riemann por otra se encuentran localizados a lo largo de una recta en el plano (g_1, g_2) . En particular, el toro $\mathbb{T}^2$ (con $g_1 = 1$) sólo admite recubrimientos triviales, mientras que para la suma conexa de dos toros $g_2 = 2$, podemos encontrar recubrimientos ramificados de cualquier número de hojas. Esta propiedad elemental introduce propiedades interesantes en relación con propiedades algebraicas de funciones hiperelípticas que se abordan en la subsección siguiente.

3.1.4. Ejercicio avanzado: Recubrimientos de grafos. Para terminar esta subsección se propone un ejercicio práctico relacionado con restricciones relativas a recubrimientos de grafos:

- Introducir la noción de género de un grafo *à la Riemann* (número de cortes que es necesario realizar para convertirlo en un espacio topológico simplemente conexo borrando aristas que mantengan la conectividad del grafo).
- Definir y calcular la característica de E.P. de un grafo. Demostrar que la característica de E.P. no depende de las aristas que se supriman para convertirlo en un grafo simplemente conexo.
- Enunciar y demostrar un teorema para las características de un recubrimiento $p: \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_1$ de grafos

La segmentación por color de una imagen digital se puede representar mediante un grafo orientado (ver más arriba). En este contexto, la segmentación por regiones de una secuencia de video es una colección de grafos orientados. La aparición de objetos nuevos ó de cambios en la localización de objetos presentes en diferentes frames f_t , $f_{t'}$ se representa mediante transformaciones en el grafo. Realizar un

modelado en términos de los grafos $\mathcal{G}_t$ y $\mathcal{G}_{t'}$ asociados al intercambio en la localización relativa entre dos ó más blobs (correspondientes a personas, p.e.) en los grafos $\mathcal{G}_t$ asociados a la segmentación en regiones por color en diferentes frames correspondientes a instantes t, t' .

3.2. Espacios recubridores y Grupos discretos sobre superficies. En esta subsección se describen algunas propiedades elementales de las superficies que recubren una superficie de género dado. Interesa especialmente recuperar el enfoque basado en acciones de grupos discretos G que permite visualizar el comportamiento de funciones ó de propiedades algebraicas a partir del estudio de una órbita por la acción de G .

3.2.1. Un ejemplo avanzado. La superficie $M_9^{(2)}$ de género 9 es el recubrimiento cuádruple de la la superficie $M_3^{(2)}$ de género 3. Nótese que $M_9^{(2)}$ tiene una $\mathbb{Z}_4$ -simetría rotacional que se puede considerar como una acción normal de $\mathbb{Z}_4$ sobre $M_9^{(2)}$. El $\mathbb{Z}_4$ -espacio cociente es $M_3^{(2)}$.

3.2.2. Ejercicio: Recubrimientos. Construir un recubrimiento $p : X \rightarrow B$ de d hojas de la superficie orientable $M_k^{(2)}$ de género k por una superficie $M_{d(k-1)+1}^{(2)}$ de género $d(k-1)+1$, especificando la acción del correspondiente grupo normal (*Indicación:* Generalizar el ejemplo precedente).

3.2.3. Restricciones globales para recubrimientos. Teorema.- Una superficie compacta orientable M recubre una superficie compacta orientable N , si y sólo si la característica de Euler $\chi(N)$ de N divide a la característica de Euler $\chi(M)$ de M

Demostración: Si $\chi(N)$ no divide a $\chi(M)$, entonces M no puede recubrir a N (ver más arriba), lo cual demuestra la condición necesaria del teorema. Para demostrar la condición suficiente, supongamos que $\chi(M) = d\chi(N)$. Como la característica de Euler-Poincaré de una superficie de género g se expresa en términos del género como $\chi = 2 - 2g$, se tiene que

$$d(2 - 2g_N) = 2 - 2g_M \Rightarrow g_M = dg_N - d + 1$$

(usando el ejercicio previo al teorema), lo cual completa la demostración del teorema.

3.3. Ejercicios.

3.3.1. Recubrimientos de superficies no-orientables por no-orientables. Describe todos los posibles recubrimientos de superficies *no-orientables* por superficies *no-orientables*.

3.3.2. Recubrimientos de superficies orientables por no-orientables. Describe todos los posibles recubrimientos de superficies *orientables* por superficies *no-orientables*.

4. Recubrimientos ramificados de superficies (TTA)

Toda esta sección se debe entender como una propuesta para un trabajo teórico adicional (TTA)

El propósito fundamental de esta sección es comprender los aspectos topológicos relacionados con recubrimientos entre variedades de la misma dimensión. En este caso, se supone que topología de los espacios es no-trivial (a diferencia del caso del espacio recubridor universal). El resultado fundamental es el Teorema de Riemann-Hurwitz que sólo se considera para el caso de superficies de Riemann asociadas a dos curvas algebraicas. Esta aproximación topológica es complementaria de la que habitualmente se presenta en los libros de Geometría Algebraica ²

4.1. Nociones básicas.

4.1.1. *Recubrimiento entre superficies.* Para empezar recordemos algunas definiciones:

Denotemos mediante $M^{(2)}$ y $N^{(2)}$ dos variedades compactas. Una aplicación $p : M^{(2)} \rightarrow N^{(2)}$ es un recubrimiento con fibra F (espacio discreto) si para cada $x \in N^{(2)}$ existe un abierto U y un homeomorfismo $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tal que la restricción de p a $p^{-1}(U)$ coincide con la aplicación $p_1 \circ \varphi$ donde $p_1 : U \times F \rightarrow U$ es la proyección sobre la primera componente. Con esta notación, se dice que $M^{(2)}$ es una variedad ó un espacio recubridor y que $N^{(2)}$ es el espacio base; si la fibra F consiste en d puntos se dice que la aplicación recubridora p tiene d hojas ó que es d -multiple.

Ejercicio.- En este ejercicio se describen propiedades relativas a recubrimientos no ramificados:

- Sea $p : M_g^{(2)} \rightarrow N_h^{(2)}$ un recubrimiento de la esfera con h asas por la esfera de g asas. Demuestra que $g - 1$ es divisible por $h - 1$
- Supongamos que $g, h \geq 2$ y que $g - 1$ es divisible por $h - 1$. Verifica que existe un recubrimiento $p : M_g^{(2)} \rightarrow N_h^{(2)}$

4.1.2. *Recubrimiento ramificado.* Diremos que una aplicación continua $p : M^{(2)} \rightarrow N^{(2)}$ es un *recubrimiento ramificado entre superficies* si existe un conjunto finito de puntos $x_1, \dots, x_n \in N^{(2)}$ tal que

- el conjunto $p^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})$ es discreto
- la restricción de p al conjunto $M^{(2)} - p^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})$ es un recubrimiento.

Los puntos $x_1, \dots, x_n \in N^{(2)}$ son los *puntos de ramificación* de p y al conjunto de puntos de ramificación se le denota mediante $Ram(p)$ (en algunas ocasiones, mediante B_p)

A continuación se muestra algunos ejemplos de recubrimientos ramificados que ilustran asimismo el comportamiento en torno a los puntos de ramificación.

²Para detalles del enfoque algebraico ver [Har77]. Para extensiones relativos a dimensión superior ver el capítulo 4 del módulo IV de mis apuntes sobre Geometría Enumerativa.

4.1.3. *Recubrimientos del disco.* Sea $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ y denotemos mediante $p : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ la aplicación dada por $p(z) = z^m$. Entonces, p es un recubrimiento ramificado de m hojas con un único punto de ramificación en $z = 0$.

Nótese que para $n \neq m$, el recubrimiento dado por $p_n(z) = z^n$ sobre un disco abierto suficientemente pequeño U de un punto de ramificación proporciona una unión $p_n^{-1}(U)$ de n abiertos con una estructura diferente a la correspondiente a $p_m^{-1}(U)$.

4.1.4. *Algunas propiedades elementales.*

- Para un pequeño entorno de $x \in \text{Ram}(p)$ la aplicación recubridora es equivalente a la aplicación $z \mapsto z^m$ y decimos que $\text{ind}_x(p) = m$
- Para cualquier recubrimiento ramificado de n hojas la suma de los índices de ramificación en todas las imágenes recíprocas de cualquier punto de ramificación es igual a n

4.1.5. *Recubrimientos del disco con Ramificación prefijada.* En este apartado se describen propiedades que permiten construir recubrimientos ramificados del disco abierto (de hecho el conjunto abierto cuyo borde es una elipse) por el anillo abierto.

Proposición.- Consideremos la aplicación $f : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = 2(z + 1/z)$. Esta aplicación es un recubrimiento ramificado doble con puntos de ramificación ± 4 . Las imágenes recíprocas de dichos puntos son ± 1 y el índice de ramificación es 2

Demostración: La ecuación $2(z + 1/z) = c$ es cuadrática. Su discriminante $\Delta = \frac{c^2}{4} - 4$ se anula si y solo si $c = \pm 4$ que corresponde al valor tomado por f cuando $z = \pm 1$

Proposición.- Denotemos mediante p la restricción de $f : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = 2(z + 1/z)$ a la corona circular $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < 2\}$. Si $z = \rho e^{i\varphi}$, entonces se tiene

$$p(z) = 2\frac{\rho+1}{\rho}\cos \varphi + i\frac{\rho-1}{\rho}\sin \varphi$$

por lo que la imagen de la corona circular C es el conjunto de puntos localizados en el interior de la elipse

$$\rho = \{5\cos \varphi + 3i\sin \varphi \mid 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

Alternativamente, una *descripción geométrica* de p es la siguiente: Imaginemos la corona C como una esfera con dos asas (discos cerrados) y un eje de simetría ℓ . Identificamos los puntos de C simétricos con respecto al eje ℓ . El espacio resultante es homeomorfo al disco abierto $\mathbb{D}^2$. La aplicación de paso al cociente $p : C \rightarrow \mathbb{D}^2$ así construida es un recubrimiento doble que está ramificado en dos puntos que corresponden a los puntos de intersección del eje de simetría ℓ con la esfera.

Ejercicio.- Demuestra que si la variedad base $M^{(2)}$ de un recubrimiento ramificado $p : N^{(2)} \rightarrow M^{(2)}$ es *orientable*, entonces también lo es la variedad recubridora $N^{(2)}$

4.2. Recubrimientos de la esfera con g asas. *Teorema.-* Sea $M_g^{(2)}$ la esfera con g asas. Entonces, existe un recubrimiento ramificado $p : M^{(2)} \rightarrow \mathbb{S}^2$

4.2.1. Primera demostración. Consideremos una copia de la esfera $\mathbb{S}^2$ con g asas con un eje de simetría ℓ . Identifiquemos todos los pares de puntos que son simétricos con respecto al eje ℓ . El espacio cociente que resulta de dicha identificación es (homeomorfo a) la esfera ordinaria $\mathbb{S}^2$. Con esta notación, la proyección natural $p : M_g^{(2)} \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un recubrimiento doble que ramifica en $2g + 2$ puntos.

4.2.2. Segunda demostración. Consideremos una triangulación de la variedad $M_g^{(2)}$, es decir, $M_g^{(2)}$ se descompone en triángulos (curvilíneos), de modo que dos cualesquiera de ellos tienen una arista ó un vértice común, o bien su intersección es vacía. Denotemos mediante $A_1, \dots, A_n$ a los vértices de la triangulación. Sobre la esfera $\mathbb{S}^2$ elegimos n puntos $B_1, \dots, B_n$ que podemos suponer en posición general en el sentido siguiente: no hay tres de ellos sobre un círculo máximo y ningún para es antipodal. Entonces, cualquier terna de puntos B_i, B_j, B_k determina de forma única un triángulo esférico que denotamos mediante Δ_1 . Supongamos que Δ_2 es el cierre del complementario $\mathbb{S}^2 \setminus \Delta_1$. Entonces, Δ_2 es también homeomorfo al triángulo. En consecuencia, existen homeomorfismos

$$f_1 : \langle A_i A_j A_k \rangle \rightarrow \Delta_1 \quad , \quad f_2 : \langle A_i A_j A_k \rangle \rightarrow \Delta_2$$

que son lineales en el sentido siguiente: Podemos suponer que la longitud de una curva está definida sobre $M_g^{(2)}$ y sobre $\mathbb{S}^2$; se requiere que un punto arbitrario X divida al arco $A_p A_q$ con la misma ratio que $f_r(X)$ divide al arco $B_p B_q$ para $r = 1, 2$.

Para verificarlo, fijemos orientaciones sobre las superficies $M_g^{(2)}$ y $\mathbb{S}^2$. Las orientaciones de los triángulos $A_i A_j A_k$ y $B_i B_j B_k$ inducidas por la colección ordenada de vértices puede coincidir ó ser la opuesta a la de $M_g^{(2)}$ y $\mathbb{S}^2$.

- Si ambas orientaciones coinciden ó ambas son opuestas, entonces aplicamos el triángulo $A_i A_j A_k$ sobre $\Delta_1 = B_i B_j B_k$ mediante el homeomorfismo f_1 .
- Si una orientación coincide y la otra no, entonces aplicamos el triángulo $A_i A_j A_k$ sobre Δ_2 , el complementario de $B_i B_j B_k$ mediante el homeomorfismo f_2 .

Extendiendo estas aplicaciones a todos los triángulo de las triangulaciones de $M_g^{(2)}$, se obtiene una aplicación: $f : M_g^{(2)} \rightarrow \mathbb{S}^2$. Veamos que dicha aplicación es un recubrimiento ramificado:

Para cada punto interior x_0 del triángulo $A_i A_j A_k$ existe un entorno $U(x_0)$ que se aplica homeomórficamente sobre su image. Veamos que la misma propiedad es cierta no sólo para los puntos interiores de los triángulos, sino también para los puntos interiores de sus aristas: Efectivamente, consideremos la arista $A_i A_j$ común a los triángulos $A_i A_j A_k$ y $A_i A_j A_\ell$.

La circunferencia máxima de la esfera $\mathbb{S}^2$ que pasa por los puntos B_i y B_j puede separar ó no los puntos B_k y B_ℓ :

- Si los separa, hemos utilizado las aplicaciones f_1 y f_1 (la misma orientación) ó las aplicaciones f_2 y f_2 (ambas con orientaciones opuestas)

- Si los separa, hemos utilizado las aplicaciones f_1 y f_2 ó bien las aplicaciones f_2 y f_1 .

En cualquier caso, un entorno suficientemente pequeño de un punto elegido dentro de la arista $A_i A_j$ se aplica de forma biyectiva (y por tanto, homeomórficamente) sobre su propia imagen. En consecuencia, para todos los puntos, excepto quizás para los vértices $A_1, \dots, A_n$, se tiene un recubrimiento, por lo que f es un recubrimiento ramificado.

De hecho, no todos los puntos $B_1, \dots, B_n$ son necesariamente puntos de ramificación, aunque algunos de ellos deben serlo cuando el género topológico $g > 0$. Por ello, una cuestión natural es cuántos puntos B_i son puntos de ramificación. En el apartado siguiente se muestra una respuesta que sorprendentemente, no depende de g .

4.2.3. Prefijando la ramificación. Teorema.- Denotemos mediante $M_g^{(2)}$ a la esfera con g asas, donde $g \geq 1$. Entonces, existe un recubrimiento ramificado $p : M_g^{(2)} \rightarrow \mathbb{S}^2$ con *exactamente tres puntos de ramificación*

Demostración.- Elegimos una triangulación arbitraria de la superficie $M_g^{(2)}$ y tomemos su subdivisión baricéntrica. Subdividimos cada triángulo en 6 triángulos tomando sus 3 medianas. Asignamos los números 0, 1 y 2 a los vértices de la subdivisión baricéntrica de la forma siguiente:

- 0 para los vértices de la triangulación inicial;
- 1 para los puntos medios de los lados;
- 2 para los baricentros de los triángulos.

Si la orientación de algún triángulo 012 inducida por el orden de vértices coincide con la de la superficie $M_g^{(2)}$, entonces coloreamos al triángulo de negro y, en caso contrario, de blanco. Podemos considerar a la esfera $\mathbb{S}^2$ como la unión de dos triángulos pegado a lo largo de sus lados. Denotemos a sus vértices mediante $0'$, $1'$ y $2'$; pintamos de negro a uno de sus triángulos y dejamos a los otros en blanco. Aplicamos cada triángulo 012 obtenido a partir de la subdivisión baricéntrica realizada en $M_g^{(2)}$ en el triángulo $0'1'2'$ en la esfera ordinaria $\mathbb{S}^2$, y cada triángulo en negro en $0'1'2'$. La aplicación así obtenida es ramificada con $0'$, $1'$ y $2'$ como puntos de ramificación.

4.3. Teorema de Riemann-Hurwitz (TTA). En esta subsección se lleva a cabo una introducción histórica al problema de recubrimientos entre variedades de la misma dimensión. A continuación, se muestra una relación fundamental entre las propiedades topológicas de las variedades base y espacio recubridor asociadas a un recubrimiento ramificado en términos de los índices de ramificación. La herramienta fundamental es la característica de E.P. para la que se repasan algunas de sus propiedades básicas que enunciamos como ejercicios.

El marco conceptual adoptado está asociado a triangulaciones K' que proceden de una *subdivisión de la triangulación* K , es decir, cada símplice de K es unión de símplices de K' . Esta idea proporciona una conexión estructural con el enfoque simplicial que se explota de forma sistemática en la parte dle Homología dle módulo II.

El resultado fundamental de esta sección es el Teorema de Riemann-Hurwitz relativo a recubrimientos ramificados entre curvas algebraicas o entre las superficies de Riemann asociadas.

4.3.1. Una historia reciente del problema. La formulación original de Riemann-Hurwitz permite relacionar la topología global de un espacio recubridor E de una curva compleja $\mathcal{C}$ (ó de la superficie de Riemann asociada) con los datos extrínsecos de la curva a través de características globales del lugar de ramificación $Ram(f)$. Esta es una de las motivaciones inicialmente más importantes para el desarrollo de la Geometría Enumerativa. En sus comienzos, la Geometría Enumerativa trata de encontrar el número exacto de soluciones que tienen los problemas de Geometría Algebraica con un número finito de soluciones; si no hubiera soluciones degeneradas, el Teorema de Bézout da dicho número, pero en general las soluciones degeneradas que deben ser contadas "propiaamente" (con su multiplicidad). En términos topológicos, dicho número es el grado de una aplicación que puede cambiar dependiendo del solapamiento de soluciones (ramificación), excluyendo habitualmente las soluciones singulares. Para llevar a cabo este cálculo hay que

- construir espacios regulares $\tilde{X}$ (es decir, no singulares) sobre los espacios X (habitualmente singulares) que son solución del problema algebraico, lo cual requiere describir diferentes estrategias de desingularización;
- describir la aplicación recubridora $p : \tilde{X} \rightarrow X$ entre ambos espacios (compuesta habitualmente de contracciones y explosiones);
- relacionar los invariantes globales de la fibración asociada a p en términos de la topología de los espacios y de la fibra (Riemann-Hurwitz).

En este punto hay diferentes problemas que afectan tanto a la existencia de diferentes espacios-aplicaciones recubridoras, sino a la "elevación" de caminos de X a $\tilde{X}$ (originalmente, se trataba de justificar el "principio de degeneración", una especie de paso al límite sobre un espacio cuya topología no está bien descrita inicialmente). El segundo problema trata nuevamente de resolver cómo "pegar curvas", teniendo en cuenta que las soluciones pueden ser multivaloradas.

La teoría de Gromov-Witten muestra resultados que facilitan el "pegado" de curvas sobre (compactificaciones de) espacios de moduli. Tal y como se comentó al principio de la sección anterior, la teoría de Gromov-Witten ha desarrollado interesantes aplicaciones en relación con cuestiones de gran unificación en el marco

de la Teoría de Cuerdas que se ha desarrollado para tratar de resolver la unificación entre Relatividad General y Mecánica Cuántica

Intuitivamente, según el modelado de cuerdas, cuando una partícula (como cuerda) viaja en el espacio-tiempo, recorre una “hoja mundo” de la cuerda. El espacio de moduli (clases de equivalencia de objetos que extienden los M_g^2) es ∞ -dimensional y, actualmente, se desconoce una “métrica natural” sobre este espacio. En particular y a diferencia del enfoque iniciado por los trabajos de Riemann (1856), ni siquiera se tiene una definición rigurosa de períodos ó de integrales definidas sobre lazos en dicho espacio. Para tratar de abordar este problema, se introduce una variedad simpléctica $6D$ en el espacio-tiempo en el que las “hojas mundo” están parametrizadas por curvas pseudo-holomorfas (McDuff, 2004).

Las integrales sobre los espacios de moduli (invariantes de Gromov-Witten de dimensión finita) son integrales de caminos en el sentido de la teoría clásica (Riemann), por lo que se puede aplicar la aproximación homotópica aunque sobre un espacio $\overline{\mathcal{M}}_g$ (hay varios candidatos para la compactificación del espacio de moduli) con una geometría bastante complicada. Para empezar es necesario controlar la ramificación de las aplicaciones definidas sobre los espacios de moduli.

4.3.2. Invariancia de $E.P.$ por subdivisiones. Diremos que K_1 y K_2 son *triangulaciones transversales* de una variedad 2-dimensional M si sus aristas se cortan transversalmente en un número finito de puntos. Una aplicación de los argumentos de transversalidad del “traslado general” (consecuencia de la densidad de aplicaciones transversales) permite garantizar que mediante un “pequeño movimiento” se puede conseguir que dos triangulaciones sean siempre transversales (para una fundamentación general desde el punto de vista topológico ver Hirsch, 197?, y para una formulación algebraica ver Kleiman, 198?).

- La característica de Euler-Poincaré de una 2-variedad M no cambia cuando se realiza una subdivisión de la triangulación.
- Dos triangulaciones transversales de una 2-variedad tiene una subdivisión común.
- La característica de Euler-Poincaré de una 2-variedad M es independiente de la triangulación elegida.

4.3.3. Separación y pegado.

- Supongamos que una superficie M se separa en dos componentes A y B por una circunferencia. En este caso, demostrar que

$$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B)$$

- Demostrar que si la superficie M se puede obtener a partir de la superficie F añadiendo un asa, entonces $\chi(M) = \chi(F) - 2$
- Demostrar que si $M_{2g}^{(2)}$ es la esfera con g asas, entonces $\chi(M_{2g}^{(2)}) = 2 - 2g$.

Conclusión: El tipo topológico de una 2-variedad compacta orientada sin borde está determinado por su característica de Euler-Poincaré.

4.3.4. Teorema de Riemann -Hurwitz (versión topológica. Teorema (Riemann-Hurwitz).- Supongamos que $p : M^{(2)} \rightarrow N^{(2)}$ es un recubrimiento de n hojas entre 2 superficie

compactas con $y_1, \dots, y_\ell$ como preimágenes de los puntos de ramificación, siendo $d_1, \dots, d_\ell$ los correspondientes índice de ramificación,. Entonces

$$\chi(M^{(2)}) + \sum_{i=1}^{\ell} (d_i - 1) = n\chi(N^{(2)})$$

4.3.5. *Esquema de la demostración del teorema de Riemann-Hurwitz.* Empezamos recordando el caso de los recubrimientos no ramificados:

- Sea $p : M_g^{(2)} \rightarrow N_h^{(2)}$ un recubrimiento de la esfera con h asas por la esfera de g asas. Entonces $g - 1$ es divisible por $h - 1$
- Supongamos que $g, h \geq 2$ y que $g - 1$ es divisible por $h - 1$. Verificar que existe un recubrimiento $p : M_g^{(2)} \rightarrow N_h^{(2)}$

Renumerando los índice de ramificación, podemos suponer que $d_1, \dots, d_{a_1}$ son los índices de ramificación de las imágenes recíprocas primer punto de ramificación, $d : a_1 + 1, \dots, d_{a_1+a_2}$ son los índices de ramificación de todas las imágenes recíprocas del segundo punto de ramificación y así sucesivamente. Como

$$d_1 + \dots + d_{a_1} = d_{a_1+1} + \dots + d_{a_1+a_2} = \dots = n$$

se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\ell} (d_i - 1) = (n - a_1) + (n - a_2) + \dots = kn - a_1 - a_2 - \dots - a_k$$

donde k es el número de puntos de ramificación and a_i es el número de imágenes recíprocas del i -ésimo punto de ramificación. En consecuencia, la relación entre las características de E.P. se reescribe como

$$\chi(M^{(2)}) = n(\chi(N^{(2)}) - k) + a_1 + \dots + a_k$$

que proporciona una forma más apropiada para la demostración del Teorema de Riemann-Hurwitz.

Descomponemos las variedades $M^{(2)}$ y $N^{(2)}$ como sigue

$$M^{(2)} = A_M \cup B_M \quad , \quad N^{(2)} = A_N \cup B_N \quad ,$$

donde

- A_N es la unión de los cierres correspondientes a los discos de radio suficientemente pequeño para cada uno de los puntos de ramificación,
- $A_M := p^{-1}(A_N)$ es la imagen inversa de A_N ,
- $B_M := \overline{M^{(2)}} - A_M$ y $B_N := \overline{N^{(2)}} - A_N$ son los cierres de los complementarios de A_M y A_N , respectivamente.

Los conjuntos $A_M \cap B_M$ y $A_N \cap B_N$ son círculos que no se intersecan por lo que

$$\chi(M_2) = \chi(A_M) + \chi(B_M) \quad , \quad \chi(N_2) = \chi(A_N) + \chi(B_N)$$

Como la restricción de la aplicación p al conjunto B_M es un recubrimiento no-ramificado, se tiene

$$\chi(B_M) = n\chi(B_N)$$

Como, el conjunto A_N está compuesto por k discos, A_M consiste en $a_1 + \dots + a_k$ discos $\mathbb{D}_{r(\varepsilon)}^2$. Por consiguiente

$$\chi(A_M) = a_1 + \dots + a_k \quad , \quad \chi(A_N) = k$$

Combinando las relaciones anteriores se obtiene

$$\chi(M^{(2)}) = a_1 + \dots + a_k + n\chi(B_N) = a_1 + \dots + a_k + n(\chi(N^{(2)}) - k)$$

c.q.d.

4.4. Algunas aplicaciones. En esta subsección se comentan algunas aplicaciones básicas del Teorema de Riemann-Hurwitz (para otras aplicaciones más avanzadas ver notas del Curso de Geometría Enumerativa)

4.4.1. Existencia de recubrimientos ramificados. Más arriba se ha mostrado la existencia de un recubrimiento ramificado $p : M_g^{(2)} \rightarrow \mathbb{S}^2$ de la esfera con tres puntos de ramificación para $g \geq 1$. *Cuestión:* ¿Es posible disminuir este número de puntos de ramificación? La respuesta es negativa:

Proposición.- Si $g \geq 1$, entonces cualquier recubrimiento ramificado $p : M_g^{(2)} \rightarrow \mathbb{S}^2$ de la esfera por una superficie de género g tiene al menos tres puntos de ramificación

Demostración En virtud del teorema de Riemann-Hurwitz se tiene

$$2 - 2g = \chi(M_g^{(2)}) = n(\chi(\mathbb{S}^2) - k) + a_1 + \dots + a_k = n(2 - k) + a_1 + \dots + a_k$$

RPRA y supongamos que $k \leq 2$, entonces $n(2 - k) \geq 0$ por lo que

$$n(2 - k) + a_1 + \dots + a_k > 0$$

pues las relaciones $n(2 - k) = 0$ y $a_1 + \dots + a_k = 0$, (es decir $k = 0$), no pueden verificarse simultáneamente. Entonces, $2 - 2g > 0$, por lo que $g = 0$, en contra de la hipótesis. En consecuencia, $k > 2$.

Ejercicio.- Supongamos que $p : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ es un recubrimiento ramificado del disco $\mathbb{D}^2$ por el disco $\mathbb{D}^2$ con exactamente un punto de ramificación, Demostrar que la imagen recíproca del punto de ramificación consiste en un punto.

4.4.2. Género de curvas algebraicas complejas. La fórmula de Riemann-Hurwitz permite calcular el género de las curvas algebraicas en el plano complejo $\mathbb{CP}^2$. Empezamos con algunas nociones básicas: Una *curva algebraica de grado n* en $\mathbb{CP}^2$ está dada por

$$\mathcal{C}_F = \{(x, y, z) \in \mathbb{CP}^2 \mid F(x, y, z) = \sum_{i+j+k=n} a_{ij} x^i y^j z^{n-i-j} = 0\}$$

donde F es un polinomio homogéneo de grado n , es decir $F(\lambda p) = \lambda^n F(p)$. Cuando $z = 1$ y $x, y \in \mathbb{R}$ se obtiene una curva algebraica real C_F de uso común en la geometría analítica del plano.

Diremos que $\mathcal{C}_F \subset \mathbb{CP}^2$ es una *curva algebraica no singular* si el gradiente

$$\text{grad}(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

es no nulo $\forall \underline{p} = (x, y, z) \in \mathcal{C}$. Al conjunto de puntos en los que es nulo se le llama el *lugar singular*:

$$\text{Sing}(X) := \{ \underline{p} = (x, y, z) \in \mathcal{C} \mid \text{grad}(F)(\underline{p}) = 0 \}$$

Diremos que $\mathcal{C}_F \subset \mathbb{CP}^2$ es una *curva irreducible* si no se puede expresar como producto de dos polinomios homogéneos de grado más bajo. En caso contrario, diremos que es reducible y lo expresamos como

$$\mathcal{C}_F = \cup_{i=1}^r \mathcal{C}_{F_i}$$

donde $\mathcal{C}_{F_i}$ es el lugar de ceros del i -ésimo factor de $F = \prod_{i=1}^r F_i$. En el Curso sobre Curvas Algebraicas se demuestra que cualquier curva algebraica irreducible no-singular en el plano proyectivo complejo $\mathbb{CP}^2$ es homeomorfa a la esfera con g asas para algún $g \geq 0$. Al índice no-negativo g se le llama el *género topológico* de la curva $\mathcal{C}$

4.4.3. Curva de Fermat. Proposición La curva de Fermat $x^n + y^n + z^n = 0$ es de género $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

Demostración La curva de Fermat $\Gamma \subset \mathbb{CP}^2$ es no singular, pues

$$\text{grad} F = n(x^{n-1}, y^{n-1}, z^{n-1}) \neq 0 \quad \forall (x : y : z) \in \mathbb{CP}^2$$

Consideremos la aplicación proyección $p : \mathbb{CP}^2 - \{(0 : 0 : 1)\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ que lleva el punto $(x : y : z) \in \mathbb{CP}^2$ en $(x : y) \in \mathbb{CP}^1$. Como $(0 : 0 : 1) \notin \Gamma$, la proyección p induce la aplicación $p' : \Gamma \rightarrow \mathbb{CP}^1 = \mathbb{S}^2$. La imagen inversa del punto $(x_0 : y_0) \in \mathbb{CP}^1$ consiste en

$$p^{-1}(x_0 : y_0) = \{(x_0 : y_0 : z) \in \mathbb{CP}^2 \mid z^n = -(x_0^n + y_0^n)\}$$

Cuando $x_0^n + y_0^n \neq 0$, la imagen inversa consiste en n puntos, mientras que cuando $x_0^n + y_0^n = 0$, la imagen inversa consiste en sólo 1 punto. Por tanto, p' es un recubrimiento de n hojas que ramifica en los puntos $(1 : \varepsilon_n) \in \mathbb{CP}^1$, donde ε_n es una raíz de la unidad de grado n . Por consiguiente, existen n puntos de ramificación y la imagen inversa de cada uno de ellos es exactamente un punto. Aplicando el teorema de Riemann-Hurwitz se obtiene

$$\chi(\Gamma) = n(\chi(\mathbb{S}^2) - n) + n = n(2 - n) + n = -n^2 + 3n = n(3 - n)$$

En consecuencia,

$$g = \frac{1}{2}(2 - \chi(\Gamma)) = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

4.4.4. *Género de curvas hiperelípticas. Proposición* Sea P_n un polinomio de grado $n \geq 5$ sin raíces múltiples. Entonces la curva hiperelíptica $\mathcal{C}$ dada por $y^2 = P_n(x)$ tiene género

$$g(\mathcal{C}) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1$$

Nota Este enunciado es cierto asimismo cuando $n < 5$. Cuando $n = 3, 4$ se dice que la curva $y^2 = P_n(x)$ es *elíptica*.

Demostración: Supongamos que $P_n(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$. Entonces la curva hiperelíptica $\mathcal{C}$ está dada en $\mathbb{CP}^2$ por la ecuación

$$y^2 z^{n-2} = \sum_{k=0}^n a_k x^k z^{n-k}$$

Para la curva hiperelíptica $\mathcal{C}$, se tiene $\text{grad}(F) = 0$ en $(0 : 1 : 0) \in \mathcal{C}$, por lo que es singular en dicho punto. La asignación que a cada $(x : y : z) \in \mathbb{CP}^2$ le lleva en $(x : z) \in \mathbb{CP}^1$ define una proyección $p : \mathbb{CP}^2 - \{(0 : 1 : 0)\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Denotemos mediante

$$p' : \mathcal{C} - \{(0 : 1 : 0)\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$$

a la restricción de la proyección p . Veamos que para $x = 1$ la imagen recíproca de $(x : z)$ tiende al punto singular $(0 : 1 : 0) \in \mathcal{C}$ cuando $z \rightarrow 0$. En efecto, como $y^2 \simeq a_n z^{2-n} \rightarrow \infty$, por lo que

$$(1 : y : z) = \left(\frac{1}{y} : 1 : \frac{z}{y}\right) \rightarrow (0 : 1 : 0)$$

En consecuencia, la aplicación p' se puede extender a una aplicación de toda la curva: $p' : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{CP}^1$, haciendo $p'((0 : 1 : 0)) = (1 : 0)$.

Para encontrar la imagen inversa por p' del punto $(x_0 : z_0) \in \mathbb{CP}^1$ cuando $z_0 \rightarrow 0$, hay que resolver la ecuación

$$y^2 = z_0^2 + \sum_k a_k \left(\frac{x_0}{z_0}\right)^k = z^2 P_n\left(\frac{x_0}{z_0}\right)$$

Si x_0/z_0 no es una raíz del polinomio P_n , entonces la ecuación anterior tiene exactamente dos raíces. En consecuencia, la aplicación $p' : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ es un doble recubrimiento ramificado, con $(x_0 : z_0) \in \mathbb{CP}^1$ como puntos de ramificación (siendo x_0/z_0 una raíz de P_n) y, posiblemente, el punto $(1 : 0)$.

Veamos que $(1 : 0)$ es un punto de ramificación si, y sólo si, n es impar. Para demostrarlo, nótese que para z suficientemente pequeño la imagen recíproca del punto $(1 : z)$ consiste en los puntos de la forma $(1 : y : z)$, where $y^2 \simeq a_n z^{2-n}$. Hagamos $z = \rho e^{i\phi}$. Cuando ϕ varía de 0 a 2π , es decir, cuando se completa un lazo en torno a $(1 : 0) \in \mathbb{CP}^1$, el argument del punto $y \in \mathbb{C}$ cambia en

$$\frac{1}{2}(2-n)2\pi = (2-n)\pi$$

En consecuencia, para n impar, la coordenada y cambia de signo, es decir, "salta" de una rama a otra diferente, mientras que para n par, la coordenada y no cambia de signo, es decir, permanece en la misma rama. Por consiguiente, el número de

puntos de ramificación es $2[(n+1)/2]$. Sea g el género de la curva $\mathcal{C}$. Entonces, aplicando Riemann-Hurwitz se tiene que

$$2 - 2g = 2[2 - 2(\frac{n+1}{2})] + 2(\frac{n+1}{2}) \Rightarrow g = \frac{n+1}{2} - 1$$

5. Retos, Prácticas y Ejercicios

5.1. Retos. En esta subsección se presentan algunos tópicos de interés en relación con posibles extensiones de resultados mencionados en las secciones de este capítulo y otros anteriores. Por supuesto, la lista sólo es indicativa y puede ser ampliada con materiales que se presentan en módulos posteriores.

5.1.1. Pegado de grupos de homotopía. Actualmente, no se conoce ningún resultado general que permita “pegar” grupos de homotopía $\pi_k(U_i)$ de orden superior, es decir, para $k \geq 2$ para variedades X . Interesaría demostrar resultados de este tipo.

El caso relativo, es decir, la homotopía relativa $\pi_1(X, A)$ para los pares de espacios (X, A) es asimismo muy interesante. En este caso, $\pi_1(X, A)$ tiene estructura de grupoide, necesitándose dos puntos base para desarrollar una teoría similar. La estrategia basada en grafos asociados a las componentes conexas relativas para el estudio del complementario de A en X proporciona un punto de partida para el que aún no se dispone de resultados tan potentes como en el caso de la homotopía absoluta.

Para llegar a resultados más específicos parece conveniente dotar de mayor estructura al subespacio A de X . Para ello existen varias posibilidades que incluyen la estabilidad por un flujo diferencial o, con más generalidad, por aplicaciones conjuntistas. Otra posibilidad sugerida por la necesidad de introducir puntos base, consiste en desarrollar una teoría de homotopía basada en un número finito de puntos base $x_1, \dots, x_k \in X$, en lugar de considerar uno sólo; una aplicación de este modelo al control simultáneo (sistemas multiagente) para la navegación de varios vehículos se puede ver en el capítulo 7 del módulo II (Navegación) de mis apuntes sobre *Robotics. A hierarchised approach*.

5.1.2. Comparación entre clasificaciones. La clasificación de variedades se lleva a cabo utilizando criterios de tipo negativo, es decir, si dos variedades tienen diferentes invariantes topológicos, entonces no pueden ser homeomórficamente equivalentes. En realidad, todos los invariantes (rangos de grupos de homotopía, homología o cohomología) son invariantes de la clase de homotopía. Por ello, la equivalencia módulo homotopía es más fina que las demás, aunque más tosca que la clasificación módulo homeomorfismo.

Desde finales de los años cincuenta y principios de los sesenta se dispone de una cantidad creciente de espacios que son homeomorfos, pero no difeomorfos entre sí. Más allá de las homotopías descritas en los capítulos anteriores, interesa disponer de procedimientos efectivos para la construcción de C^r -isotopías, es decir, equivalencia entre C^r -equivalencias.

El caso más sencillo de formular corresponde a $r = 0$ en el que las C^0 -isotopías corresponden a construir de manera efectiva equivalencias entre homeomorfismos. Esta construcción es trivial en la categoría diferenciable, pues la integración de un campo vectorial genera un homeomorfismo local. Por ello, basta integrar campos vectoriales sobre espacios de funciones o, con más generalidad, aplicaciones (este enfoque se desarrolla en el módulo IV de mis apuntes sobre Topología Diferencial). Sin embargo, no se dispone de una construcción similar en otras categorías.

5.1.3. Divisores de Ramificación. Versión topológica. El estudio del divisor de ramificación para morfismos entre variedades algebraicas o analíticas X, Y de la misma dimensión se formula de la misma forma que el presentado en la sección 4. Se dispone asimismo de una generalización del Teorema de Riemann-Hurwitz para dimensión arbitraria en el caso regular que se formulan en términos del divisor canónico K_X por las clases de las formas de grado máximo sobre X . El caso singular es bastante más complicado y requiere complementos de Geometría Algebraica relacionados con propiedades del haz dualizante (como análogo formal al divisor canónico).

La interpretación topológica en el caso complejo se lleva a cabo en términos de “residuos” n -dimensionales que extienden la noción original de residuo (Cauchy) al caso de dimensión arbitraria. En este caso, los períodos verifican relaciones estructurales (Hodge, Griffiths) que interesa extender al caso singular. Aún no se dispone de una interpretación topológica para el caso algebraico o analítico general.

5.1.4. Clasificación homotópica de variedades 3D. Este problema es con mucho el más difícil de todos y, actualmente, está completamente abierto. Se conocen los ocho tipos básicos de variedades 3-dimensionales, pero no se dispone de una estrategia de cortes (o con más generalidad “tunelaciones”) que extienda la diseñada originalmente por Riemann (corte a lo largo de lazos) y utilizada por Poincaré para la clasificación de las superficies compactas.

La extensión de los métodos presentados en este capítulo al caso 3D incluye herramientas más avanzadas basadas en grupos de reflexión para las diferentes geometrías (plana, esférica, hiperbólica) y en el estudio topológico de foliaciones para variedades tridimensionales. Estos aspectos forman parte del Programa de Geometrización lanzado por W.Thurston a principios de los ochenta y que forma el núcleo central del módulo V de estos apuntes.

5.2. Prácticas. Haz un informe sobre la práctica seleccionada.

5.3. Ejercicios propuestos. En esta subsección se proponen ejercicios (en algunos casos, problemas de examen) que son susceptibles de ampliación para su retulización como TPA.

5.3.1. Recubrimientos de ramilletes. Dar un ejemplo de un recubrimiento de un ramillete de dos circunferencias que no sea normal.

5.3.2. Recubrimiento orientable de una superficie no-orientable. Demostrar que cualquier superficie no-orientable tiene un doble recubrimiento por una superficie orientada.

5.3.3. Resultados sobre grupos y espacios recubridores. Demostrar que cualquier subgrupo de un grupo libre es libre usando espacios recubridores

DEmostar que si H es un subgrupo de un grupo libre G de índice $k := [G : H] \leq \infty$, entonces su rango está dado por $\text{rang}(H) = k(\text{rang}(G) - 1) + 1$

Nota.- Las demostraciones puramente algebraicas de los resultados que aparecen en los dos problemas precedentes son complicadas, mientras que las demostraciones topológicas son casi triviales.

Mostrar que el grupo libre de rango 2 que contiene los subgrupos libres de cualquier rango n (incluyendo $n = 3$)

5.3.4. *Normalidad de dobles recubrimientos.* Demostrar que cualquier doble recubrimiento es normal. ¿A qué enunciado de la teoría de grupos corresponde?

5.3.5. *Recubrimientos de la esfera y el espacio proyectivo.* Construir un doble recubrimiento del espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ por la esfera n -dimensional $\mathbb{S}^n$ y utilizarlo para demostrar que

- $\mathbb{RP}^n$ es orientable para n par y no orientable para n impar.
- $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$
- $\pi_k(\mathbb{RP}^n) = \pi_k(\mathbb{S}^n)$ para $n \geq 2$.

5.3.6. *Recubrimientos del toro.* Verificar que todos los recubrimientos del toro son normales y describirlos.

5.3.7. *Recubrimientos de la botella de Klein.* Calcular el espacio recubridor universal de la botella de Klein K y utilizarlo para calcular los grupos de homotopía de K

¿Puede el toro ser un doble recubrimiento de la botella de Klein?

5.3.8. *Recubrimientos y transformaciones de la fibra.* Demostrar que cualquier transformación entre las fibras (deck transformation) de un recubrimiento (no necesariamente normal) está determinada por un punto y su imagen.

5.3.9. *Recubrimientos triples.* Dar dos ejemplos de recubrimientos triples no isomorfos del ramillete de dos circunferencias.

Mostrar que cualquier recubrimiento triple de la esfera con dos asas no puede ser normal.

5.3.10. *Recubrimientos de grafos.* Supongamos que el grafo $\mathcal{G}'$ recubre al grafo $\mathcal{G}$. ¿Qué se puede decir sobre sus características de Euler?

5.4. Bibliografía comentada.