CAPITULO 2: ESPACIOS PUNTEADOS. HOMOTOPÍA RELATIVA

JAVIER FINAT, SEPTIEMBRE 2018

Contents

Los espacios punteados son pares (X, x_0) con $x_0 \in X$. Las aplicaciones entre espacios punteados $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ se han introducido en el capítulo anterior. La selección de un punto responde a diferente razones relacionadas con su utilización en problemas de equilibrio y sus aplicaciones (modelos ideales en Teoría Económica, p.e.) ó bien como pivote para cuestiones de inspección, recorrido (por caminos), barrido y un largo et cetera. Una primera cuestión a dilucidar es si la elección del punto es significativa ó no. Un caso extremo se presenta para los espacios contractibles donde, gracias a la trivialidad topológica (desde el punto de vista de homotopía) el punto se puede elegir de forma arbitraria y, a este cuestión se dedica la primera sección.

El resto de las secciones se dedican a cuestiones que presentan una mayor complejidad y que afectan al cálculo de invariantes de objetos geométricos más complicados. Una "relajación" de las condiciones asociadas a morfismos entre espacios punteados se introduce en términos de aplicaciones entre pares $f : (X, A) \to (Y, B)$ verificando $f(A) \subseteq B$ que aparecen asociadas de forma natural a cuestiones de estabilidad en la Teoría Topológica de los Sistemas Dinámicos y sus aplicaciones. La construcción de aplicaciones entre pares permite introducir la noción de *Homotopía Relativa* que es clave para distinguir entre espacios $X, Y, \dots$ utilizando la topología del complementario de un subespacio $A, B, \dots$.

Una motivación está dados por el estudio del complementario de rectas en el espacio. Aunque el espacio ambiente y cada uno de los subespacios sea contractible, el complementario no lo es (razonarlo como ejercicio). Las configuraciones de elementos (lineales) en un espacio cartesiano (o con más generalidad afín o proyectivo) reciben el nombre de "arrangements" $\mathcal{A}$ (que traducimos de forma abusiva como "arreglos") y se denotan mediante $\mathcal{A}$. Tienen gran interés en relación con descomposición automática del espacio ambiente y se extienden de forma relativamente simple al caso de hipersuperficies de grado d.

Algunas aplicaciones importantes de los arreglos están relacionadas con el estudio de formas diferenciales holomorfas con polos preasignados; los invariantes topológicos (tanto los asociados a grupos de homotopía como de co-homología) se pueden calcular de forma explícita utilizando métodos combinatorios. Un tratamiento más detallado se puede ver en trabajos desarrollados inicialmente por Orlik y Solomon a principios de los ochenta. La naturaleza combinatoria de los métodos permite extender los cálculos a deformaciones de arreglos correspondientes a la intersección de hipersuperficies de grado superior a uno [1].

Una extensión bastante más complicada está relacionada con el estudio de embebimientos de esferas $\mathbb{S}^k$ en el espacio ordinario. Para $k = 1$ da lugar a la Teoría de Nudos cuyo estudio topológico se lleva a cabo de forma más sistemática a partir del módulo 4 en el marco de la Topología Geométrica; los nudos más "simples" son de tipo tórico y se describen en términos de caminos cerrados en el interior de un toro 2-dimensional $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ como una suma formal de p copias del primer generador y q copias del segundo generador; proporcionan una versión topológica para los modelos reales de curvas planas con singularidades de tipo (p, q) con $p/q \in \mathbb{Q}$ (para garantizar el carácter cerrado del ciclo). Aunque en todos los casos el espacio

[1] Un tratamiento computacional para arreglos de rectas se puede ver en O'Rourke; algunas aplicaciones a cuestiones de Robótica y de Visión Computacional se puede ver en mis apuntes de dichas materias

ambiente sea el mismo y los subespacios sean una imagen de $\mathbb{S}^1$, el complementario presenta toda clase de patologías dando lugar a una infinidad de tipos diferentes [2].

Una idea clave asociada en la que se demuestra la utilidad del enfoque abstracto en Topología y que extiende las construcciones intuitivas originales de Poincaré asociadas al espacio de caminos aparece nuevamente asociada a la independencia con respecto al carácter combinatorio de las construcciones realizadas, es decir, a la invariancia algebraica de los caracteres asociados al grupo fundamental.

En particular y a diferencia del enfoque analítico predominante en buena parte del siglo XX, desde el punto de vista de los invariantes se pueden evitar las funciones complicadas y los espacios que presentan cierta complejidad, centrando la atención en funciones definidas sobre espacios simples (intervalos ó rectángulos, circunferencias ó esferas).

La justificación (bastante paradójica) de esta observación de estos procedimientos de-constructivos consiste en que, gracias a la reducción a representaciones simbólicas ó esqueletales (que llamaremos “retractos de deformación”) con estas funciones, es posible construir la mayor parte de los resultados topológicos significativos relacionados con objetos ó funciones en categorías más amplias como las extensiones al marco G.A.G.A llevadas a cabo por Grothendieck a finales de los sesenta .

Esta idea se frmaliza en términos de teoría de modelos para (co-)homologías (Motivos) usando una “reducción” de espacios a “representaciones esqueletales minimales” que se gestionan de forma similar a hipergrafos. Esta idea es la extensión natural del caso correspondiente a superficies y los grafos que representan los generadores del grupo fundamental o del primer grupo de homología. En las representaciones eneralizadas las caras k-dimensionales representan las clases de homología; las relaciones con los grupos de homotopía de orden superior presentan una dificultad mayor y se abordan en el módulo 3. El primer caso significativo corresponde a los espacios contractibles que se abordan en la sección 1.

En la segunda sección se desarrolla el caso inicialmente más sencillo correspondiente a los espacios punteados, con algunas extensiones al caso de homotopía relativa que proporciona invariantes topológicos (con respecto a deformaciones dadas por homotopías) relativos a subconjuntos de espacios topológicos.

La “mayor parte” de espacios utilizados en Topología de Variedades admiten descomposiciones celulares, es decir, se pueden reconstruir mediante pegado de células (a lo largo del borde) k-dimensionales que denotamos como $(e_i^k, \partial e_i^k)$ que son topológicamente equivalentes a pares de la forma $(\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ donde $\mathbb{D}^k$ es el disco unidad y $\mathbb{S}^{k-1} = \partial\mathbb{D}^k$ es la esfera borde de dicho disco. Por ello, la tercera sección está enfocada a presentar resultados básicos correspondientes a la homotopía relativa de los pares $(\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1})$.

En las dos últimas secciones se presentan algunas posibles aplicaciones vinculadas a posibles prácticas a desarrollar. Por ello, pueden ser saltadas en primera lectura.

[2]Los embebimientos de la esfera $\mathbb{S}^2$ se introducen en el módulo 2 de la asignatura (Alexander).

1. **Espacios contractibles**

Los espacios contractibles son los "elementos básicos" a partir de los cuales se construyen células como pares $(e^k), \partial e^k)$ topológicamente equivalentes a pares $(\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1})$. De un forma metafórica el pegado de "células" a lo largo de los bordes (equivalentes a esferas) da lugar a "organismos más complejos", a los que se llama "complejos celulares". [3]

Los espacios contractibles tienen una estructura topológicamente trivial (se "contraen" a un punto), por lo que en principio podrían parecer irrelevantes desde el punto de vista topológico. No ocurre así porque aunque haya espacios que no son contractibles, la supresión de un número reducido de elementos les convierte en unión de esos elementos y objetos contractibles, dando lugar a las "descomposiciones celulares".

Por ello, interesa disponer de herramientas que permitan no sólo identificar las células como elementos básicos, sino las aplicaciones de pegado y de corte (o de "cirugía" en términos topológicos) para generar espacios más complejos en "unión" de contractibles. Este enfoque proporciona la motivación fundamental para centrar la atención en las operaciones de cirugía (supresión ó corte de objetos.

Al cabo de un número finito de cortes se llega a una unión de conjuntos contractibles en cada dimensión, cuya frontera es una unión de esferas: las operaciones de "pegado" (complementarias de las correspondientes a cirugía) permiten recomponer el objeto original mediante "adjunción" de células [4].

1.1. **Nociones básicas.**

En esta subsección se revisan algunas nociones básicas introducidas más arriba para reforzar algunos aspectos geométricos subyacentes que son aplicables en diferentes marcos relacionados con la Visión Computacional y algunos aspectos de modelado topológico en $3D$.

1.1.1. *Espacio contractible. Definición.-* Un espacio topológico X es contractible si es homotópicamente equivalente a un punto.

Ejemplo 1.- Demuestra que cualquier espacio cartesiano $\mathbb{K}^n$ es contractible para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$. ¿Es contractible el espacio cartesiano con las estructuras superpuestas habituales (euclídea, afín, proyectiva)? Razona la respuesta. ¿Es posible contraer cualquier polígono limitado por una curva de Jordan?

1.1.2. *Espacios no-contractibles.* La mayor parte de los espacios no son contractibles. Interesa identificar las componentes contractibles con respecto a las que no lo son. Los grafos proporcionan una representación simbólica que facilita la gestión de este tipo de descomposiciones desde el punto de vista computacional. Para algunas aplicaciones ver el módulo 4 del CEViC en relación con cuestiones de Reconocimiento de

[3] Un estudio detallado de los complejos celulares y sus generalizaciones es el tópico central del módulo 3 de esta materia A_2 (Topología Algebraica).

[4] Un tratamiento más sistemático de las operaciones de cirugía topológica se lleva a cabo en el Curso de Topología Diferencial, donde se muestra el comportamiento de las curvas integrales asociadas a campos a lo largo de cuyas trayectorias críticas se realizan los cortes

siluetas, tanto para el caso estático, como dinámico. La gestión computacional automática de elementos contractibles o no a partir de secuencias de video es un problema abierto bastante difícil de resolver; el caso correspondiente al Reconocimiento Automático de Volúmenes a partir de las superficies (eventualmente deformables) que las acotan está completamente abierto, incluso cuando dichas superficies son "lazos generalizados" (es decir, topológicamente equivalentes a $\mathbb{S}^2$). A continuación se presentan algunos ejemplos básicos de espacios no contractibles.

Ejemplo 2.- La esfera $\mathbb{S}^n$ no es contractible para ningún $n \geq 0$. Sin embargo, $\mathbb{S}^n - \{\mathbf{P}\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y, por tanto, contractible. *Indicación:* La proyección estereográfica desde $\mathbf{P} = \mathbf{N} = (0, \ldots, 0, 1)^T$ se representa mediante la recta $r = \overline{\mathbf{NP}}$ parametrizada por

$$(0, \ldots, 0, 1) + t(-x_1, \ldots, -x_n, 1 - x_{n+1}) = (-tx_1, \ldots, -tx_n, t(1 - x_{n+1}))$$

que corta al plano $x_{n+1} = 0$ (ecuador) en $1 + t(1 - x_{n+1}) = 0$, es decir, para $t = -1/(1 - x_{n+1})$ por lo que la aplicación proyección

$$\pi_{\mathbf{N}} : \mathbb{S}^n - \{\mathbf{N}\} \to \mathbb{R}^n \ \mid \ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}, 0)$$

es un homeomorfismo (completar los detalles).

Ejemplo 3.- El espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ no es contractible para ningún $n \geq 0$. Sin embargo, $\mathbb{P}^n - H_\infty$ es homeomorfo a $\mathbb{A}^n$ y, por tanto, contractible. *Indicación:* Supongamos que H_∞ está dado por $x_{n+1} = 0$ y denotemos mediante $D_+(x_{n+1}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n \mid x_{n+1} \neq 0\}$ que parametrizamos mediante $(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1)$. Entonces la aplicación $f : D_+(x_{n+1}) \to \mathbb{R}^n$ dada por la asignación

$$(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1) \ \mapsto \ (x_1, \ldots, x_n)$$

es un homeomorfismo (verificar los detalles como ejercicio). Más aún, el límite directo de la colección de espacios proyectivos encajados

$$\mathbb{P}^0_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \subset \ldots \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \subset \ldots$$

define un objeto topológico que se denota mediante $\mathbb{P}^\infty_{\mathbb{R}}$. El complementario de cada espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ en $\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{R}}$ es (isomorfo a) un espacio afín $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ al que se llama dominio coordenado (complementario de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ que se toma como "hiperplano del infinito"). Como todos los espacios afines $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ son topológicamente equivalentes a un espacio cartesiano, son contractibles y se les llama *células abiertas* [5]. Utilizando una inducción descendente, se tiene una descomposición como unión disjunta

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}} = \ldots = \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{A}^{n-1}_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{P}^{n-2}_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{P}^0_{\mathbb{R}}$$

a la que se llama *descomposición celular del espacio proyectivo* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ y que sintetiza las propiedades topológicas de dicho espacio en relación con la "incidencia" respecto a una colección de subespacios encajados (a la que se llama "bandera"); tomando límites directos, esta construcción se extiende a $\mathbb{P}^\infty_{\mathbb{R}}$.

[5] En ocasiones también se les llama simplemente células, pero esta terminología puede dar lugar a confusión pues en el capítulo anterior se han introducido las células k-dimensionales como pares topológicamente equivalentes a $(\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1})$

La construcción para el caso complejo es similar, con la única diferencia de que para $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sólo hay células no vacías en dimensión real par (correspondientes a las células complejas de dimensiones complejas consecutivas).

Ejercicio.- Una curva simple ó *curva de Jordan* en el plano cartesiano $\mathbb{R}^3$ es cualquier curva conexa que no tiene autointersecciones. Verifica que la región limitada por una curva de Jordan es contractible. ¿Es cierto el mismo resultado en $\mathbb{R}^3$?

1.1.3. *Revisitando aplicaciones homótopas a cero. Definición.-* Sean X, Y dos espacio topológicos con $y \in Y$. Se dice que la aplicación $f : X \to Y$ es *homótopa a cero* (null homotopic) si es homótopa a la aplicación constante que lleva cada punto $x \in X$ en el punto $y \in Y$

Nótese que seleccionar un punto $x_0 \in X$ equivale a dar una aplicación $\{x_0\} \to X$.

Nota.- Una aplicación entre espacios contractibles no tiene por qué ser homótopa a cero. Un ejemplo simple está dado por aplicaciones de la esfera $\mathbb{S}^k$ en sí misma; si $k \geq 2$, se tiene que cualquier lazo es contractible, por lo que $\pi_1(X, x_0) = e$. Sin embargo, la aplicación $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^k$ no tiene por qué ser homótopa a cero. De hecho, más adelante veremos que define un invariante topológico al que se llama "grado de la aplicación".
Detectar si una aplicación es homótopa a cero o no es un problema bastante difícil para el que no se tienen actualmente criterios sencillos de verificar. De ahí, que se utilicen estructuras adicionales y criterios diferenciales asociados a complejos graduados basados en cohomología.

1.1.4. *Ejercicios propuestos. Ejercicio 1.-* Un espacio X es contractible si para cualquier espacio Y, dos aplicaciones cualesquiera $Y \to X$ son homótopas.

Ejercicio 2.- Un espacio X es contractible si y sólo si, la aplicación identidad $1_X : X \to X$ es homótopa a cero.

Ejercicio 3.- Un espacio contractible X es conexo por arcos.

1.2. **Conjuntos significativos del plano.** La selección de conjuntos de puntos "significativos" en el plano es crucial para detectar propiedades topológicas que afectan a representaciones simbólicas del complementario. Algunas aplicaciones típicas recientes conciernen a la navegación semi-automática de plataformas móviles basada en la identificación de esquinas o bien de "marcas" en una escena. Cuando los puntos significativos son móviles ó cuando los puntos están situados en el espacio tridimensional, el problema es bastante más complicado y las configuraciones pueden ser difíciles de gestionar en tiempo real; este tópico se aborda al final del módulo 2 de mis notas sobre Robótica. Para simplificar suponemos que los puntos están fijos en el plano.

1.2.1. *Nociones básicas. Definición 1.-* Un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ es *convexo* si para cualquier par $x, y \in X$, el segmento

$$\overline{xy} \ := \ \{(1-t)x + ty \ \mid \ t \in [0,1]\}$$

que les conecta esta contenido en X (intuitivamente, “no hay entrantes”)

Definición 2.- Se dice que una región poligonal $\mathcal{P}$ limitada por un polígono P es *estrellada* si existe un punto $x_0 \in \mathcal{P}$ tal que cualquier vértice de P es “visible” desde x_0, es decir, el segmento $\overline{x_0 P} \subset \mathcal{P}$. Por extensión se dice que P es un *polígono estrellado* (esta noción se extiende de forma inmediata a regiones estrelladas no necesariamente acotadas por polígonos). Las regiones estrelladas son importantes para resolver problemas de visibilidad y, por consiguiente, seguridad y vigilancia.

Definición 3.- Se dice que una región poligonal $\mathcal{P}$ limitada por un polígono P es *monótona* si existe una dirección ℓ_0 tal que $\#\{\ell \cap P\} \leq 2$ para cualquier línea ℓ paralela a ℓ_0. Por extensión se dice que P es un *polígono monótono.* Las regiones monótonas son importantes para identificar regiones minimales con comportamientos ”regulares” con respecto a direcciones de barrido (paralelas a una dirección prefijada).

Ejercicio.- Cualquier polígono convexo es estrellado y monótono, pero el recíproco no es cierto. Dibuja un ejemplo. Diseña un algoritmo que permite descomponer un polígono arbitrario en unión de polígonos convexos, estrellados o monótonos [6]

Nota.- Si P es un polígono estrellado con todos los vértices visibles desde $x_0 \in Int(\mathcal{P})$ con $P = \partial\mathcal{P}$, entonces cada recta ℓ del haz de rectas que pasa por x_0 corta a P en dos puntos. Por ello, en un sentido proyectivo, cualquier polígono estrellado es monótono (todas las rectas ℓ paralelas a ℓ_0 se cortan en un punto del infinito que sería la imagen de x_0 por una transformación proyectiva de la proyectivización del plano ordinario).

1.2.2. *Contractibilidad. Proposición.-* Cualquier conjunto convexo es contractible.

Demostración.- Elijamos $x_0 \in X$ y definamos $f : X \to X \ \mid \ f(x) = x_0 \ \forall x \in X$ La aplicación

$$F : X \times I \to X \ \mid \ F(x,t) = tx_0 + (1-t)x$$

define una homotopía entre f y 1_X.

Nota 1.- La construcción de la proposición anterior justifica el nombre de método de homotopía (ó de continuación) utilizado en Ingeniería para resolver un gran número de cuestiones de interpolación en espacios que son contractibles, pero muestra asimismo las limitaciones del procedimiento para aquellos espacios cuya topología no es trivial.

Nota 2.- La condición para que un espacio sea contractible no es topológicamente trivial (existen espacios contractibles más allá de puntos o de todo el espacio cartesiano). Como un conjunto convexo no es homeomorfo a un punto, la noción de equivalencia homotópica es estrictamente más débil que la de homeomorfismo.

[6] Para detalles y conceptos relacionados ver las notas del módulo 1 (Geometría Computacional) de mi Curso sobre Dinámica Computacional.

1.2.3. *Descomposición en subconjuntos contractibles.* La unión de subconjuntos contractibles no es contractible; el ejemplo obvio lo proporciona una colección de puntos. Sin embargo, frecuentemente es interesante encontrar procedimientos de descomposición de objetos no contractibles en unión de subconjuntos contractibles. Un ejemplo típico en Geometría Computacional corresponde a la descomposición de una región poligonal en unión de regiones convexas, estrelladas ó monótonas. En todos los casos, esta descomposición se realiza p.e. mediante el trazado de diagonales internas (segmentos que conecta vértices entrantes ó "reflejos"), pero el algoritmo a implementar para realizar este proceso de forma automática no es trivial. Para más detalles ver notas de Geometría Computacional. Esta descomposición cobra un significado matemático más profundo a la luz del resultado presentado en el apartado siguiente:

1.2.4. *Ejercicios propuestos. Ejercicio 1.-* Verifica que la semiesfera $\mathbb{S}^{n-1}_{+} = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} \mid x_n \geq 0\}$ es contractible.

Ejercicio 2.- Verifica que cualquier polígono / poliedro estrellado es contractible.

Ejercicio 3.- Verifica que cualquier polígono monótono es contractible. ¿Es cierto el mismo resultado para poliedros?

1.3. **Espacios contractibles y simplemente conexos.** En esta subsección se muestran los resultados que permiten conectar ambos conceptos

1.3.1. *Topología de espacios contractibles. Proposición* Un espacio contractible es simplemente conexo

Demostración (según Greenberg): Aunque cualquier lazo γ sea homótopo a un punto $x_0 \in X$ (aplicación asociada al lazo constante), no sabemos si estas aplicaciones son homótopas con respecto a $[0, 1]$. Para ello, hay que mostrar que dos lazos cualesquiera α, β centrados en dos puntos diferentes x_0, x_1 son $[0, 1]$-equivalentes. Podemos visualizar cada lazo como un camino (con extremos que identificamos en una fase posterior); para comparar los lazos basados en x_0, x_1, denotemos mediante γ un camino que conecta x_0 y x_1. La homotopía a construir debe conectar los 3 caminos entre sí, es decir, los lazos centrados en x_0, x_1 y el camino que les conecta. Por consiguiente, hay que demostrar el resultado siguiente:

Lema .- Dada una homotopía $F : I \times I \to X$, hagamos

$$\alpha(t) = F(0, t)\ ,\ \beta(t) = F(1, t)\ ,\ \gamma(s) = F(s, 0)\ ,\ \delta(s) = F(s, 1)$$

Entonces

$$\delta \simeq \alpha^{-1} \circ \gamma \circ \beta$$

con respecto a $[0, 1]$)

Demostración del lema .- Se hace mediante la yuxtaposición de 3 cuadrados que permiten conectar las aplicaciones recién descritas: Denotemos mediante $x_0 = \delta(0)$ y $x_1 = \delta(1)$. Entonces construimos las aplicaciones

$$E(s,t) = \left\{ \begin{array}{ccc} x_0 & \text{si} & s \leq t \\ \alpha(1+t-s) & \text{si} & s \geq t \end{array} \right\}$$

(que da la homotopía entre α y la aplicación constante x_0) y

$$G(s,t) = \left\{ \begin{array}{ccc} \beta(t+s) & \text{si} & 1-s \geq t \\ x_1 & \text{si} & 1-s \leq t \end{array} \right\}$$

(que da la homotopía entre β y la aplicación constante x_1). Si X es contractible, obtenemos dicha F haciendo

$$\delta = \sigma \ , \gamma = x_0 \ , \ \alpha = \beta$$

Nótese que al identificar los dos extremos de α, β con los puntos x_0, x_1 convertimos los caminos (lados verticales del cuadrado) en lazos; asimismo al hacer $\gamma = x_0$ estamos contrayendo el camino que conecta x_0 con x_1 a un punto. Por ello, la identificación de δ con σ induce una aplicación de la circunferencia sobre X que es homótopa a la aplicación constante en x_0. Por tanto, σ es homotópicamente trivial.

1.3.2. *Representación simbólica. Corolario 1* Supongamos que $f, g : X \to Y$ son aplicaciones homótopas mediante una homotopía $F : X \times I \to Y$. Sean $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = g(x_0)$. Denotemos mediante α un camino de y_0 a y_1 dado por $\alpha(t) = F(x_0, t)$ para cualquier $t \in I$. Entonces, se tiene un diagrama conmutativo $\alpha_* \circ f_* = g_*$, es decir,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \to & \pi_1(Y, y_0) \\ & g_* \searrow & \downarrow \alpha_* \\ & & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

Demostración del Corolario 1: Para cualquier lazo σ en x_0 se tiene que

$$(f \circ \sigma) \circ \alpha \ = \ \alpha(g \circ \sigma)$$

Indicación: Visualizarlo como un cuadrado asociado a la homotopía $F(\sigma(t), t)$

1.3.3. *Isomorfismo entre grupos fundamentales. Corolario 2* Bajo las hipótesis anteriores, la aplicación $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo si y sólo si $g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1)$ lo es.

Nota.- Este resultado justifica que dos aplicaciones $f, g : X \to Y$ sean homótopas si existe una aplicación $f' : Y \to X$ tal que

$$f \circ f' \simeq 1_Y \ , \ f' \circ f \simeq 1_X$$

en cuyo caso se dice que los espacios X, Y son homotópicamente equivalentes. Por ejemplo, X es contractible si es homotópicamente equivalente a un punto

1.3.4. *Equivalencia homotópica e isomorfismos. Corolario 3* Si f es una equivalencia homotópica, entonces $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo para cualquier $x_0 \in X$

Demostración del Corolario 3 En virtud del Corolario 2, $f_* \circ f'_*$ y $f'_* \circ f_*$ son isomorfismos.

1.3.5. *Conclusiones y ejercicios.* Tras los resultados anteriores, la primera afirmación es casi una obviedad, actualmente, pero ello se debe a la reelaboración de materiales iniciada por Riemann y cas concluida por Poincaré.

Teorema (Tietze).- El grupo fundamental de un espacio conexo por caminos es un invariante de la clase de homotopía y, en particular, es un invariante topológico

Ejercicio (Greenberg 3.7).- Supongamos que X es conexo por arcos. Demuestra que las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- X es simplemente conexo
- Cualquier aplicación de $\mathbb{S}^1$ en X se extiende una aplicación del disco unidad cerrado $\mathbb{D}^2$ en X.
- Si σ, τ son caminos en X con los mismos puntos inicial y final, entonces $\sigma \simeq \tau$ con respecto a $[0, 1]$.

Ejercicio (ortogonalización de Gram-Schmid).- Verifica que el grupo ortogonal $O(n) := \{A \in GL(n; \mathbb{R}) \mid {}^TAA = I\}$ siendo I es la matriz identidad es una retracción del grupo lineal general real $GL(n; \mathbb{R}) := \{A \in M(n \times n; \mathbb{R}) \mid det(A) \neq 0)\}$ formado por las matrices regulares. *Indicación:* Cualquier matriz regular descompone en producto de una ortogonal y una matriz simétrica y que el conjunto de matrices simétricas es un espacio vectorial..

Verifica que el grupo unitario $U(n) := \{A \in GL(n; \mathbb{C}) \mid {}^TA\bar{A} = I\}$, donde I es la matriz identidad, es un retracto de deformación del grupo lineal general complejo $GL(n; \mathbb{C}) := \{A \in M(n \times n; \mathbb{C}) \mid det(A) \neq 0)\}$. *Indicación:* Cualquier matriz regular descompone en producto de una unitaria y una matriz simétrica; el conjunto de matrices simétricas con coeficientes en cualquier cuerpo sigue siendo un espacio vectorial.

1.4. **Aplicaciones esenciales.** Además de demostrar el carácter invariante de la clase de homotopía de una aplicación, la subsección precedente y la demostración de la proposición han mostrado que construir espacios contractibles y aplicaciones homótopas a cero es fácil. Asimismo, se ha mostrado la relación entre espacios contractibles y espacios simplemente conexos, como los casos más sencillos desde el punto de vista topológico. Por ello, interesa centrarse en los objetos que "no son triviales" desde el punto de vista topológico, a los que se dedica la presente subsección. Esta cuestión se puede abordar de diferentes formas; una consiste en estudiar las aplicaciones que no son homótopas a cero.

Ejercicio.- Dado un espacio contractible X, verifica que todas las aplicaciones $X \to Y$ son homótopas a cero, por lo que el conjunto $[X, Y]$ de las clases de homotopía de dichas aplicaciones consiste en un sólo elemento. Análogamente, el conjunto $[Y, X]$ consiste en un un sólo elemento también.

De forma complementaria, interesa producir funciones que no sean homótopas entre espacios que no sean topológicamente triviales (contractibles, en este caso). El caso más simple de un espacio no contractible es un espacio cartesiano "punteado" $\mathbb{K}^n \backslash \{\underline{0}\}$ (al que se le ha quitado un punto, como el origen, p.e.) que es topológicamente equivalente a la esfera $\mathbb{S}^{m-1}$; en particular, las aplicaciones más simples no topológicamente triviales son aplicaciones entre espacios punteados. La estrategia a seguir consiste en explotar el ejemplo más simple correspondiente a aplicaciones $\mathbb{C}\backslash\{\underline{0}\} \to \mathbb{C}\backslash\{\underline{0}\}$; en relación con los "ejemplos" mostrados en el capítulo 1 (ver §2.1.2 para resultados básicos), podemos interpretar dichas aplicaciones como una "extensión" de las funciones de una variable compleja que estamos interesados en prolongar fuera de un punto z_0 que hemos identificado como si fuera el origen. En el apartado siguiente analizamos las funciones más simples.

1.4.1. *Noción de aplicación esencial. Definición.*- Se dice que $f : X \to Y$ es una *aplicación esencial* si *no es* homótopa a cero o bien ninguno de los espacios X, Y es contractible.

"Ejemplo".- Denotemos por $\mathbb{S}^1(r, \underline{0}) \subset \mathbb{C}$ la circunferencia compleja centrada en el origen con radio r. Consideremos la función

$$\alpha_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \;\mid\; \alpha_n(z) := z^n$$

y denotemos por

$$f_r^n := \alpha_n \mid_{\mathbb{S}^1(r,\underline{0})} : \mathbb{S}^1(r, \underline{0}) \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

la restricción de α_n a la circunferencia real de radio r. Entonces, se tiene el resultado siguiente

1.4.2. *Un resultado sobre aplicaciones esenciales. Proposición.*- Para cualquier $n > 0$ y cualquier $r > 0$, la aplicación f_r^n es esencial.

La demostración de la afirmación anterior es altamente no-trivial y requiere desarrollos adicionales que se exponen más adelante. Por el momento, supongamos que es cierto. Para la función $f(z) = z^n$ es muy fácil calcular las raíces (Moivre), pero una cuestión que surge de forma natural consiste en saber si podemos extender ó prolongar dichas soluciones y, en caso afirmativo cómo controlar los fenómenos de ramificación que se presentan asociados a los ceros del polinomio.

Utilizando que f_r^n es esencial, se demuestra el Teorema Fundamental del Álgebra. La idea intuitiva consiste en interpretar un polinomio arbitrario de grado n como una deformación genérica de z^n y prolongar las raíces fuera del origen mediante la construcción de una homotopía que relacione z^n con la deformación genérica menos dicho término.

1.5. **Teorema Fundamental del Álgebra.** En esta subsección se formula y demuestra el Teorema Fundamental del Álgebra que, paradójicamente, requiere técnicas de Topología Algebraica para su demostración. Al final de la subsección se comentan algunos conceptos elementales relacionados con Álgebra Básica que son colaterales para los objetivos de la asignatura.

1.5.1. *Formulación del resultado. Teorema.*- Cualquier polinomio no-constante

$$g(z) \;=\; a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja.

Demostración.- Para el polinomio $g(z)$ elijamos $r > max(1, \sum_{i=1}^{n} |a_i|)$. Construyamos la aplicación

$$F : \mathbb{S}^1(r, \underline{0}) \times I \to \mathbb{C} \;\mid\; F(z,t) = z^n + \sum_{i=0}^{n-1} (1-t) a_i z^i$$

Para demostrar que F es una homotopía entre f_r^n y $g \mid_{\mathbb{S}^1(r,\underline{0})}$, basta demostrar que la imagen de F está contenida en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Dicho de otra forma, debemos demostrar que $F(z,t) \neq 0$. En efecto, si $F(z,t) = 0$ para algún $t \in I = [0,1]$ y algún z con $|z| = r$, entonces tendríamos que

$$z^n \;=\; -\sum_{i=0}^{n-1} (1-t) a_i z^i$$

En virtud de la desigualdad triangular

$$r^n \;\leq\; \sum_{i=0}^{n-1} (1-t)|a_i| r^i \;\leq\; \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| r^i \;\leq\; \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| r^{n-1}$$

pues, como $r > 1$, se tiene que $r^i < r^{n-1}$ para cualquier $0 \leq i \leq n-1$. Dividiendo entre r^{n-1} se obtiene que

$$r \;\leq\; \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$$

en contra de la elección de r. Por consiguiente, $F(z,t) \neq 0$.

RPRA nuevamente y supongamos que g no tiene raíces complejas. Construimos la aplicación

$$G : \mathbb{S}^1(r, \underline{0}) \times I \;\to\; \mathbb{C}\backslash\{0\} \;\mid G(z,t) = g((1-t)z)$$

que nos permite conectar $G(z,0) = g(z)$ con $G(z,1) = g(0) = a_0$ y tratamos de evaluar si tienen raíces ó no.

Como estamos suponiendo que g no tiene raíces, los valores de G están en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Por consiguiente, G es una homotopía entre g restringida a $\mathbb{S}^1(r, \underline{0})$ y la función constante $z \mapsto g(0) = a_0$. En consecuencia, $g \mid_{\mathbb{S}^1(r,\underline{0})}$ es homótopa a cero y, en consecuencia, f_r^n es homótopa a g, por lo que es también homótopa a cero, en contra de que, según el teorema citado más arriba, para cualquier $n > 0$ y cualquier $r > 0$, la aplicación f_r^n es esencial, en contra del resultado que habíamos supuesto como cierto antes del Teorema Fundamental del Álgebra. Por consiguiente, g tiene raíces complejas.

1.5.2. *Una excursión por la Geometría del Discriminante.* El discriminante de un polinomio $g(z)$ en una variable representa el conjunto de raíces múltiples de la ecuación asociada $g(z) = 0$. De una forma intuitiva, la Geometría del Discriminante aparece asociada al comportamiento de las raíces cuando se llevan a cabo "deformaciones genéricas" que,en el caso de la Topología Algebraica están representados por lazos parametrizados por $\mathbb{S}^1$. Para fijar ideas, consideremos el primer caso no-trivial correspondiente a los polinomios mónicos $g(z)$ de grado 3 y que factorizamos usando el Teorema Fundamental del Álgebra:

$$g(z) == a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + z^3 \; = \; \Pi_{i=1}^{3}(z - r_i)$$

Igualando coeficientes obtenemos que

$$a_2 = -(r_1 + r_2 + r_3) \;,\; a_1 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 \;,\; a_0 = r_1r_2r_3$$

que son un sistema de generadores para las funciones simétricas elementales en las raíces r_1, r_2, r_3 (invariantes por la acción del grupo simétrico S_3 asociado a tres letras que interpretamos geométricamente como indeterminadas). Mediante una transformación de Cardano, se puede suprimir el término en z^2, obteniéndose una forma normal reducida para el polinomio genérico que escribimos ahora como $F(z; a, b) = z^3 + az + b$. Para estudiar el comportamiento de las raíces con respecto a caminos en el espacio reducido (a, b) de parámetros, debemos eliminar la variable z, es decir, hay que calcular el discriminante de la ecuación dado por

$$F(z; a, b) = z^3 + az + b = 0 \quad , \quad \frac{F(z; a, b)}{\partial z} = 3z^2 + a = 0$$

obteniéndose

$$a = -3z^2 \quad , \quad b = 2z^3$$

expresiones que verifican la relación algebraica $4a^3 - 27b^2 = 0$ correspondiente a una cúspide ordinaria (parábola semi-cuspidal en la terminología de Newton) en el plano reducido de parámetros (a, b). Un camino cerrado en torno al origen $(a, b) = (0, 0)$ (correspondiente a un lazo en el espacio de polinomios de grado 3) corta a la cúspide en dos puntos que corresponden a dos polinomios con una raíz doble y una simple; el resto de los elementos de la familia dan lugar a polinomios con 3 raíces simples. La situación cambia de forma drástica cuando el camino en el espacio de polinomios de grado 3 pasa por el origen, pues en ese caso se presenta una raíz triple [7]

Si regresamos a la ecuación $g(z) = 0$ asociada al polinomio original, cada raíz doble $r_i = r_j$ se puede interpretar como una reflexión con respecto al plano bisector, lo cual da tres planos bisectores en el espacio con variables r_1, r_2 y r_3 que se cortan en el origen $(r_1, r_2, r_3) = (0, 0, 0)$; en este contexto, la condición $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ introducida para la forma reducida $f(z)$ de la ecuación representa un plano en el espacio de raíces (r_1, r_2, r_3) que corta a los planos bisectores a lo largo de tres rectas que permiten representar el intercambio de raíces por un grupo de reflexión en el plano $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ generado por tres elementos y una relación lineal. La proyección del "lugar de intercambio" entre raíces sobre el espacio de polinomios

[7]Esta descripción es el punto de partida para la Teoría de Catástrofes de R.Thom o con más generalidad, para la Bifurcación de Sistemas Dinámicos en el caso diferenciable; ver mis apuntes de Topología Diferencial para detalles, complementos y referencias adicionales.

(una representación del grupo de permutaciones S_3 de tres elementos) sobre el espacio reducido da la cúspide ordinaria mostrada más arriba.

Esta descripción se extiende a polinomios de grado arbitrario d obteniéndose asimismo una representación del grupo de reflexión asociado a las permutaciones de d elementos que dejan invariante el hiperplano $r_1 + \ldots + r_d = 0$.

Ejercicio.- Reinterpreta la demostración del Teorema Fundamental del Álgebra en términos de la Geometría del Lugar Discriminante asociado a la ecuación general de grado n. *Indicación:* Utiliza la restricción al hiperplano $\sum_{i=1}^{n} r_i = 0$ de los generadores del grupo simétrico (que actúa intercambiando las raíces) sobre el espacio n-dimensional parametrizado por las raíces $r_1, \ldots, r_n$.

1.5.3. *Números algebraicos.* Se llaman *números algebraicos* y se denota mediante $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ al conjunto de todos los elementos $x \in \mathbb{C}$ que satisfacen una ecuación polinomial arbitraria

$$g(z) \ = \ a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z_{n-1} + z_n = 0 \ , \ n > 0$$

Se tiene una colección de inclusiones

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} & \subset & \mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} & \subset & \overline{\mathbb{Q}} \\ & & & & \cap & & \cap \\ & & & & \mathbb{R} & \subset & \mathbb{C} \end{array}$$

1.5.4. *Números trascendentes y períodos.* A los números que no son algebraicos se les llama *trascendentes.* Los números algebraicos $\overline{\mathbb{Q}}$ forman un conjunto numerable, pero el conjunto de los trascendentes es no numerable (Cantor, 1873). Dentro de los números trascendentes $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ están los *períodos* que han aparecido en relación con un gran número de problemas y conjeturas donde se solapan diferentes ramas de las matemáticas.

Un *período* es un número complejo cuyas partes real e imaginaria son valores de integrales absolutamente convergentes de funciones racionales con coeficientes racionales sobre dominios de $\mathbb{R}^n$ dadas por desigualdades polinómicas con coeficientes racionales.

Por construcción, los períodos forman un conjunto numerable. Existe una relación entre períodos y soluciones ecuaciones diferenciales que dio lugar a una extensa literatura en la segunda mitad del siglo XIX que afecta al grupo de monodromía de las ecuaciones diferenciales sobre espacios no simplemente conexos y que ahora se reformula de manera sintética en términos de la homología. Sobre esta cuestión volveremos varias veces y se desarrolla de una forma más sistemática a partir del Módulo 3 (Complejos) y en el bloque II (Topología Geométrica).

Desde otro punto de vista, buena parte de los problemas computacionales sólo se pueden resolver sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ o, en el caso trascendente, sobre períodos. Esta simple observación ha dado lugar a la reaparición de períodos en relación con la computabilidad de soluciones de sistemas de ecuaciones algebraicas.

2. **Espacios punteados y Grupos de Homotopía**

Para poder garantizar el carácter de invariante topológico (modulo homeomorfismos) del grupo fundamental, hay que recuperar el enfoque original de Riemann (1857) y el de Poincaré (1892), pero planteándolo en la categoría apropiada. La formalización del enfoque de Riemann lleva de forma natural a la introducción de los espacios punteados (primera subsección) asociados a la prolongación de funciones analíticas, mientras que la formalización de la composición de caminos (sin PL-estructura superpuesta) lleva a la noción de clases de equivalencia para aplicaciones homótopas entre espacios punteados.

2.1. **Espacios punteados.** En esta subsección se revisan algunas de las nociones introducidas en el Capítulo 1 en relación con la selección de un punto "privilegiado" ó "significativo" $x_0 \in X$ para la construcción de objetos (caminos, aplicaciones, etc), adoptando un enfoque funtorial para los objetos $(X; x_0)$ y morfismos $(X; x_0) \to (Y; y_0)$ con $f : X \to Y$ y $f(x_0) = y_0$

2.1.1. *Nociones básicas.* Un *espacio punteado* es un par (X, x_0) donde X es un espacio topológico y $x_0 \in X$ es un punto al que se llama *punto base de* X

Una *aplicación de espacios punteados* $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ es una aplicación continua $f : X \to Y$ tal que $f(x_0) = y_0$

2.1.2. *Enfoque categorial. Definición.-* Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste en

- una colección de objetos ob$(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$;
- dados dos objetos $X, Y \in$ ob$(\mathcal{C})$, un conjunto de *morfismos* $\mathcal{C}(X, Y)$ (también llamados flechas o aplicaciones) de X en Y;
- dados tres objetos $X, Y, Z \in$ ob$(\mathcal{C})$ una *aplicación de composición:*

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z)$$

Habitualmente y aunque sea un abuso de notación, se denota a la categoría mediante los objetos, sobrentendiendo los morfismos; así p.e. se habla de la categoría de los conjuntos o de los grupos, sin especificar las aplicaciones de inclusión o los homomorfismos entre grupos como los correspondientes morfismos de dichas categorías.

2.1.3. *Categorías en Homotopía.* Las *categorías más relevantes* en *Teoría de Homotopía* que hemos encontrado hasta ahora son:

- La categoría topológica **Top** de espacios topológicos y aplicaciones continuas.
- La categoría topológica $\mathbf{Top}_*$ de espacios punteados (X, x_0) y aplicaciones punteadas $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ con $f(x_0) = y_0$
- La categoría $\mathbf{Top}^2$ de pares de espacios (X, A) y aplicaciones entre espacios $f(X, A) \to (Y, B)$ con $f(A) \subseteq B$

Para caracterizar las clases de homotopía (es decir, módulo una relación de equivalencia) en la categoría $\mathbf{Top}_*$ es conveniente adoptar un marco más general como es el de la homotopía relativa.

2.2. **Homotopía relativa.** El carácter relativo se entiende siempre con respecto a un subconjunto (punto, subespacios, etc), incluyendo el caso punteado y el de la homotopía relativa para pares (X, A).

Este enfoque se extiende de forma natural a ternas de la forma (X, A, U) donde $U \subset A$ es un abierto cuya adherencia está contenida en A; la consideración de estas ternas juega un papel importante en resultados de "escisión" (supresión del subconjunto U que no altera los invariantes topológicos) y se utiliza sobre todo en teorías de (co)homología o en aspectos más avanzados de las conexiones entre homotopí y (co)homología que se presentan en el módulo 3. Por ello, de momento nos restringimos al caso de pares.

2.2.1. *Aplicaciones homótopas con respecto a un subconjunto. Definición.-* Sean X, Y espacios topológico y $A \subset X$. Denotemos mediante $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones cuyas restricciones sobre A coinciden. Decimos que f *es homótopa a* g *con respecto al subconjunto* A si existe una aplicación

$$F : X \times I \to Y \;\;|\;\; F(a, t) = f(a) = g(a) \forall a \in A \;,\; \forall t \in I$$

En ese caso escribimos $f \sim_A g$ ó $f \sim g$ $(rel\ A)$

2.2.2. *Homotopía con respecto a un punto.* Supongamos que (X, x_0) e (Y, y_0) son espacios punteados y que $f, g : X \to Y$ son aplicaciones punteadas.

Definición.- Con la notación anterior, se dice que las aplicaciones entre espacios punteados $h, f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ son homótopas si son homótopas con respecto a x_0

Ejercicio.- Demuestra que la condición de ser aplicaciones homótopas para una aplicación punteada equivale a que la homotopía entre f y g tenga una sección $X \times \{t\} \subset X \times I$ con (x_0, t) como punto base.

Denotamos mediante $[X, Y]_*$ al conjunto de *clases de homotopía punteada* de aplicaciones de X en Y.

2.2.3. *Relación de equivalencia.* De forma análoga al caso general, la homotopía punteada define una relación de equivalencia sobre el conjunto de aplicaciones punteadas de un espacio (X, x_0) en (Y, y_0) (ver más abajo). Por ello, la composición de clases de homotopía de aplicaciones punteadas está bien definida (no depende del representante elegido). Estas propiedades elementales justifican la aproximación categorial que se comenta en el apartado siguiente.

Lema.- La homotopía punteada define una relación de equivalencia sobre el conjunto de aplicaciones punteadas de un espacio (X, x_0) en (Y, y_0)

Demostración del lema: Consideremos $f, g : (X, x_0) \to (Y.y_0)$

- La propiedad reflexiva $[f \sim f]$ es consecuencia de la homotopía constante κ_f definida por $\kappa_f(x, t) = f(x)$.
- La propiedad simétrica $[f \sim g \Rightarrow g \sim f]$ se obtiene invirtiendo el sentido del recorrido de la homotopía $H : X \times I \to Y$ para $f \sim g$, es decir, haciendo $H^{-1}(x, t) := H(x, 1 - t)$.

- La propiedad transitiva [$H_{fg} : f \sim g$ y $H_{gh} : g \sim h$ implican $f \sim h$] se obtiene construyendo H_{fh} mediante composición: $H_{fh}(x,t) = H_{fg}(x,2t)$ si $0 \leq t \leq 1/2$ y $H_{fh}(x,t) = H_{gh}(x,2t-1)$ si $1/2 \leq t \leq 1$

2.2.4. *Una aproximación categorial. Definición.-* La categoría de homotopía de espacios punteados es la categoría cuyos objetos son espacios punteados y cuyos morfismos son las clases de homotopía de aplicaciones punteadas $(X,x_0) \to (Y,y_0)$.

De la misma forma que $[X,Y]$ denota las clases de homotopía de las aplicaciones entre los espacios X e Y, denotaremos mediante $[(X,x_0),(Y,y_0)]$ a las clases de homotopía de las aplicaciones $(X,x_0) \to (Y,y_0)$ entre espacios punteados [8]

Habitualmente, trabajaremos con espacios punteados y aplicaciones punteadas, así como las homotopías definidas sobre este tipo de espacios, sin mencionar explícitamente que estamos trabajando con clases de equivalencia por la relación que acabamos de definir.

Definición.- Dado un par de espacios (X,A) y dos aplicaciones $f,g : X \to Y$ verificando que $f(a) = g(a)$ para cualquier $a \in A$, diremos que f,g son *homótopas con respecto al subespacio topológico* A si existe una homotopía $H : X \times [0,1] \to Y$ que es constante sobre A, es decir,

$$H(a,t) = f(a) = g(a) \qquad \forall a \in A\ ,\ \forall t \in [0,1]$$

Esta definición se extiende de forma natural al caso de aplicaciones $f,g : (X,A) \to (Y,B)$ entre pares de espacios topológicos. Dicha extensión permite hablar del conjunto de clases de homotopía $[(X,A),(Y,B)]$ entre pares de espacios topológicos. Por ello, tiene sentido hablar de la categoría de espacios punteados y de la categoría de pares de espacios en el sentido especificado al final de la primera subsección (ver §2.1 más arriba).

Ejercicio.- Completa los detalles del párrafo precedente, extendiendo la construcción realizada para espacios punteados al caso de pares de espacios.

Ejercicio (avanzado).- Esboza un marco topológico para el reconocimiento de objetos deformables que contienen componentes fijas en su interior [9].

2.3. **Grupo fundamental de un espacio.** El grupo fundamental de un espacio proporciona información sobre el comportamiento cualitativo de los diferentes tipos de caminos que se pueden trazar sobre un "espacio"; en el capítulo 1 se han presentado diferentes motivaciones para este problema. El caso planar es el más simple pues aunque los objetos puedan ser poligonales se pueden reducir a un punto utilizando los argumentos presentados en la primera sección de este capítulo; por ello, podemos suponer que los obstáculos ó "agujeros" son una colección finita de puntos $\{p_1, \ldots p_N\}$ a los que llamaremos "sitios" [10].

[8] En ocasiones se denota mediante $hTop_*$ a esta categoría, aunque la notación entre corchetes es más frecuente en relación con las aplicaciones a Geometría.

[9] Algunos algoritmos para la automatización de esta tarea se presentan en el módulo 4 del CEViC

[10] Esta terminología es la utilizada en Geometría Computacional para los Diagramas de Voronoi, aunque en Topología Algebraica no suponemos que el espacio admita una métrica

El caso volumétrico es más complicado, pues el objeto a estudiar es el complementario de un conjunto finito de curvas (en particular, configuraciones espaciales de rectas) que desemepeñan el papel similar a objetos de codimensión 2 del caso planar descrito en el párrafo anterior. Para entender la complejidad de este caso, basta pensar en cómo describir el complementario de nudos tóricos de tipo (p, q) en el espacio ordinario; a pesar de esta complicación, este tipo de nudos son los más sencillos y aparecen en múltiples contextos de Matemáticas y sus aplicaciones (en Biología proporciona el soporte topológico para modelos de ADN y ARN, p.e.)

Para simplificar, supondremos inicialmente que los caminos son lazos simples, es decir, con extremos inicial y final en un punto $\underline{p}_0$, y sin autointersecciones. El resultado fundamental de esta subsección muestra que el grupo de homotopía (construido como conjunto de clases de equivalencia de caminos) es invariantes por “deformaciones topológicas”, es decir, es un invariante de la clase de homeomorfismo del espacio.

En el primer apartado se describen las clases de equivalencia y la composición que es clave para facilitar recorridos y para descomponer problemas complicados en otros más sencillos. En los dos últimos apartados se describe la estructura de grupo de $\pi_1(X, x_0)$ que permite analizar la independencia de la construcción del grupo fundamental con respecto al punto base $x_0 \in X$ para cada componente conexa de X.

El paso de caminos a lazos y la introducción de relaciones de equivalencia permite reemplazar las clases de homotopía relativas a (los extremos del) intervalo I por clases de homotopía relativas a la circunferencia $\mathbb{S}^1$, es decir, el grupo fundamental se reescribe ahora como $[\mathbb{S}^1, X]_*$. Este enfoque es clave para la extensión de esta metodología de grupos de homotopía de orden superior.

2.3.1. *Clases de equivalencia de caminos.* Según la versión original de Poincaré (1892), dos *lazos* γ_1, γ_2 con base en $\underline{x}_0$ son equivalentes si existe una homotopía entre ellos que deja invariante $\underline{x}_0$. Con más generalidad, dos *caminos* $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ con extremos $\underline{x}_0$, $\underline{x}_1$ son equivalentes si existe una homotopía entre ellos que deja invariantes los extremos.

En los términos de la subsección anterior de espacios punteados, la definición original de Poincaré se reformula en los términos siguientes:

Definición.- Dos *caminos* γ_1, γ_2 con extremos $\underline{x}_0$, $\underline{x}_1$ son equivalentes si son homótopos como aplicaciones $I \to X$ con respecto al conjunto $\{0, 1\}$

La clase de equivalencia de γ se denota mediante $[\gamma]$. Sobre el conjunto de clases de equivalencia por dicha relación se define la ley de grupo dada por la composición; al grupo cociente de caminos cerrados en $\mathcal{C}$ basados en $\underline{x}_0$ se le llama el grupo fundamental (Poincaré, 1895) y se le denota mediante $\pi_1(\mathcal{C}, \underline{x}_0)$

2.3.2. *Composición de clases de caminos.* Dados dos caminos γ, δ en X tales que $\delta(0) = \gamma(1)$ se define el producto $\delta \circ \gamma$ como la composición que resulta de aplicar primero δ y luego γ, es decir,

$$\delta \circ \gamma(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \delta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Ejercicio.- Comprueba que el paso al cociente es compatible con la ley de grupo, es decir,

$$[\delta \circ \gamma] \ = \ [\delta] \circ [\gamma]$$

Dado un camino $\gamma : I \to X$ se define su inverso $\gamma^{-1} : I \to X$ mediante

$$\gamma^{-1}(t) \ := \ \gamma(1-t) \ \forall t \in [0,1]$$

2.3.3. *Clases de lazos en espacios punteados.* Supongamos ahora (X, x_0) es un espacio punteado. Un *lazo* basado en $x_0 \in X$ es un camino $\gamma : I \to X$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$; en otras palabras, el dominio de un lazo no es el intervalo $I = [0,1]$ sino la circunferencia $\mathbb{S}^1$

Denotamos mediante $\pi_1(X, x_0)$ al conjunto de clases de homotopía de los lazos basados en x_0. El producto de lazos es un lazo y definimos el *lazo constante* $e : I \to X$ mediante $e(t) = x_0$ (elemento neutro para la composición).

2.3.4. *Estructura algebraica. Proposición.-* El conjunto $\pi_1(X, \underline{x}_0)$ es un grupo con respecto al producto definido por la composición.

Ejercicio.- Demuestra el resultado anterior utilizando las representaciones gráficas habituales (ver Greenberg, p.e.)

2.4. **Clasificación de espacios a partir del grupo fundamental.** Las estrategias de descomposición celular, el pegado y la expresión local en términos de productos proporciona estrategias para calcular los grupos de homotopía de un gran número de espacios. Las dos primeras estrategias se desarrollan más adelante. Por el momento, nos centramos en la expresión como producto que muestra la compatibilidad del cálculo del grupo fundamental con respecto al producto de espacios, cuestión que se aborda en el primer apartado. A continuación se demuestra que el grupo fundamental es un invariante topológico.

Por último se reformulan algunos resultados en el lenguaje categorial, con objeto de facilitar una mayor familiaridad con este lenguaje. La idea básica para los aspectos funtoriales consiste en que la correspondencia $(X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$ que a cada espacio punteado le asocia el grupo fundamental es un funtor $h\mathcal{T}op_* \to Gr$ de la categoría de espacios punteados en la categoría de grupos.

2.4.1. *Grupo fundamental de un producto. Proposición.-* El grupo $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ si los espacios punteados (X, x_0) e (Y, y_0) son conexos.

Demostración Recordemos de la topología general que la aplicación $f : Z \to X \times Y$ es continua si y solo si las aplicaciones $g : Z \to X$ y $h : Z \to Y$ definidas por $f(z) = (g(z), h(z))$ son continuas. En consecuencia, un lazo γ en $X \times Y$ basado en (x_0, y_0) es lo mismo que un par de lazos γ_1 en X basado en x_0 y γ_2 en Y basado en y_0.

Análogamente una homotopía f_t de un lazo en $X \times Y$ es lo mismo que un par de homotopías g_t y h_t de los correspondientes lazos en X e Y. Por ello, se tiene una aplicación biyectiva

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

que es un homomorfismo de grupos, lo cual termina la demostración (razonarlo).

2.4.2. *Isomorfismo inducido por un homeomorfismo. Proposición.-* Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo con $f(x_0) = y_0$. Entonces, f induce un isomorfismo $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ entre los grupos fundamentales

Ejercicio.- Demuestra la proposición anterior. *Indicación:* Utiliza la construcción de caminos a partir de f y la compatibilidad de construir caminos con el paso al cociente

Corolario.- Si $\pi_1(X, x_0)$ no es isomorfo a $\pi_1(Y, y_0)$, entonces X no puede ser homeomorfo a Y

Para calcular los grupos fundamentales necesitamos mostrar algunos ejemplos básicos (a partir de los cuales deducir otros más complicados) mediante las operaciones introducidas en el capítulo anterior y mostrar cómo se pueden "elevar" los cálculos mediante aplicaciones y espacios recubridores (capítulo 4).

2.4.3. *Resultados básicos.* La correspondencia que a cada espacio punteado (X, x_0) le lleva en el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ define un funtor de la categoría $h\mathcal{T}op$ (de espacios topológicos y clases de homotopía de aplicaciones) en la categoría $\mathcal{G}r$ de grupos.

Una aplicación $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ entre espacios punteados induce una aplicación entre grupos fundamentales

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) \ \mid \ f_*([\omega]) := [f \circ \omega]$$

2.4.4. *Algunas consecuencias. Corolario.-* Consideremos una aplicación $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Entonces, la aplicación inducida entre los grupos fundamentales

$$f_* : \pi_1(\mathbb{S}^1; (1,0)) \ \to \ \pi_1(\mathbb{S}^1; (1,0))$$

es la multiplicación por n como aplicación $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Ejercicio.- Demuestra el corolario.

3. **Homotopía de esferas**

Algunas motivaciones para el estudio de los grupos de homotopía de esferas n-dimensionales $\mathbb{S}^n$ proceden de los hechos siguientes:

- Proporcionan el primer ejemplo de espacios no-contractibles sin borde.
- Son las piezas básicas permiten construir complejos celulares mediante adjunción de pares equivalentes a $(\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{S}^n)$ donde $\mathbb{D}^{n+1}$ es el disco unidad cuyo borde es $\mathbb{S}^n$.
- Permiten construir embebimientos que generalizan los lazos ordinarios a nudos $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ de gran interés para diferentes áreas de las Matemáticas y sus aplicaciones.
- Facilitan los elementos básicos para el estudio de fibraciones topológicamente no-triviales como la fibración de Hopf $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ con fibra $\mathbb{S}^1$ y sus extensiones.

Para $n \geq 2$ el primer grupo de homotopía es nulo (cualquier lazo es contractible) y el n-ésimo grupo de homotopía es isomorfo a $\mathbb{Z}$, pero más allá de estos resultados básicos (casi triviales) es difícil decir algo más. El mayor problema es la dificultad para encontrar procedimientos efectivos que permitan calcular *todos* los grupos de homotopía para una esfera con dimensión arbitraria.

Los resultados utilizados para el cálculo del grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^n)$ "pegando grupos" asociados a los abiertos que recubren $\mathbb{S}^n$ no se extienden a grupos de homotopía de orden más elevado; no se dispone de resultados similares al Teorema de Seifert-Van Kampen relativos a π_k para $k \geq 2$. Una estrategia alternativa consiste en estudiar fibraciones (Hurewicz) sobre esferas de dimensión más baja, pero nuevamente las fibraciones por esferas presentan unas dificultades considerables; los primeros cálculos fueron realizados por H.Hopf, pero están lejos de ser triviales [11]

A la vista de las dificultades del problema general, se empieza estudiando el caso de la circunferencia $\mathbb{S}^1$. En este caso, hay que tener presente su estructura como variedad y las funciones definidas sobre la variedad (enfoque funtorial). Como variedad topológica, $\mathbb{S}^1$ está recubierta por dos copias de $\mathbb{R}^1$; asimismo, las funciones esenciales iniciales se definen sobre el plano menos un punto (equivalente a una circunferencia) y, como ya se ha comentado anteriormente, para cualquier n la función $f(z) = z^n$ define un recubrimiento de n hojas sobre el que es posible extender las funciones definidas sobre el plano punteado para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Este resultado sugiere que $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ debe ser isomorfo a $\mathbb{Z}$, pero la demostración no es elemental y proporciona el primer resultado topológico importante no trivial.

La representación que permite relacionar los diferentes conceptos relativos a la circunferencia y las funciones definidas sobre ella en términos de la recta es la *función exponencial* definida por el homomorfismo continuo

$$\phi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{S}^1 \;\mid\; \phi(x) = e^{2\pi i x} \; \forall x \in \mathbb{R}^1$$

que es una aplicación *abierta* (compruébalo como ejercicio)

[11] Estas cuestiones se abordan en los módulos 3 y 4

3.1. **Grupo fundamental de la circunferencia.** Como ya se ha comentado anteriormente, $\pi_1(\mathbb{S}^1,(0,1)) \simeq \mathbb{Z}$. Una justificación heurística es casi evidente: las clases de lazos representan el número entero de vueltas a partir de un punto fijo. Sin embargo, este argumento debe ser formalizado en términos de clases de homotopía de lazos recurriendo a la topología de la circunferencia.

Para gestionar los solapamientos entre abiertos, se recurre a la recta $\mathbb{R}$ como "espacio recubridor" (con un número infinito de hojas) de la circunferencia $\mathbb{S}^1$. Ambos espacios están relacionados por la aplicación exponencial compleja sobre la circunferencia y las infinitas determinaciones del logaritmo (inversa de la exponencial) sobre la recta.

La elevación y descenso de caminos basada en dichas aplicaciones intercambia las funciones multivaloradas sobre la circunferencia con las "ramas" (funciones univaloradas) sobre la recta. Este hecho permite trasladar resultados del Análisis Real al Análisis Complejo, proporcionando una conexión estructural con las Funciones Analíticas de Una Variable Compleja. [12]

Por último, se presentan algunas consecuencias de resultados ya conocidos relativos a la comparación entre el disco $\mathbb{D}^2$ y la circunferencia $\mathbb{S}^1$.

3.1.1. *Isomorfismo con los enteros. Teorema.*- El grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^1,(0,1))$ basado en el punto $(0,1) \in \mathbb{S}^1$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ (en particular, es abeliano).

Demostración: A cualquier punto $x \in \mathbb{S}^1$ le asociamos un número real definido salvo sumando por $2\pi ik$ donde $k \in \mathbb{Z}$. Por ejemplo, el punto base $(0,1) \in \mathbb{S}^1$ está asociado con la colección de puntos $\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Con esta notación, cualquier lazo $\omega : I \to \mathbb{S}^1$ corresponde a una función multivalorada ω' sobre I cuyo valor está definido salvo un sumando $2\pi k$; los valores que toma en 0 y en 1 vienen dados por la colección de números $\{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Denotemos ahora mediante $\omega'' : I \to \mathbb{R}$ a una función que es una rama univalorada de ω' si ω'' es continua, y consideremos su único valor en un punto $x \in I$ perteneciente al conjunto de valores que toma ω' en x

3.1.2. *Un lema técnico. Lema.*- La función multivalorada ω' tiene una rama univalorada ω'' que es continua que está determinado de forma única por la condición inicial $\omega''(0) = 0$

Demostración.- En efecto, denotemos mediante $n \in \mathbb{N}$ a un entero positivo tal que si $|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{n}$ entonces los puntos $\omega(x_1), \omega(x_2)$ no son diametralmente opuestos.

Hagamos $\omega''(0) = 0$. Para $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ elegimos para $\omega''(x)$ el valor de $\omega'(x)$ para el que $\omega'(x) < \pi$.

Entonces, para $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}$ elegimos para $\omega''(x)$ el valor de $\omega'(x)$ para el que $\omega'(x)$ para el que $\omega'(x) \leq \omega''(\frac{1}{n})$ y así sucesivamente.

3.1.3. *Funciones uni y multivaloradas.* En este apartado se describen algunas relaciones básicas entre funciones uni y multivaloradas que son de gran interés para interpretar resultados bien conocidos de Funciones de Una Variable Compleja. Para

[12] Esta idea se extiende de forma natural a funciones multivaloradas definidas sobre variedades compactas (no necesariamente orientables) que se elevan a funciones uni-valoradas sobre "ramas" correspondientes a diferentes determinaciones.

empezar, nótese que con la notación del apartado anterior la función $\omega'' : I \to \mathbb{R}$ tiene las propiedades siguientes:

- $\omega''(1)$ es un múltiplo entero de 2π
- Una homotopía $\omega'(t)$ del lazo ω induce una homotopía de la función univalorada ω''_t de ω''

Nótese también que el entero $k = \frac{\omega''(1)}{2\pi}$ no cambia por homotopía porque suponemos que sólo toma un conjunto discreto de valores. Por ello, este entero sólo depende de la clase de homotopía de ω', es decir, es un elemento de $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ que representa ω

Ahora bien, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ existe un lazo ω para el que $\frac{\omega''(1)}{2\pi} = k$, pues basta tomar

$$\omega' \;=\; h_k \;=\; 2\pi kx$$

Finalmente, si ω y λ son dos lazos verificando que $\omega''(1) = \lambda''(1)$, entonces ω'' y λ'' son homótopas en la clase de funciones $I \to \mathbb{R}$ que toman valores fijos en 0 y en 1, siendo ambas homótopas a h_k (verificarlo como ejercicio).

Nótese que la homotopía construida deforma el camino en el espacio base en un producto de n arcos $a_1, \ldots, a_m$ todos ellos de la forma ω''_t (uno por cada "determinación") que podemos considerar equivalentes a una semicircunferencia (caso límite para $n = 2$). Si los n arcos tienen la misma orientación entonces, el producto $\Pi_{i=1}^m a_i$ es un camino cerrado que debe ser de la forma ω^n para algún n (en este caso $m = n$). Sin embargo, si el arco a_{i+1} (correspondiente a una elevación $\omega''(t)$) tiene orientación opuesta a la del arco a_i, entonces se tienen dos casos (haz un dibujo para ilustrarlo):

- Si la longitud de a_{i+1} es más corta que la de a_i, entonces tomamos $a_i := a'_i a_{i+1}^{-1}$, por lo que $a_1 \ldots a_i a_{i+1} \sim a_1 \ldots a_{i-1} a'_i$
- Si la longitud de a_{i+1} es mayor que la de a_i, hacemos $a_{i+1} := a_i^{-1} a'_{i+1}$, por lo que $a_1 \ldots a_i a_{i+1} \sim a_1 \ldots a_{i-1} a'_{i+1}$

En ambos casos se obtiene una camino que es homótopo al inicial con un número de factores más pequeño en la que todos los factores tienen la misma orientación. Si todos los caminos que aparecen como factores tienen la misma orientación, hemos terminado. En caso contrario, iteramos la construcción anterior hasta que todos los factores tengan la misma orientación

Para concluir, la correspondencia $\omega \mapsto \frac{\omega''(1)}{2\pi}$ induce una aplicación biyectiva entre los conjuntos

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, (0, 1)) \to \mathbb{Z}$$

Para ver que es un isomorfismo de grupos, basta observar que

$$(h''_k \circ h''_\ell)(1) \;=\; h''_{k+\ell}(1)$$

3.1.4. *Observaciones sobre la demostración.*

- Es MUY instructivo comparar esta demostración con la que aparece en Greenberg (1966).

- El argumento utilizado al final de la demostración hace referencia a la parte elemental de la Teoría de Representación de Grupos. En particular, la aplicación exponencial proporciona una representación del grupo aditivo real (traslaciones ordinarias) en el grupo multiplicativo sobre la circunferencia.
- Una extensión de la idea anterior a la topología de las aplicaciones recubridoras $p : \tilde{X} \to X$ (capítulo 4 de este módulo), muestra que el objeto a estudiar está dado por las representaciones del grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ en $\pi_1(\tilde{X}, y)$ con $p(y) = x$. El grupo que "intercambia las determinacióness" correspondiente a las diferentes soluciones en el espacio base X recibe el nombre de *grupo de monodromía*. El primer ejemplo no-trivial se ha mostrado anteriormente en relación con el lugar discriminante para ecuaciones genéricas de grado 3.
- Las relaciones entre grupos de monodromía y soluciones de sistemas de EDO son de gran importancia para un tratamiento sintético de las ecuaciones diferenciales algebraicas dadas sobre superficies de Riemann ó variedades más generales.
- La demostración presentada en el apartado anterior se enmarca dentro del marco de la prolongación analítica de soluciones para funciones multivaloradas introducido por Puiseux y Riemann (a mediados del s.XIX), y extendido por Klein, Moebius y Poincaré en relación con la clasificación de superficies compactas.
- Con más generalidad, la utilización de la aplicación exponencial permite relacionar (el haz $\mathcal{O}_X$ de) las funciones regulares definidas sobre una variedad analítica X con (el haz $\mathcal{O}_X^*$ de) las unidades definidas sobre X. El núcleo del homomorfismo resultante es nuevamente $\mathbb{Z}$. Este resultado aparentemente trivial permite relacionar la topología, la Geometría Algebraica y la Geometría Analítica de las Variedades Complejas.[13]

3.2. **Puntos fijos.** El propósito de esta subsección es mostrar una primera versión del *Teorema del Punto Fijo de Brouwer*. La diversidad de Teoremas de Punto Fijo es enorme, pues afecta a una cuestión de *existencia para soluciones* de sistemas de ecuaciones con especial atención a los casos algebraico y diferencial. En efecto, basta considerar el problema de existencia de soluciones para un sistema de ecuaciones

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n$$

donde suponemos que las f_i son funciones reales continuas en $x_1, \ldots, x_n$. Este sistema corresponde frecuentemente al lugar de equilibrio de un sistema de EDO dado localmente por $\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ para $1 \leq i \leq n$. Si hacemos

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = f_i(x_1, \ldots, x_n) - x_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

La función $G = (g_1, \ldots, g_n)$ y aplica cierto subconjunto de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Si encontramos un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ tal que G esté definida en X y $G(X) \subseteq X$, entonces por el Teorema del Punto Fijo tendremos que G tiene un punto fijo en X, que corresponde precisamente a una solución del sistema original $\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ donde $1 \leq i \leq n$.

[13] Esta idea se explota sobre todo a partir del módulo 3 (Haces, Cohomología, Esquemas) de la materia A_3 (Geometría Algebraica).

Para motivar el enfoque topológico, empezamos analizando en qué difieren la circunferencia y el disco

3.2.1. *La circunferencia y el disco. Proposición.-* La circunferencia $\mathbb{S}^1$ no es un retracto de deformación del disco $\mathbb{D}^2$

Demostración Debemos demostrar que no existe una aplicación $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ cuya restricción a $\mathbb{S}^1$ sea la identidad. RPRA y supongamos que existiera dicha f. En ese caso, denotemos mediante $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{D}^2$ es la aplicación inclusión, de modo que $f \circ i = 1_{\mathbb{S}^1}$. Por tanto, la composición

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) \;\to\; \pi_1(\mathbb{D}^2, (1,0)) \;\to\; \pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))$$

es la identidad; por el teorema precedente, tenemos que $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) = \mathbb{Z}$ y como $(\mathbb{D}^2, (1,0))$ es contractible tenemos que la aplicación

$$\mathbb{Z} \;\to\; 0 \;\to\; \mathbb{Z}$$

debe ser la aplicación identidad, lo cual es imposible.

3.2.2. *Teorema de Brouwer. Corolario (Brouwer).-* Cualquier aplicación continua de $\mathbb{D}^2$ en sí misma tiene un punto fijo

Demostración.- Supongamos contrariamente que $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ no tuviera puntos fijos. Para cualquier $x \in \mathbb{D}^2$, unimos x con $f(x) \in \mathbb{D}^2$ mediante una línea. Moviéndonos a lo largo de esta línea desde $f(x)$ hasta $x \in \mathbb{D}^2$ hasta que alcancemos un punto $r(x) \in \mathbb{S}^1$. Entonces, la aplicación $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ sería una retracción del disco $\mathbb{D}^2$ en la circunferencia $\mathbb{S}^1$, lo cual es imposible.

Nota.- El resultado anterior es un caso particular del Teorema del Punto Fijo de Brouwer que es válido para dimensión arbitraria n y que se demuestra más adelante; una demostración típica utiliza argumentos de tipo homológico.

3.2.3. *La circunferencia, el disco punteado y la banda de Moebius. Lema.-* La circunferencia $\mathbb{S}^1$ es un retracto del disco punteado $\mathbb{D}^2 - \{\underline{0}\}$ y también de un disco horadado en el centro ó cualquier región del plano limitada por dos curvas simples cerradas.

Lema.- El grupo fundamental de la banda de Moebius M es isomorfo a $\mathbb{Z}$

Ejercicio.- Demuestra las afirmaciones precedentes. *Indicación:* Para la banda de Moebius utiliza que la circunferencia “central” es un retracto de deformación de M y la invariancia homotópica por retractos de deformación)

El ejercicio precedente pone de manifiesto que la circunferencia, el cilindro y la banda de Moebius tienen el mismo grupo fundamental. Por ello, el primer grupo de homotopía no permite distinguir entre superficies orientables y no-orientables. En el módulo 2 de la asignatura se introducen la homología y la cohomología de grado máximo con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ que permiten discriminar entre variedades orientables y no-orientables.

3.2.4. *Pegando datos.* En el capítulo anterior se ha visto cómo los datos a pegar vienen dados por abiertos coordenados que son homeomorfos a discos abiertos ó al interior de paralelepípedos. Asimismo, la circunferencia $\mathbb{S}^1 = Fr(\overline{\mathbb{D}^2})$ como frontera del disco cerrado es homeomorfa al borde de un cuadrado, argumento que se extiende a dimensión arbitraria para una esfera y la frontera del paralelepípedo. El ejercicio siguiente muestra una propiedad para pegar datos locales:

Ejercicio: Supongamos que el espacio $X = U \cup V$ es unión de dos abiertos *simplemente conexos* con intersección $U \cap V \neq \emptyset$ y conexa por arcos. Entonces X es simplemente conexo (*Indicación:* Visualizarlo con la esfera).

Observación (Greenberg).- El resultado precedente es un caso particular del Teorema de Van Kampen según el cual el grupo fundamental $\pi_1(X)$ es la "suma amalgamada" de $\pi_1(U)$ y de $\pi_1(V)$. Lamentablemente, se desconoce un resultado análogo para grupos de homotopía de orden superior.

3.2.5. *Ejercicios avanzados. Ejercicio 1.-* Demuestra que la esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa para $n \geq 2$ (*Indicación:* utiliza el ejercicio precedente). ¿Qué ocurre para $n < 2$? ¿Es contractible $\mathbb{S}^n$? (razona la respuesta)

Ejercicio 2: Extensión al caso convexo y compacto.- Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto convexo y compacto del plano cartesiano. Demuestra que cualquier aplicación $f : K \to K$ tiene un punto fijo. (*Indicación.-* Razona de forma similar a la demostración de Brouwer para el plano usando que cualquier conjunto plano convexo y compacto y con interior no vació es un disco cerrado).

Comentario: La conclusión es la misma para subconjuntos convexos y compactos con interior no vacío del espacio cartesiano ordinario, aunque la versión general del Teorema de Brouwer para dimensión arbitraria se muestra en el módulo 2 de estas notas.

Cuestión.- ¿Es cierto un resultado análogo para un subconjunto no convexo? La adaptación más inmediata del argumento anterior daría una respuesta negativa, pues incluso para un conjunto estrellado St si tratamos de imitar la demostración llevada a cabo para construir la retracción r de $\mathbb{D}^2$ en $\mathbb{S}^1$, es fácil ver que si $\underline{x}$ y $f(\underline{x})$ están situados en zonas disjuntas de las regiones convexas, entonces el segmento $s_{\underline{x}} :=< \underline{x}, f(\underline{x}) >$ no está contenido en el polígono estrellado St. Por ello, la intersección $s_{\underline{x}} \cap St$ contiene (al menos) tres puntos. Sin embargo, si en lugar de construir dicho segmento, se construye una poligonal con aristas paralelas a las de St más próximas, se obtiene un PL-camino cuya prolongación corta en un único punto al polígono estrellado, lo cual daría la retracción buscada.

Ejercicio.- ¿Es cierto el mismo resultado para un polígono monótono? Razona la respuesta. Este argumento pone de manifiesto que la hipótesis de convexidad no es estrictamente necesaria y proporciona una motivación para el desarrollo de análisis no-convexo para situaciones en las que las restricciones no están dadas por una colección de hiperplanos, sino por objetos no-lineales para los que calculamos PL-aproximaciones, cuyas intersecciones dan regiones no-convexas.

3.3. **Grado topológico.** Una aproximación intuitiva al *grado de un camino cerrado* (lazo) consiste en contar el "número de vueltas" que da el camino en torno a un punto central situado en el interior del lazo. Esta idea intuitiva está relacionada con los recubrimientos ramificados generados por aplicaciones de la forma $f(z) = z^k$ sobre la esfera y sus deformaciones genéricas (dadas como polinomios de grado k). En este caso, el grado algebraico se corresponde con el grado topológico, pero ¿es posible extender este mismo argumento a otras esferas de dimensión superior, a curvas más complicadas que una circunferencia ó, con más generalidad, a recubrimientos de variedades?

Nuevamente, este tipo de cuestiones remite a un estudio de la ramificación para recubrimientos entre curvas que fue iniciado a mediados del siglo XIX por B.Riemann (1826-1866) y desarrollado por A.Hurwitz (1859-1919) para el caso de curvas. El estudio de la ramificación para recubrimientos es un tópico ubicuo en Geometría Algebraica de Variedades, pero aquí sólo se consideran algunos aspectos topológicos básicos relacionados con el caso 1-dimensional [14].

3.3.1. *La circunferencia como cociente de la recta.* Para formalizar la idea del grado relativo a clases de lazos, es conveniente interpretar $\mathbb{S}^1$ como el círculo de radio unidad en el plano que representa los números complejos:

$$\mathbb{S}^1 \ = \ \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ |z| = 1\}$$

La multiplicación compleja induce una estructura de grupo sobre $\mathbb{S}^1$ a partir de la forma módulo-argumental $z = e^{i\theta} = cos\ \theta \ + \ isen\ \theta$. Es claro que

(1) La imagen de $0 \in \mathbb{R}$ es el punto $z = 1$ que corresponde al punto $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$
(2) Si $x - y = 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\phi(x) = \phi(y) \in \mathbb{S}^1$, lo cual sugiere introducir la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \ \exists k \in \mathbb{Z} \mid x - y = 2\pi k$$

(3) La clase $[x] = \{y(= x + 2\pi k) \in \mathbb{R}^1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ define un punto de $\mathbb{S}^1$
(4) $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

En virtud de la descripción del grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^1, (0, 1))$, a cada (clase de homotopía de un) lazo α le podemos asociar un entero $deg(\alpha) = m \in \mathbb{Z}$ que está unívocamente determinado y, por tanto, tiene como representante a la aplicación

$$h_m : I \to \mathbb{S}^1 \ \mid \ h_m(t) := cos(2m\pi t) + isen(2m\pi t)$$

que obviamente tiene grado m (visualizar la construcción anterior para este caso en términos de la prolongación analítica de las soluciones en un punto proporcionada por la fórmula de Moivre).

La aplicación $\mathbb{S}^1 \to \ \mathbb{S}^1$ correspondiente al lazo con invariante n se llama una *aplicación de grado topológico* $n \in \mathbb{Z}$. En particular, una aplicación de $\mathbb{S}^1$ de grado n "envuelve" la circunferencia $\mathbb{S}^1$ en sí misma n veces.

Cuestión.- ¿Puedes extender la construcción presentada para $\mathbb{S}^1$ al producto $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$? Si las funciones inducidas sobre la circunferencia por el paso al cociente de funciones definidas sobre la recta $\mathbb{R}^1$ son periódicas, ¿cómo son las funciones inducidas por el paso al cociente sobre $\mathbb{T}^2$? ¿Puedes extender este argumento al toro m-dimensional $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \ldots^m \ldots \mathbb{S}^1$?

[14] Para detalles y referencias el capítulo 4 (Ramificación) del módulo 5 (Geometría Enumerativa) de la materia A_3 (Geometría Algebraica)

3.3.2. *Relación entre funciones.* Denotemos mediante $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función verificando $\tilde{f}(0) = 0$ y $\tilde{f}(x+2\pi) \sim \tilde{f}(x)$ (extensión de una función periódica). Entonces,

$$\exists n \in \mathbb{Z} \ \mid \ \tilde{f}(x + 2\pi) = f(x) + 2n\pi \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

siendo n fijo. Ahora bien, si $x \sim y = x + 2\pi k$ para algún k, entonces

$$\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x + 2\pi k) - \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x) + 2\pi nk - \tilde{f}(x) = 2\pi nk \ \Rightarrow \ \tilde{f}(y) = \tilde{f}(x)$$

Por consiguiente, $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induce de forma única una aplicación continua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ donde $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ que deja fijo el punto base $(1, 0) \in \mathbb{S}^1$.

Recíprocamente, dada una aplicación $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ que deja fijo $(1, 0) \in \mathbb{S}^1$, se puede definir de forma única una aplicación $\tilde{f} : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ tal que $\tilde{f}(0) = 0$ y $\tilde{)}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi$.

Conclusión.- Existe una correspondencia uno-a-uno entre el conjunto de aplicaciones $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ con $f(1, 0) = (1, 0)$ y el conjunto de aplicaciones $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\tilde{f}(0) = 0$ y $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n$

Definición.- Al entero $n \in \mathbb{Z}$ verificando la condición anterior se le llama el *grado topológico* de f y representa el número de veces que da vueltas f en torno a $\mathbb{S}^1$ cuando x da una vuelta en torno a $\mathbb{S}^1$. Se supone que la circunferencia $\mathbb{S}^1$ está orientada en el sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj), por lo que el número de vueltas aparece contado con su signo correspondiente, es decir, es un número entero.

3.3.3. *Un poco de historia.* El estudio del *grado topológico* de una aplicación tiene aplicaciones estáticas a problemas estáticos relacionados con el análisis de correspondencias (incluyendo puntos fijos o equilibrios), o cuasi-estáticos relacionados con cuestiones de optimización (problemas minimax tipo silla) o desigualdades de tipo variacional para funcionales escalares definidos sobre espacios de funciones con "buenas propiedades" (Banach, p.e.) [15]. En este apartado sólo se comentan algunas cuestiones topológicas relacionadas con el caso estático.

La Teoría Topológica del Grado se ocupa de obtener conclusiones a partir del número de anudación de una curva en el plano complejo. Este problema está estrechamente relacionado con la Teoría de Puntos Fijos que se aborda más abajo; una motivación importante está asociado a la búsqueda de raíces para ecuaciones no-lineales (extendiendo los métodos tipo Newton) y tiene un gran número de aplicaciones clásicas para el análisis en torno al equilibrio (Física, Química, Biología, Ingeniería) siguiendo un enfoque en términos de puntos fijos para aplicaciones (ó correspondencias con más generalidad) y aspectos cualitativos (variación en el número de soluciones, p.e.) en torno a ceros de sistemas dinámicos [16].

Otras aplicaciones más recientes están relacionadas con la identificación de equilibrios no-necesariamente únicos en Teoría Económica (Debreu-Arrow) y algunas cuestiones de Teoría de Juegos (Nash); algunos problemas de investigación conciernen a aspectos topológicos para valores en el Borde (en relación con problemas de

[15] Algunas aplicaciones a Teoría Económica (en relación con la Teoría del Equilibrio General) se comentan en mis apuntes sobre Una aproximación diferencial a la Teoría Económica.

[16] Para un enfoque dinámico del problema ver el módulo 6 (Topología de los Sistemas Dinámicos) de mis apuntes sobre Topología Diferencial.

difusión, p.e.), Caos Determinista (propiedades cualitativas de las soluciones) y, con más generalidad, la Topología de Sistemas Dinámicos no-Lineales.

Más recientemente y en relación con aplicaciones no-lineales entre espacios no-compactos, se ha utilizado en relación con diferentes cuestiones de

- Análisis Funcional: en relación con el grado de aplicaciones compactas en espacios normados (Leray-Schauder)
- Estabilidad y comportamiento cualitativo (soluciones cuasi-periódicas) para soluciones de EDO extendiendo el enfoque basado en análisis de equilibrios
- Bifurcaciones de Sistemas Dinámicos para el caso diferenciable.

Uno de los problemas más difíciles consiste en encontrar métodos eficientes para calcular puntos fijos en problemas no-lineales. La mayor parte son métodos de tipo iterativo que consumen una gran cantidad de recursos computacionales (en términos de CPU) evaluando funciones en cada una de las iteraciones. Es importante acotar la "zona de búsqueda" para limitar la complejidad del algoritmo; en ausencia de modelos estructurales, frecuentemente se utilizan criterios de tipo heurístico.

3.4. **Grupo fundamental de la esfera n-dimensional.** La imagen de una circunferencia $\mathbb{S}^1$ en un espacio topológico genera lazos. Si no hay torsión y el espacio es simplemente conexo, cualquier lazo es contractible. Si el espacio no es contractible, la topología de los lazos (reflejada en el grupo fundamental) permite determinar los "agujeros" de una superficie. El caso más sencillo corresponde a la esfera $\mathbb{S}^n$ que para $n \geq 2$ no tiene agujeros.

3.4.1. *Grupo fundamental de la circunferencia.* El invariante algebraico básico para las clases de lazos que se pueden definir sobre la circunferencia $\mathbb{S}^1$ es el número de vueltas completas, es decir, es un número entero. Por ello $\pi(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$.

El grupo fundamental es isomorfo al grupo de las transformaciones sobre la fibra del recubrimiento universal $\tilde{\mathbb{S}}^1$ de la circunferencia (dado por una "espiral"). Por ello, las elevaciones de (las clases de) los lazos definidos sobre $\mathbb{S}^1$ definen las transformaciones en la fibra.

Ejercicio.- Calcula el grupo fundamental de un ramillete $\mathbb{S}^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}^1$ de k circunferencias. *Nota.*- El ramillete $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ de dos circunferencias se define como el espacio cociente $(\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1)/(x_0 \approx y_0)$ que resulta de identificar x_0 con y_0 en la unión disjunta $\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1$ de dos copias de $\mathbb{S}^1$.

3.4.2. *Grupo fundamental de la esfera.* Como cualquier lazo sobre la esfera $\mathbb{S}^n$ para $n \geq 2$ se puede contraer a un punto, se tiene que $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$

Nótese que la esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa, pero no contractible, aunque cualquier lazo sobre $\mathbb{S}^n$ sea contractible a un punto para $n \geq 2$

Ejercicio.- Calcula el grupo fundamental de un ramillete de esferas n-dimensionales.

3.4.3. *Grupos de homotopía de orden superior de la esfera.* El grupo fundamental se construye mediante una composición de lazos definidos sobre un espacio topológico X. Un lazo basado en $x_0 \in X$ es la imagen via $\gamma : \mathbb{S}^1 \to X$ con un punto base s_0 tal que $\gamma(s_0) = x_0$. Denotamos mediante $[\mathbb{S}^1, X]$ al conjunto de las clases de homotopía de los lazos sobre X.

A la vista de los diferentes tipos de “células básicas” que puede tener una variedad ó, con más generalidad, un espacio topológico X, parece natural extender la descripción tomando esferas de dimensión superior a las que se etiqueta como “superlazos”. Denotamos mediante $[\mathbb{S}^n, X]$ al conjunto de las clases de homotopía de los “superlazos” sobre X.

3.5. **Descripción de** $\pi_n(X, x_0)$**.** Las imágenes de circunferencias sobre el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (via embebimientos no triviales, p.e.) pueden dar lugar a nudos tóricos de la forma $m[a] + n[b]$ (con a y b primos entre sí, para simplificar) donde $[a], [b]$ son los generadores de $\pi_1(\mathbb{T}^2)$; análogamente, la imagen de $\mathbb{S}^1$ en una superficie con un número g de agujeros se puede interpretar como una suma conexa de nudos tóricos. Este tipo de inmersiones da lugar a un fenómeno de “torsión” que se analiza más adelante. Para simplificar, en esta subsección suponemos que no hay torsión.

Esta observación básica motiva el estudio de imágenes de esferas n-dimensionales $\mathbb{S}^n$, lo cual permite abordar el estudio de los n-ésimos grupos de homotopía. Con ello se pretende estudiar no sólo las posibles imágenes de estos “superlazos”, sino también la del espacio complementario. En esta subsección se sigue [Nov96]. [17]

3.5.1. *Extendiendo lazos al caso nD. Definición.-* El *n-ésimo grupo de homotopía* $\pi_n(X, x_0)$ se define sobre el conjunto de clases de homotopía de las aplicaciones $f : (\mathbb{S}^n, s_0) \to (X, x_0)$ con la composición de aplicaciones definida de la forma siguiente:

La *composición* de dos aplicaciones $f, g : (\mathbb{S}^n, s_0) \to (X, x_0)$ se define utilizando el ramillete $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ de las dos esferas con los pasos siguientes:

- Se identifica como punto base para los “superlazos” un punto del ecuador de la primera esfera que tomamos como punto base del ramillete
- se construye la aplicación sobre el ramillete que coincide con f en la primera esfera del ramillete y con g en la segunda esfera del ramillete.

3.5.2. *Estructura de grupo para lazos extendidos. Proposición.-* El conjunto de clases de “lazos n-dimensionales” (extendidos en el sentido del apartado anterior) con punto base fijo $x_0 \in X$ tiene estructura de grupo al que se denota mediante $\pi_n(X, x_0)$ y es siempre conmutativo.

Ejercicio.- Demuestra la proposición anterior. *Indicación.-* Para $n > 1$, la esfera se puede rotar de forma continua dejando fijo el punto base, por lo que es posible intercambiar las semiesferas en las que se tienen los lazos a componer: este resultado muestra una diferencia importante con el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ que, en general, es no conmutativo

3.5.3. *Descripción usando homotopía relativa.* Los elementos de $\pi_n(X, x_0)$ se pueden representar como clases de homotopía de aplicaciones

$$f : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \;\to\; (X, x_0)$$

[17] S.P.Novikov (ed); *Topology I*, Springer-Verlag, 1996.

En efecto, cualquier camino $\gamma(t)$ con $t \in [0,1]$ que empieza en $\gamma(0) = x_0$ y termina en $\gamma(1) = x_1$ aplica el cilindro $\mathbb{S}^{n-1} \times I$ en X de modo que la composición $\mathbb{S}^{n-1} \times I \to I \to X$ sólo depende de t. Si tomamos la unión de esta composición con cualquier aplicación $f : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (X, x_0)$ se obtiene una extensión de esta última a lo largo del camino $(f, \gamma) : (\mathbb{D}^n \cup (\mathbb{S}^{n-1} \times I), \mathbb{S}^{n-1} \times \{1\}) \to (X, x_1)$.

4. **Algunas aplicaciones (TPA)**

Toda esta sección se debe entender como una propuesta para un trabajo práctico adicional (TPA)

La aproximación a cuestiones de clasificación basada en Topología General se realiza en términos de clases modulo homeomorfismo (aplicaciones biyectivas y bicontinuas). La topología Algebraica proporciona un marco que permite calcular invariantes algebraicos en términos de grupos de homotopía y de (co)homología. En particular, si dos espacios X, Y son homeomorfos, entonces se tiene un isomorfismo algebraico entre sus grupos de homotopía $\pi_i(X) \simeq \pi_i(Y)$ y sus grupos de homología $H_i(X) \simeq H_i(Y)$, pero el recíproco no tiene por qué ser cierto; es decir, puede haber espacios que tengan grupos isomorfos, pero no sean homeomorfos entre sí. Por ello, las clases modulo homeomorfismo son "más finas" que las clases modulo grupos de homotopía ó de homología.

Sin embargo, no se conocen *procedimientos efectivos para la clasificación* módulo homeomorfismo. En la práctica, es necesario contar con criterios que sean "más computables" como los basados en tipo de homotopía; en este caso, la computabilidad procede de la posibilidad de construir deformaciones de forma explícita. En general, hay que encontrar un equilibrio entre la capacidad de discriminación de los criterios matemáticos y la posibilidad de estimación a partir de algoritmos eficientes que puedan proporcionar soluciones en tiempo finito (a poder ser, tiempo real).

Un problema adicional consiste en separar las regiones de interés (RoI: Regions of Interest) r_α asociadas al proceso de búsqueda de las regiones que no son relevantes. El agrupamiento de las RoI r_α en objetos planares b_β es un problema más difícil, pues requiere identificar componentes de un objeto, en presencia eventualmente de oclusiones parciales. La unión de los objetos irrelevantes se etiqueta como fondo (background) BG, mientras que la unión de los objetos de interés (BoI) se etiqueta como primer plano (foreground) FG (incluso aunque la profundidad relativa sea mayor que para objetos contenidos en el BG). La distinción entre unos y otros requiere desarrollos más avanzados de Sistemas Expertos [18]

La distinción entre FG y BG se reformula topológicamente en términos de pares (X, A) donde X representa la escena segmentada y A la colección de objetos que se ha identificado tras un primer análisis de imagen. Análogamente, los pares (Y, B) representan la colección finita de modelos para el espacio ambiente y los modelos de objetos que se espera identificar. A un nivel tosco, el Reconocimiento consiste en construir una aplicación entre pares $f : (X, A) \to (Y, B)$ verificando $f(A) \subset B$, donde tanto A como B pueden tener varias componentes conexas. Por ello, los invariantes topológicos (homotopía, homología, cohomología) son los de los pares (X, A).

Frecuentemente, los datos más relevantes para objetos y modelos aparecen asociados a (las componentes de) el borde y a una etiqueta (típicamente de color o de textura, p.e.). En este caso, el interior de las regiones casi-homogéneas (variación del color o de la textura por debajo de un umbral ó threshold τ_α) es un abierto U_α al que se asocia un vector (representando el color) o un tensor (representando la textura). Esta estrategia permite simplificar el tratamiento de la información,

[18] Ver el módulo B_{34} (Reconocimiento) de la materia B_3 (Visión Computacional) para más detalles.

"ignorando" el comportamiento en el interior de cada abierto U_α. Por ello, los invariantes topológicos (homología, cohomología) son los de las ternas (X, A, U) y las aplicaciones están definidas entre ternas $(X, A, U) \to (Y, B, V)$ (con las relaciones de inclusión habituales $f(A) \subset B$ y $f(U) \subset V$) con sus correspondiente invariantes. En este caso, los resultados relevantes son los Teoremas de Escisión que se abordan en el módulo A_{22} (Teorías de Homología) de esta materia A_2. De momento, volvemos a cuestiones más sencillas.

Un *ejemplo ilustrativo* de la distinción entre las clasificaciones modulo homeomorfismo y modulo tipo de homotopía se presenta en la primera subsección, en relación con el Reconocimiento Automático de Caracteres (OCR: Optical Character Recognition) para documentos digitalizados. Aunque el problema ya está resuelto para el alfabeto latino desde los años noventa, sigue habiendo problemas abiertos interesantes relacionados con el reconocimiento de caracteres (eventualmente ideogramas) otros alfabetos o de la notación matemática, p.e.

El "ejemplo" de los OCR proporciona el punto de partida para desarrollos bastante más ambiciosos como los relacionados con el reconocimiento de contenidos sobre diferentes soportes multimedia de dimensión 1 (voz y habla, inicialmete; características de sonidos musicales, por otro), $2D$ (imágenes digitales), $2D+1d$ (vídeo digital), $3D$ (objetos digitales volumétricos) ó $3D + 1d$ (objetos volumétricos en movimiento), según un orden de dificultad creciente. [19]

Desde un punto de vista topológico, las *aplicaciones recientes más relevantes* afectan al *modelado de contenidos digitales* que se lleva a cabo inicialmente en términos de clases de funciones o, con más generalidad, aplicaciones, (distribuciones de) campos vectoriales, ó (sistemas de) formas diferenciales. Todas ellas están incluidas dentro de la clasificación topológica de campos tensoriales, tema que está completamente abierto. Los contenidos digitales están caracterizados por colecciones finitas de funciones que toman valores sobre discretización del soporte 2D (en términos de unidades planares básicas o píxeles) ó del soporte 3D (en términos de unidades volumétricas básicas o vóxeles). El tratamiento topológico de la información asociada es el núcleo básico de la *Topología Digital*.

Para fijar ideas, nos restringimos inicialmente al caso más simple que consiste en clasificar funciones de rango discreto definidas sobre conjuntos de píxeles. Estas funciones corresponden a una discretización de la *función de intensidad en escala de grises*; así p.e. para una imagen de 8 bits por byte pueden tomar $2^8 = 256$ valores correspondientes a las diferentes formas de ordenar ocho 0 y 1 que representamos como los valores naturales del intervalo $[0, 255]$ donde 0 (ocho ceros) es el negro puro y 255 el blanco puro (ocho unos).

Para una imagen en color de 8 bits, la función de intensidad en la escala de grises debe ser reemplazada por una función vectorial o *aplicación de color* que, habitualmente, utiliza tres "colores". La representación más frecuente (aunque la menos fiable desde el punto de vista radiométrico) es la basada en RGB (red, green blue) cuya representación vectorial (f_R, f_G, f_B) en el cubo $[0, 255]^3$ da lugar a 256^3 colores. Para fijar ideas, nos restringiremos a imágenes en escala de grises, es decir, sólo consideramos funciones escalares definidas sobre el dominio rectangular de la imagen.

[19] Más allá del caso $2D$ hay más problemas abiertos que información disponible.

En el caso $2D$ estático supondremos que se ha llevado a cabo una *segmentación de la imagen* es decir, una descomposición en unión disjunta de regiones conexas r_α del plano "casi-homogéneas". En otras palabras, se supone que la variación de la función f_g está por debajo de un umbral para los píxeles adyacentes pertenecientes a una misma región r_α de la imagen. Cada "objeto planar" b^β es una unión finita de regiones casi-homogéneas r_α^β.

El *Reconocimiento de objetos* planares consiste en asignar a cada objeto en imagen b^β un "patrón" de acuerdo con una colección finita de reglas computacionalmente implementables (Algoritmos para Sistemas Expertos) que afectan a la "forma" y las C^r-transformaciones permitidas sobre dicha forma. Este problema está actualmente abierto y tiene gran interés por sus aplicaciones a todas las ramas del conocimiento.

El problema del Reconocimiento se extiende al caso tridimencional estático (objetos volumétricos capturados por diferentes dispositivos de imagen y de rango), al caso $2D + 1d$-dimensional (correspondiente a contenidos en secuencias de vídeo) y al caso $3D + 1d$-dimensional (correspondiente a contenidos en vídeo 3D y sus aplicaciones a la producción de contenidos multimedia, incluyendo simulación y efectos especiales). Todos estos problemas están completamente abiertos y requieren una combinación de aspectos topológicos y geométricos que se aborda en los módulos 3 (movimiento), 4 (Reconocimiento), 5 (Video digital) y 6 (Video 3D) del CEViC (Curso de Especialista en Visión por Computador) [20]

[20]Para detalles y referencias ver la materia B_3 (Computer Vision) en mi página web.

4.1. **Clasificación de las letras mayúsculas.** En esta subsección se aborda la clasificación topológica (modulo homeomorfismo y módulo tipo de homotopía). Para fijar ideas, nos restringimos inicialmente a las letras mayúsculas del alfabeto latino que incluyen las cinco vocales como el primer caso ilustrativo. Para simplificar se supone que la imagen está binarizada, por lo que cada función sólo puede tomar dos valores correspondiente a un fondo blanco etiquetado como 1 (background) y contenido de la letra propiamente dicho etiquetado como 0 foreground).

El *problema a resolver* es la identificación *automática* de los patrones asociados a las cadenas de píxeles adyacentes. La identificación de clases de equivalencia de las letras, pone de manifiesto diferencias significativas entre los criterios de clasificación y la necesidad de desarrollar técnicas adicionales de tipo geométrico que permitan discriminar entre letras pertenecientes a una misma clase de equivalencia. Para ello, existen diferentes estrategias asociadas al "recorrido" del borde de la región pixelada (vértices entrantes o salientes, p.e.) o bien a las intersecciones con líneas de barrido, p.e.

Por ello, para resolver el problema de clasificación se sigue una estrategia de complejidad creciente que parte de los criterios más toscos (equivalencia módulo tipo de homotopía), continúa con criterios más finos (equivalencia módulo homeomorfismo, p.e.), introduciendo finalmente criterios adicionales de tipo geométrico para minimizar la ambigüedad en la clasificación que presentan los criterios precedentes.

4.1.1. *Clasificación módulo tipo de homotopía.* La clasificación módulo tipo de homotopía permite "suprimir" todas las regiones contractibles correspondieentes a discos topológicos asociados a entrantes ó salientes que no tengan agujeros en su interior. Por ello, las clases de equivalencia módulo tipo de homotopía son las más toscas.

Ejercicio (Hatcher).- Verifica que

$$\{B\}\ ,\ \{A,R,D,O,P,Q\}\ ,\ \{C,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,S,T,U,V,W,X,Y,Z\}$$

son las clases de equivalencia módulo tipo de homotopía de las letras mayúsculas del alfabeto latino.

Indicación: Las clases por el tipo de homotopía están caracterizadas por el número de agujeros (entre 2 y 0)

Este ejemplo pone de manifiesto la necesidad de introducir criterios más finos para la clasificación topológica de las letras. Es necesario poder incluir "tallos" y su localización (posición y orientación) relativa con respecto a los agujeros detectados al más bajo nivel.

4.1.2. *Clasificación módulo homeomorfismo.* Una primera distinción a bajo nivel muestra que el número de "agujeros" proporciona un primer criterio tosco de aplicación. Sin embargo, este criterio es insuficiente, pues por un lado existen vocales homeomorfas (la A y la O, por un lado; las demás por el otro) que corresponden a letras diferentes. Una extensión de esta simple observación a las mayúsculas del alfabeto latino se presenta en el ejercicio siguiente (Hatcher):

Ejercicio.- Verifica que $\{A, R\}$, $\{C, G, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z\}$, $\{D, O\}$, $\{E, F, T, Y\}$ $\{H, K\}$, $\{P, Q\}$ y $\{X\}$ son las clases de equivalencia módulo homeomorfismo de las letras mayúsculas del alfabeto latino.

Indicación: Las clases módulo homeomorfismo están caracterizadas por el número de agujeros (entre 2 y 0) y por el número de tallos ó aristas que están conectados a la "forma inicial" (número de agujeros) que presenta la letra en el interior de la región acotada por el borde.

Esta estrategia se adapta fácilmente para caracterizar letras minúsculas, aunque la diversidad morfológica es mayor, sobre todo cuando están escritas a mano.

Nota.- La dificultad del problema se incrementa con el uso de otros alfabetos (griego ó cirílico, p.e.), pero se puede adaptar una estrategia similar a la utilizada para el alfabeto latino. El problema es mucho más difícil en el caso de lenguas escritas (orientales sobre todo) que utilizan diferentes tipos de ideogramas; en particular, a diversidad morfológica y el sentido simbólico que presentan puede dar lugar a representaciones "incompletas" con una mayor dificultad para su interpretación.

4.1.3. *Observaciones.*

- Las clases módulo tipo de homotopía son unión de clases modulo homeomorfismo para las letras mayúsculas del alfabeto latino.
- Para verificar que dos letras no son equivalentes modulo homeomorfismo hay que tener en cuenta el "tipo de cruzamiento" (de hecho, una singularidad, si la vemos como el "germen" de una curva); así, p.e., una X no es homeomórficamente equivalente a una Y porque al quitar el punto en el que se cruzan las aristas se obtienen 4 segmentos ó bien 3, respectivamente. Esta enfoque está relacionado directamente con el tipo de junturas que se detectan al analizar las poligonales que forman los bordes de objetos detectados en imágenes y son de gran utilidad para fases de reconocimiento de bajo nivel.
- Para demostrar que los elementos pertenecientes a distintos subconjuntos no son homotópicamente equivalentes hay que calcular el grupo fundamental de cada una de ellas.

4.2. **Elementos de OCR.** Un OCR (Optical Character Recognition) es un sistema experto cuyo objetivo es la identificación de las letras en un documento digital escaneado. Un documento digital es un mapa de píxeles en el que cada píxel almacena una información cuantizada en bits en términos de una función asociada a la escala de grises; para imágenes de 8 bits (es decir, con $2^8 = 256$) la función toma valores naturales en el intervalo $[0, 255]$ donde se asigna el negro a 0 y el blanco a 255, habitualmente. Algunas de las *fases* más importantes para el diseño e implementación de un OCR son las siguientes

(1) *Binarización:* conversión de la imagen en dos niveles (blanco y negro) que se etiquetan como fondo y primer plano. Sólo interesa quedarse con los píxeles que están en el primer plano correspondientes al negro.
(2) *Restauración de imagen* incluyendo supresión del ruido (píxeles aislados, p.e.); a bajo nivel se realiza mediante operadores morfológicos (erosión y dilatación, ó composición de ambos) aplicados a los símbolos encontrados en el texto (letras y números, típicamente).
(3) *Supresión de las líneas contiguas* para identificar la línea a la que pertenece cada píxel.
(4) *Supresión de la oblicuidad* que consiste en identificar el ángulo oblicuo y "rectificar" el resultado obtenido.
(5) *Representación de la oblicuidad* que se calcula a partir de la estimación de momentos; frecuentemente interesa para identificar los elementos destacados en el texto
(6) *Adelgazamiento del símbolo* que aplica un "retracto" para obtener un mapa normalizado del símbolo que permita almacenarlo y gestionar la información asociada a la colección de símbolos.

En este esquema hay que tener presente que la información habitualmente es incompleta ó está corrompida por el ruido, lo cual introduce un factor de incertidumbre que también debe ser modelado; para ello, se utilizan modelos ocultos de Markov (HMM)

4.2.1. *Un problema abierto: Reconocimiento de símbolos matemáticos.* El *reconocimiento de símbolos matemáticos* es un problema abierto cuya resolución resultaría de gran utilidad para el almacenamiento y posterior reutilización de una gran parte de la literatura. A partir de un artículo en pdf escrito en LaTex el problema consiste en generar el archivo LaTex original a partir del reconocimiento de cada uno de los caracteres ó símbolos identificados. En este caso, se supone que ya se tiene disponible un OCR convencional, por lo que el problema se centra "sólo" en los símbolos matemáticos que puedan aparecer con diferentes tamaños y formas. Se propone inicial el análisis a partir de documentos cuyo archivo LaTex sea conocido con objeto de validar el reconocimiento antes de abordar casos más generales (textos históricos en Matemáticas, p.e.) en los que dicho archivo no está accesible.

4.3. **Visibilidad relativa.** Denotemos por $\mathcal{P}$ un politopo en el espacio cartesiano $\mathbb{R}^n$, es decir, una unión finita conexa de poliedros k-dimensionales donde $0 \leq k \leq n$. Denotemos mediante $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ que no pertenece al politopo $\mathcal{P}$. A un politopo $\mathcal{P}$ se le asocia el *grafo dual* $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ en la forma usual: las caras de dimensión máxima representan los nodos del grafo y las relaciones de incidencia sucesivas entre caras determinan los elementos de dimensión creciente del grafo.

La *visibilidad relativa* de $\mathcal{P}$ desde $\mathbf{P}$ se define como el subpolitopo $\mathcal{P}_{\mathbf{P}} \subset \mathcal{P}$ que es "visible" desde $\mathbf{P}$; se calcula a partir de la colección $\mathcal{P}_i$ de vértices de $\mathcal{P}$ que son visibles desde $\mathbf{P}$, es decir tales que el segmento

$$< \mathbf{P}, \mathbf{P}_i >= \ \{(1-\lambda)\mathbf{P} + \lambda)\mathbf{P}_i \ \mid \ \lambda \in [0,1]\}$$

corta a $\mathcal{P}$ en un punto ó en una arista del politopo $\mathcal{P}$ (dibujarlo en el plano y en el espacio para visualizar la condición). Los algoritmos de visibilidad se describen en Geometría Computacional (ver notas del Curso de GeoComp) y los más frecuentes están implementados en CGAL. El caso en el que estamos más interesados corresponde al espacio $\mathbb{R}^3$ y su actualización a lo largo del tiempo, incluyendo eventualmente objetos deformables (para simulación de órganos internos y de cirugía, p.e.). La visibilidad relativa tiene gran utilidad para gestionar las partes visibles de objetos desde la posición de uno ó varios observadores en aplicaciones relacionadas con Planificación de movimientos en Robótica ó bien en Informática Gráfica; estas últimas aparecen vinculadas a Visualización Avanzada, Simulación ó Videojuegos p.e.

4.3.1. *Visibilidad de un tetraedro regular.* Un observador situado en el exterior de un tetraedro puede ver una, dos o tres caras del tetraedro según que esté situado en la dirección de la normal a la cara, en el plano generado por las normales a las dos caras visibles o bien en la intersección de dos planos asociados a la visibilidad de dos pares de caras diferentes. Las diferentes posibilidades se pueden representar como caminos en una esfera concéntrica sobre la esfera circunscrita al tetraedro.

La representación asociada a la visibilidad de tres caras (que contiene de hecho el borde de la cuarta) proporciona un triángulo con un punto en el interior que se conecta a los otros tres; esta representación es una visualización del tetraedro, pero también se puede interpretar como un grafo que contiene todas las posibilidades que hay para visualizar un tetraedro desde cualquier localización (posición y orientación) relativa. Al grafo así obtenido se le llama *grafo por aplastamiento*. Cualquier subgrafo que contenga un número finito de ciclos representa una visualización del tetraedro y recíprocamente. Llamamos "tipos básicos" a los subgrafos compuestos por uno, dos ó tres formas triangulares (interpretadas como subgrafos). Los eventos (cambios cualitativos en la percepción de la forma) están representados por las transiciones bruscas asociadas a la (des)aparición de una cara triangular con respecto a la configuración precedente.

Como consecuencia, cualquier camino asociado a una navegación virtual en torno a un objeto se puede representar simbólicamente en términos de una colección finita de tipos básicos. La colección de tipos básicos representa como un conjunto parcialmente ordenado (poset) en el que cada tipo básico asociado a la visibilidad del tetraedro está conectado a los adyacentes correspondientes a la (des)aparición de una cara. Una animación muy simple asociada a la visibilidad de un tetraedro consiste en interpolar mediante el método de homotopía las formas triangulares asociadas a tipos básicos adyacentes.

Ejercicio 1.- Representa mediante un diagrama ordenado (poset) todas las adyacencias que hay entre los eventos asociados a la visibilidad. ¿Cuántos tipos básicos hay? Implementa computacionalmente una interpolación entre dos tipos adyacentes, incluyendo las transiciones entre una y dos caras visibles ó entre dos y tres caras visibles. Nótese que los eventos genéricos corresponden a que haya dos caras visibles, mientras que los casos en los que se ven una ó bien tres caras, sólo se verifican para un conjunto cerrado (de hecho de medida nula) del espacio $3D$ en el que consideramos la posición de una cámara virtual.

Ejercicio 2.- Visualiza el grafo por aplastamiento de un cubo y extiende el análisis precedente al caso de un cubo (*Indicación:* Utiliza una representación "desde arriba" de una pirámide truncada para visualizar dicho grafo).

observación.- La construcción precedente se puede realizar para cualquier poliedro regular y de hecho facilita la visualización $3D$ de objetos capturados por un sistema de visión en estéreo con cámaras sincronizadas en los vértices de un poliedro regular desde el que se realizan las tomas de video por parte de cámaras idénticas sincronizadas.

4.3.2. *Gestión de la visibilidad mediante grafos.* La posición de cada observador varía a lo largo de la trayectoria que describe ó bien de la manipulación interactiva de objetos contenidos en una escena contenida en el espacio cartesiano $\mathbb{R}^3$ que se va actualizando a lo largo del tiempo. Por ello, interesa estudiar los diferentes modelos que pueden aparecer vinculados a caminos. La (des)aparición de caras del politopo correspondientes a cada localización (posición y orientación) relativa del observador con respecto a la escena se representa como un "evento".

Supuesta conocida "toda" la geometría de un objeto, la colección de eventos posibles se representa mediante un *grafo de aspecto* $\mathcal{G}_A$ (Koenderink y VanDorn, 1989) que permite gestionar de forma simultánea todos los eventos que puedan aparecer en relación con las cuestiones de visibilidad. Lamentablemente la complejidad de los algoritmos es exponencial en el número de aristas. Por ello, salvo que se trabaje con poliedros sencillos los procedimientos basados en grafos de aspecto son de poca utilidad desde el punto de vista computacional. Esta restricción es una de las motivaciones más importantes para el desarrollo de algoritmos que permitan gestionar la geometría de objetos en una escena a diferentes niveles de detalle (LoD) con sus correspondientes métodos multiresolución que afectan al dominio espacial de las señales (la versión correspondiente al dominio de la frecuencia se trata en cursos avanzados de Visión Computacional).

4.4. **Representación sobre una esfera.** La proyección de la parte visible de un objeto sobre una esfera facilita una "visualización ordenada y normalizada" de componentes que pueden encontrarse a diferentes profundidades y que es necesario etiquetar insertando la profundidad relativa como un atributo. En este apartado se aborda el problema de cómo gestionar la variabilidad en la información recibida, suponiendo que se tiene resuelto el problema de la segmentación volumétrica, el reconocimiento de formas y el etiquetado automático (ninguno de estos problemas está resuelto en la actualidad).

La colección de objetos visibles desde una localización (posición y orientación) relativa del observador en relación con la escena se representa mediante un *grafo de visibilidad* $\mathcal{G}_V \subset \mathcal{G}$ que es un subgrafo del grafo $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ dual del politopo.

El subpolitopo $\mathcal{P}_{\mathbf{P}} \subset \mathcal{P}$ "visible" desde $\mathbf{P}$ y su grafo dual $\mathcal{G}(\mathcal{P}_{\mathbf{P}})$ se pueden proyectar sobre una esfera que suponemos $\mathbb{S}^2$ (para simplificar). Cualquier camino asociado a diferentes localizaciones de un observador en relación con una escena corresponde a un recorrido sobre el grafo de aspecto. Es necesario diseñar procedimientos que permitan gestionar contracciones y expansiones de grafos mediante implosiones y explosiones en nodos ó aristas asociados a eventos para cada una de las resoluciones que puedan ser gestionadas de forma semi-automática. Ello requiere la introducción de jerarquías para el tratamiento de la información en diferentes capas asociadas no sólo a la visibilidad, sino también al nivel de detalle. Algunas cuestiones relacionadas con la visibilidad se pueden abordar asimismo en términos de los espacios recubridores (ver el Cap.5 de este bloque para más detalles).

4.4.1. *Simulación de la navegación en torno a un objeto.* En este apartado se utiliza la reproyección de las aristas de un poliedro regular inscrito en la esfera para generar de forma automática movimientos de una cámara virtual en torno a un objeto. Se parte de la visualización del objeto desde uno de los vértices $\mathbf{V}_i \in \mathbb{S}^2$ y se simulan caminos sobre la esfera a lo largo de las proyecciones de las aristas que conectan el vértice $\mathbf{V}_i$ con los adyacentes. El control de la visibilidad del objeto se realiza en términos del grafo de visibilidad mostrado más arriba.

Ejercicio.- Completa los detalles como ejercicio. *Indicación:* Utiliza Carlsson: "Topology and Data" (preprint, Stanford, 2008)

4.5. **Posets y funtorialidad.** *Motivación.-* El agrupamiento de objetos en clases para su *Reconocimiento* implica algún tipo de equivalencia entre objetos con "características similares"; la acción de grupos proporciona modelos estructurales para el tratamiento de la información; este procedimiento es eficiente cuando los objetos responden a características prefijadas (producción industrial ó manufacturera, típicamente). Por otro lado, cualquier objeto puede presentarse bajo diferentes apariencias debidas a orientación relativa con respecto a la cámara, diferentes características radiométricas (color, iluminación, texturas) ó morfológicas (dos animales ó vegetales de la misma especie nunca son idénticos, variaciones en el terreno, etc).

Sin embargo, la mente humana es capaz de reconocer objetos muy diversos usando representaciones simbólicas y manipulando (de forma real ó virtual) los objetos para facilitar el etiquetado y clasificación. La clave en la aproximación propuesta para la clasificación de objetos radica en la necesidad de describirlos en términos de su contexto y de sus componentes, es decir, debemos considerar no sólo objetos, sino también las aplicaciones entre ellos (ó sus componentes) que faciliten la (des)agregación y la contextualización. La consideración de objetos y aplicaciones es típica en teoría de categorías y proporciona una motivación para el desarrollo de la funtorialidad.

La funtorialidad propuesta debe ser compatible con las transformaciones que afectan a los objetos asociadas a diferentes localizaciones relativas ó a deformaciones que podamos realizar sobre ellos. Por ello, es necesario incorporar diferentes tipos de acciones $\alpha : G \times X \to X$ sobre espacios particulares X (reconocimiento en particular) o incluso su extensión a espacios $\mathcal{X}$ que representen el conjunto de formas (para la clasificación en diferentes tipos ó clases de equivalencia). Esta idea motiva la introducción de acciones de grupos sobre objetos particulares y sobre conjuntos de objetos.

En esta subsección se comenta la aproximación basada en el desarrollo de diferentes tipos de acciones (en la línea de trabajos iniciados a principios de los noventa, sin entrar a cuestiones relacionadas con la estimación de invariantes) y se inicia una aproximación basada en deformaciones que utiliza caminos para conectar componentes de objetos que se suponen previamente identificadas y etiquetadas (a partir de una segmentación en imagen y volumétrica). A la vista del carácter preliminar y abierto de la mayor parte de las cuestiones relacionadas con la implementación computacional de espacios de caminos, toda esta subsección debe ser considerada de forma tentativa.

4.5.1. *Tipos de acciones.* Las primeras aproximaciones al problema utilizaron la acción de grupos continuos (grupos clásicos asociados a diferentes tipos de transformaciones lineales) ó discretos (replicación de patrones mediante simetrías), tratando de caracterizar a los objetos a partir de la localización relativa del observador ó de las simetrías que presenta; la herramienta introducida a principios de los noventa se basaba en la Teoría de Invariantes (geométricos ó algebraicos). Este procedimiento fue descartado a mediados de los noventa por diferentes razones: dificultades para una computación efectiva de invariantes a partir de datos estadísticos y frecuentemente corrompidos por el ruido, así como por la heterogeneidad morfológica de los objetos para los cuales los invariantes eran idénticos. Actualmente, no se dispone de ningún modelo estructural para el reconocimiento que pueda ser compatible con "pequeñas variaciones" en la forma.

Una primera aproximación al problema de las variaciones en la forma procedentes de grupos de transformaciones lineales (asociadas a diferentes vistas en perspectiva ó deformaciones asociadas el tipo de lente utilizada) se desarrolló a principios de los noventa en el marco de la Teoría Geométrica de Invariantes en Visión Computacional. Esta aproximación era muy limitada y sólo daba resultados razonables para objetos rígidos con información previa disponible off-line y enfocada desde diferentes localizaciones (posición y orientación) de la cámara. Este enfoque tiene utilidad para cuestiones relacionadas con el control de calidad, pero no para abordar problemas de reconocimiento en relación con objetos de forma variable ó deformables. A pesar de los esfuerzos realizados en los noventa, actualmente se considera inviable la posibilidad de una implementación computacional dentro del marco de la programación orientada a objetos (OOP) [21].

El enfoque asociado a la Teoría Geométrica de Invariantes Algebraicos se puede debilitar reemplazando las transformaciones lineales por transformaciones infinitesimales, lo cual da entrada a la Teoría Diferencial de Invariantes Infinitesimales (finales de los noventa), pero aún no se dispone de "buenos" teoremas de estructura para estos últimos y la conexión con procedimientos efectivos para el Cálculo Variacional asociado a pequeñas variaciones en la forma (funcional de Mumford-Shah) presentan aún muchos problemas abiertos. Un enfoque intermedio que no ha sido explotado aún suficientemente consiste en introducir invariantes topológicos intermedios (que puedan ser calculados de forma algebraica) asociados a objetos como los grupos de homotopía ó de homología. Aunque hay importantes contribuciones para el cálculo de grupos de (co)homología en relación con mallas, lamentablemente, el desarrollo de herramientas computacionales para grupos de homotopía es aún muy débil.

4.5.2. *Acciones de grupos y espacios cociente.* Algunas importantes cuestiones del tratamiento de la información son susceptibles de un tratamiento similar mediante la aplicación de la acción $a : G \times X \to X$ de un grupo continuo ó discreto G sobre un espacio X. Estamos interesados en el estudio del cociente X/G de X por la acción de G. Los ejemplos más habituales asociados a la acción de un grupo continuo proceden de la acción de un grupo clásico asociado a un subgrupo de las transformaciones $GL(n\mathbb{K})$ (automorfismos del espacio $\mathbb{K}^n$ que se detallan en el §2.5 de mis notas de Geometría Diferencial. Los ejemplos más habituales asociados a la acción de un grupo discreto corresponden a productos del grupo S_k de permutaciones de k elementos, el grupo alternado A_k u otros grupos finitos de uso común que se han presentado en Álgebra Básica.

Otros "ejemplos" de gran interés corresponden a

- *Grassmannianas* $Grass(k+1, n+1)$ de subespacios $(k+1)$-dimensionales en un espacio $(n+1)$-dimensional que se expresan como cociente

$$Grass(k{+}1, n{+}1) \;=\; GL(n{+}1;\mathbb{R})/[GL(k{+}1;\mathbb{R})\times GL(n{-}k;\mathbb{R})] \;\sim\; O(n{+}1))/[O(k{+}1)\times O(n{-}k)]$$

  donde $\sim$ denota topológicamente equivalente (el grupo lineal general es contractible al grupo ortogonal) y el denominador es el subgrupo que estabiliza un subespacio $(k+1)$-dimensional L y su "complementario $\mathbb{R}^{n+1}/L$. La Grassmannina desempeña un papel universal para la clasificación de

[21] La programación de tipo procedural no es relevante para resolver problemas prácticos por su carácter off-line

aplicaciones tangentes (también llamadas de Gauss) y por ello es crucial para la linealización en la clasificación de variedades.

- *Variedades de banderas* $\mathcal{B}(k_1,\ldots,k_d)$ de subespacios k_i-dimensionales de un espacio vectorial $(n+1)$-dimensional V donde $(k_1,\ldots,k_d)$ es una partición de $n+1$ que se expresan como cociente

$$\mathcal{B}(k_1,\ldots,k_d) \;=\; GL(n{+}1;\mathbb{R})/[GL(k_1;\mathbb{R})\times\ldots\times GL(k_d;\mathbb{R})] \;\sim\; O(n{+}1))/[O(k:1)\times\ldots\times O(k_d)]$$

donde el denominador es el subgrupo que estabiliza la colección de subespacios cocientes. La variedad de banderas desempeña un papel universal para la clasificación de espacios estratificados, tópico que se aborda en la Topología de Variedades Algebraicas y Analíticas.

desarrollar

4.5.3. *Una aplicación del grupo fundamental a la clasificación a bajo nivel.* La clasificación a bajo nivel es parte del problema del Reconocimiento a partir de una colección de datos discretos; estos datos proceden habitualmente de imágenes digitales ó bien de nubes de puntos con información $3D$ procedente de dispositivos de rango (visión estéreo, escaneos láser, infrarrojos, tomografías, etc). Supongamos resuelto el problema del procesamiento (extracción de datos mediante filtrado, mejora y enlazado, restauración y rellenado) y de análisis (interpretación de los datos en términos de regiones ó de elementos que la acotan). La composición del procesamiento y del análisis genera una partición en una colección finita de "formas" ó regiones R_α cuyos bordes $B_\alpha = \partial R_\alpha$ suponemos conocidos y "separados" del resto de los objetos. En esta fase del problema es necesario introducir alguna noción de "semejanza" para la "forma" que presenta cada región R_α. La semejanza entre formas se puede evaluar de forma topológica ó métrica.

La aproximación métrica más inmediata consiste en introducir varios tipos de distancia (desde L^1 hasta L^∞) para comparar los datos que es posible evaluar relativos a los bordes B_α de los objetos; la ordenación de los objetos según los valores obtenidos para las diferentes métricas depende de la L^k-métrica que estemos considerando (Mumford, 2003). Por ello, en lugar de considerar una métrica asociada al espacio ambiente, es más útil adoptar un enfoque más intrínseco correspondiente a minimizar algún invariante (longitud, área, energía) para una métrica riemanniana (enfoque intrínseco); en este caso, hay que evaluar la información la colección de datos discretos significativos que parecen tras el procesamiento. Este enfoque hereda parte del problema anterior pues la "proximidad entre formas" está asociada a la diversidad de métricas riemannianas que se pueden definir sobre un objeto. Lamentablemente, el espacio de curvas cerradas sobre el que se pretende evaluar la proximidad, ni siquiera admite una derivada de Fréchet, lo cual dificulta el problema de la clasificación y sugiere recuperar un enfoque más clásico (ver no obstante, Mumford, 2003) [22]

Un enfoque puramente topológico (módulo homeomorfismos, p.e.) es insuficiente, pues no permite distinguir entre una vaca y una cabra, p.e. (chiste fácil sobre el topólogo). Una opción consiste en reemplazar las transformaciones permitidas por otras más estrictas (difeomorfismos, p.e.) para obtener clases "más

[22][Mum03] D.Mumford: '"he shape of objects in two and three dimensions: Mathematics meets Computer Vision", *Josiah Willard Gibbs Lecture Baltimore, January 2003*

pequeñas" ó bien por otras menos estrictas asociadas a invariantes algebraicos (tipo de homotopía, grupos de [co]homología) para obtener clases "más amplias", lo cual da lugar a la clasificación a bajo nivel que se desarrolla en este apartado. Una solución intermedia consiste en garantizar que el resultado de las deformaciones dé lugar a objetos que sean variedades del mismo tipo que la inicial y la final [23]

4.5.4. *Funtorialidad y etiquetado tosco.* El etiquetado automático de formas extraídas a partir de segmentación de imagen o de vídeo es uno de los problemas más difíciles que hay en Visión Computacional. Aún no existe un procedimiento universal y, en la práctica, se utilizan "deformaciones de plantillas" que permiten evaluar la diferencia con respecto a modelos previos. Para que este procedimiento sea "consistente" es necesario restringir el tipo de objetos (planares para imágenes estáticas, volumétricos para secuencias de video) y el tipo de transformaciones a efectuar para comparar los objetos previamente segmentados.

Ejercicio.- Diseña un algoritmo para el etiquetado tosco según características topológicas básicas de regiones planas contenidas en imagen (procedentes de una segmentación) relativas a la Topología General (compacidad, conexividad, separabilidad) y de características de los tipos de polígono (convexo, estrellado, monótono) que acotan las regiones procedentes de una segmentación por regiones. Muestra el carácter funtorial del etiquetado así construido.

[23]Un ejemplo está dado por la noción de isotopía en la que se requiere que las aplicaciones intermedias utilizadas para interpolar sean embebimientos, pues la imagen por un embebimiento es siempre una variedad

5. Motivando algunas aplicaciones (TPA)

Advertencia previa: Toda esta sección se debe entender como una propuesta para un trabajo práctico adicional (TPA) a desarrollar por uno o a lo sumo dos estudiantes.

La Topología General y, en particular, la Topología Algebraica estudia propiedades que son independientes de cualquier sistema de coordenadas y cualquier tipo de métrica. Por ello, se adapta especialmente bien a las descripciones cualitativas, representaciones simbólicas (diferentes tipos de grafos) ó modelos no paramétricos. La independencia con respecto a sistemas de coordenados da lugar a que la Topología sea apropiada para un enfoque intrínseco, es decir, independiente de la inmersión que se realiza de los objetos. Sin embargo, la necesidad de estimación de diferentes características asociadas a los objetos pone en escena las relaciones entre invariantes intrínsecos y datos extrínsecos (dependientes de la inmersión que es un tópico central de la Topología Diferencial. A diferencia de este enfoque, algunas cuestiones cruciales en Topología Algebraica que dan lugar a interesantes aplicaciones se plantean a diferentes niveles:

- *bajo nivel*: objetos capturados y representados mediante datos discretos asociados a imágenes ó nubes de puntos en los que el objetivo es la captura de propiedades cualitativas de la forma correspondientes a los objetos;
- *medio nivel*: relaciones espaciales ó temporales entre objetos con forma ó apariencia variable representables en forma de grafos;
- *alto nivel*: representación de las relaciones entre objetos mediante diagramas relacionado con el enfoque funtorial en el que se demuestra la equivalencia formal entre diferentes tipos de razonamientos

Cada una de ellas da lugar a un ejemplo significativo que se introduce en esta sección sobre el que volveremos a lo largo del curso.

5.1. **TPA1: Caminos en una imagen.**

5.1.1. *La imagen como mapa de regiones.* Una imagen digital es un mapa de bits (bitmap), es decir, una colección de píxeles que almacenan una información radiométrica (en escala de grises o en alguna representación del color). El mapa de bits se representa mediante una función de intensidad $I_g : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. En una imagen digital, la intensidad está "cuantizada", es decir, sólo toma valores naturales que dependen del número de bits (típicamente 8) que se almacenan en cada píxel. Así, p.e. para una imagen en grises con 8 bits de intensidad se obtienen $2^8 = 256$ posibles valores que recorren el intervalo $[0, 255]$ almacenado en formato binario; el "negro puro" corresponde al valor 0 que se escribe de forma binaria como $0 \ldots^{(8} \ldots 0$, mientras que el "blanco puro" corresponde al valor 1 que se escribe de forma binaria como $1 \ldots^{(8} \ldots 1$.

La intensidad f en la escala de grises de toda la imagen se visualiza a bajo nivel mediante un *histograma de frecuencias* H_f, en el que para cada valor de la escala de grises se representa el número de píxeles que tienen dicho valor; la representación dada por el histograma permite´obtener una estadística básica de la imagen, que incluye las "modas" ó valores más frecuentes como máximos locales en el histograma.

Para facilitar el agrupamiento se realiza un "suavizado" por medias que reemplaza el valor actual por un promedio (media aritmética) de la intensidad de imagen calculada en los puntos más próximos; al resultado de aplicar esta transformación se le llama *imagen suavizada.* El agrupamiento radiométrico de píxeles de la imagen suavizada se realiza fijando un umbral para el "nivel de semejanza" entre píxeles: si la diferencia en la intensidad está por debajo de un umbral, se reemplaza el valor actual por el valor modal más próximo. El resultado de este proceso es un *mapa de regiones* en la que cada región tiene una intensidad constante.

5.1.2. *Grafo dual de una imagen.* Cada región conexa R_α caracterizado de la imagen f con un color "homogéneo" (modulo un cierto umbral de variabilidad) se representa mediante el nodo n_α de un grafo $\mathcal{G}_f$ asociado a la segmentación de la imagen f por regiones homogéneas R_α; la homogeneidad está caracterizada por una variación del nivel de intensidad en la escala de grises ó del color por debajo de un umbral, cada región se representa mediante un punto interior a R_α.

Por dualidad a dos regiones adyacentes (compartiendo un camino, una poligonal ó una cadena simplicial) les corresponde una arista $e_{\alpha\beta} =< n_\alpha, n_\beta >= (R_\alpha \cap R_\beta)^\nu$ donde ν es el operador de dualidad en términos conjuntistas.

El grafo dual asociado a la representación por regiones tiene una gran cantidad de ciclos. Para facilitar el tratamiento de la información, es conveniente convertir dicho grafo en un árbol. El algoritmo más general y eficiente (desde el punto de vista de la complejidad) es el árbol de longitud mínima (MST: Minimum Spanning Tree) que es un grafo acíclico. El MST selecciona un subgrafo de la triangulación de Delaunay $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ asociada a la colección $\mathcal{D}$ de "sitios" que minimiza la longitud de las aristas. Los nodos n_α representan como vértices de una triangulación en el plano; este enfoque tiene sentido para una geometría rígida, pero no para representaciones en las que sólo interesa la disposición relativa de unos nodos con respecto a otros y su expresión combinatori.

Por ello, es conveniente reemplazar la noción de distancia por otros funcionales que sean más significativos; la "longitud mínima" se puede referir a la longitud de una presentación en términos de grupos ó de complejidad asociada a una secuencia de caratceres, p.e.. Así, el funcional de distancia superpuesto a la triangulación asociada a $\mathcal{S}$ puede ser reemplazado por otros funcionales (asociados a la energía, la curvatura, área, etc) de uso común en problemas de Optimización No-lineal ó bien otros menos frecuentes (complejidad de la información para objetos con texturas complicadas, p.e.). En cualquier caso, el tratamiento de la información debe hacerse en términos de grafos "ponderados" con pesos w_α asociados a los nodos n_α

La dificultad surge en relación con la "estabilidad" del árbol asociado a la colección $\mathcal{S}$ de sitios: Pequeñas modificaciones en la imagen, dan lugar a cambios cualitativos en la representación asociada en términos de MST. Para minimizar la dependencia con respecto a la presentación es conveniente desarrollar una topología de grafos que se aborda en diferentes partes de la asignatura: Homotopía en el módulo 1 para grafos acíclicos y Homología de Grafos en el módulo 2 para grafos arbitrarios.

Este hecho plantea la necesidad de comparar diferentes representaciones simbólicas asociada a grafos (eventualmente ponderados) que permitan reconocer objetos ó escenas a pesar de los cambios que aparecen en el grafo. La comparación se puede llevar a cabo en términos del "pegado" de grafos. El "pegado" requiere identificar subgrafos y dar criterios efectivos para el "pegado" de subgrafos que se formulan en términos de *isomorfismo entre subgrafos*; la condición de "pegado exacto" es demasiado estricta y debe ser "relajada" en términos de "pegado inexacto" que proporcione un soporte a la información aproximada superpuesta al grafo que se expresa en térmios probabilísticos.

El *objetivo* de este trabajo práctico es familiarizar al estudiante con las nociones básicas relacionadas con isomorfismo de grafos, los aspectos homotópicos de la topología de grafos y su aplicación al tratamiento de la información contenida en imágenes "segmentadas" por regiones.

5.2. **TPA2: Una taxonomía para el Reconocimiento de Objetos.** El Reconocimiento de objetos es uno de los problemas centrales en Visión por Computador. En procesos industriales, el control de calidad requiere medidas muy precisas que imponen restricciones sobre los objetos producidos de modo que el reconocimiento se realiza módulo transformaciones rígidas (rotaciones y traslaciones) aplicadas sobre el objeto. Este reconocimiento se aborda en el primer apartado de esta subsección y se puede extender a otras transformaciones lineales salvo escala o distorsiones debidas a efectos de perspectiva. Sin embargo, este enfoque carece de utilidad para objetos deformables (personas, animales, plantas) en presencia de información incompleta donde es necesario incorporar el punto de vista topológico, para representar la diversidad morfológica y las (posiblemente cambiantes) relaciones entre componentes.

5.2.1. *Objetos rígidos y transformaciones lineales.* El reconocimiento de objetos rígidos a partir de imágenes digitales se realiza utilizando una segmentación de imagen, es decir, descomposición en unión de regiones disjuntas casi-homogéneas desde el punto de vista radiométrico (variación de características del color por debajo de un umbral). Cuando el reconocimiento requiere precisión (para inspección o bien control de calidad en procesos de manufactura, p.e.) es imprescindible utilizar ámaras calibradas. La *calibración de una cámara* incluye una estimación de los

- *parámetros intrínsecos* correspondiente a la longitud focal f, formato de imagen $(\alpha_x, \alpha_y) = f(m_x, m_y)$ (donde m_x, m_y relacionan el tamaño de píxeles con la distancia) y punto principal (u_0, v_0) (desviación del centro con respecto al eje principal de la cámara)
- *parámetros extrínsecos* asociados a la localización -posición y orientación- de la cámara. La posición se representa mediante un vector traslación $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ y una rotación $\mathbf{R}$ (representada en términos de los ángulos de Euler). La representación en términos de cuaterniones es más precisa (evita errores de redondeo en la estimación de funciones trigonométricas) y estable (la estructura vectorial de $\mathbb{H} \simeq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$ permite interpolar usando la estructura subyacente de $\mathbb{H}$, evitando los problemas de la no-linealidad de $SO(3; \mathbb{R})$

Las imágenes digitales se procesan mediante filtrado que permite detectar y realzar bordes (filtros de baja frecuencia) ó regiones (filtros de alta frecuencia). Un vez extraídos elementos característicos de las imágenes es necesario agruparlos, enlazando elementos con características similares ó completando información (operadores morfológicos a bajo nivel ó de restauración de imagen a alto nivel). Los "hechos geométricos característicos" más significativos son esquinas ó segmentos largos contenidos en imágenes; existen filtros específicos para cada uno de ellos. Una vez detectados y extraídos, es necesario compararlos con un modelo o bien construir el modelo a partir de dichos datos. Las *transformaciones lineales* más significativas para el reconocimiento de objetos son:

- Para imágenes rectificadas (distorsión debida a la proyección corregida mediante calibración) la puesta en correspondencia se realiza estimando la rotación $\mathbf{R}$ y traslación $\mathbf{t}$ necesaria para comparar objetos similares sobre una imagen previamente segmentada. Por ello, el objeto a estimar es un elemento del grupo especial euclídeo $SE(2; \mathbb{R})$

- Para imágenes no-rectificadas es necesario estimar la distorsión asociada al efecto de perspectiva procedente de una proyección oblicua. En este caso, el objeto a estimar es un elemento del grupo especial lineal $SL(2;\mathbb{R})$ salvo escala, es decir, de $\mathbb{P}SL(2;\mathbb{R})$

En el Curso de Especialista en Visión por Computador (CEViC) se muestran algoritmos para llevar a cabo estos procesos de forma automática.

5.2.2. *Objetos deformables y transformaciones continuas.* La clasificación de objetos deformables es un problema bastante más difícil que la clasificación de objetos rígidos. Existen multitud de ejemplos como letras de un alfabeto, animales, plantas y un largo et cetera; a pesar de las diferentes apariencias iniciales, la mente humana no tiene problemas en reconocer, etiquetar y clasificar las diferentes formas.

Una primera fase es la separación de los objetos $B^{(\alpha)}$ contenidos en el "primer plano" (foreground ó FG) con respecto al fondo (background ó BG), fase que por sí misma presenta bastante dificultad pero que, para simplificar, supondremos resuelta. En este caso, la comparación entre objetos $B^{(\alpha)}$ y $B^{(\beta)}$ se puede establecer en términos de

- componentes $C_i^{(\gamma)} \subset \partial B^{(\gamma)}$ asociadas a las apariencias (borde percibido de los objetos);
- representaciones esqueletales $Sk(B^{(\gamma)})$ asociadas al objeto $B^{(\gamma)}$;
- una realimentación entre ambas.

Aún así, el problema es demasiado difícil y es necesario empezar restringiendo el tipo de modelos utilizados para comparar formas asociadas a las apariencias (plantillas deformables, p.e.) ó para comparar representaciones esqueletales; una opción frecuente que permite abordar ambas aproximaciones consiste en elegir deformaciones elásticas en las que el ajuste depende de extremos ó puntos intermedios (discretización del modelo inicial). Los modelos elásticos minimizan habitualmente la energía de una cuerda/membrana elástica que oscila en torno a posiciones que se supone son de equilibrio. Un aspecto importante es la introducción de una métrica ó de un función de energía (métrica en el espacio tangente) sobre las formas elásticas $\mathcal{E}(B^{(\alpha)})$ asociadas al borde ó el esqueleto de un objeto $B^{(\alpha)}$. Para valorar el ajuste de la aproximación es necesario

(1) considerar algún tipo de estructura sobre el "espacio de las formas" (modelable en términos de plantillas asociadas a polinomios de grado bajo, p.e.);
(2) introducir una métrica sobre dicho espacio (para evaluar la diferencia entre formas);
(3) construir estimadores que permitan aproximar alguna noción de invariancia (con respecto a transformaciones lineales descritas en el apartado anterior);
(4) introducir representaciones funcionales para los bordes (usar aplicaciones de Gauss sobre esferas) ó las representaciones esqueletales (usar funcionales definidos sobre grafos, p.e.) de los objetos $B^{(\alpha)}$;
(5) evaluar alguna característica cinemática ó dinámica asociada a la deformación generada sobre la representación funcional (en términos del Hessiano de la energía elástica no-lineal, p.e.) utilizando funcionales típicos vinculados al Cálculo Variacional que permitan minimizar la longitud (geodésicas conectando formas), el área (energía de la membrana), las variaciones de la

curvatura (utilizar flujo de la curvatura media) ó bien estrategias híbridas que combinen algunas de las anteriores (flujo de energía de Willmore, p.e.);
(6) comparar los objetos mediante estrategias topológicas (caminos en el espacio de plantillas) con una realimentación estadística (inferencia con optimización basada en máxima verosimilitud, p.e.);
(7) evaluar el rendimiento de los algoritmos introducidos para el reconocimiento automático.

La estrategia descrita presenta una gran complejidad y problemas abiertos en casi todos los items. Por ello, es necesario restringir aún más el enfoque, restringiéndonos p.e. a contornos planos cerrados dados por curvas simples a las que llamaremos formas planas básicas FPB. En Geometría Algebraica es frecuente utilizar espacios de moduli, en los que cada elementos representa una clase por la acción de un grupo; en este caso, las FPB son elementos de un espacio de curvas obtenidas por la acción del grupo de transformaciones que conservan la forma. Las propiedades de las curvas fpb que representan dichas formas están codificadas por la métrica Riemanniana que se define sobre el espacio cociente. El control de las variaciones se lleva a cabo en términos de operadores diferenciales típicos de la Geometría Diferencial como la divergencia (que expresa la variación del área encerrada entre fpb próximas). La deformación se lleva a cabo de una manera efectiva utilizando técnicas de morphing; sobre el espacio de las deformaciones se define una estadística de la forma. Los diferentes tipos de elasticidad que se pueden definir sobre el espacio FPB (asociados a diferentes funcionales) conduce a a diferentes tipos de correspondencias entre formas para las cuales se identifican los elementos "medios" como reprsentantes canónicos que permitan comparar los fpb entre sí.

El *objetivo* de este trabajo práctico es familiarizar al estudiante con las nociones básicas y algunos de los patrones más utilizados en relación con el caso deformable.

5.3. **TPA3: Elementos Topológicos para el (Des)Equilibrio General en Teoría Económica.** Los resultados relacionados con Teoremas de Punto Fijo (consecuencia del Teorema de Brouwer) tiene interés en gran número de aplicaciones. Una aplicación relevante concierne al Teorema de Existencia en la Teoría del *Equilibrio General* en *Teoría Económica*; en este caso, la introducción de restricciones relativas a diferentes funciones (análisis coste-beneficio en Comercio Internacional -incluyendo flujos financieros-, utilidad-preferencias del consumidor en Microeconomía, bienes y servicios en Macroeconomía, etc) da lugar a conjuntos "factibles" que son convexos y compactos, sobre los cuales se trata de resolver problemas de optimización relativos a mercados sobre los que se supone que se tiene información completa.

La "estática comparativa" (enfoque de la Termodinámica del Equilibrio, p.e.) proporciona el marco conceptual para esta parte de la Teoría Económica que es común a Micro/Macroeconomía y Comercio Internacional. Desde el punto de vista topológico, si se adopta un enfoque basado en precios 'normalizados" (por el dinero como "equivalente universal"), el Teorema de Brouwer garantiza la existencia de soluciones sobre la esfera $\mathbb{S}^n$ (n precios normalizados) y en las aproximaciones lineales al problema permite identificar un solución única al problema (habitualmente en el borde de la región). La formulación tradicional de este resultado en la Teoría del Equilibrio General se conoce como Teorema de Arrow-Debreu y es un caso particular del Teorema de Brouwer dle Punto Fijo.

Sin embargo, la solución matemática proporcionada no tiene ningún sentido desde el punto de vista de la economía real, pues no se dispone de información completa sobre el mercado (sólo sobre $k+1$ de los $N+1$ bienes ó servicios) ó las restricciones no son lineales (lo cual da lugar a multiplicidad de soluciones de equilibrio). El caso de las restricciones no-lineales y su aproximación por poligonales que da lugar a conjuntos no-convexos pero aún con "buenas" propiedades se puede abordar en términos de modelos de propagación para conjuntos no-convexos que dependen de la variación en la distribución de vectores normales a las variedades que representan soluciones locales a la dinámica (hojas de una foliación para el caso regular). Sin embargo, el caso de mercados con información incompleta presenta una mayor riqueza que aún no ha sido explotada de forma adecuada [24]

5.3.1. *El problema del equilibrio en mercados con información incompleta.* Para fijar ideas, supongamos que la información disponible sobre $k+1$ bienes y servicios (el dinero más otros k que se escalan en función del dinero) no está correlacionada dentro de un mercado de $N+1$ bienes y servicios (esta hipótesis es nuevamente una ficción matemática). Dicha información se representa mediante un punto de una grassmanniana $G = Grass(k+1, N+1)$ que representa un subespacio proyectivo $L \subset \mathbb{P}^N$ de dimensión k. En este contexto, el problema del Equilibrio General para Mercados Incompletos, consiste en identificar dónde se encuentran los puntos fijos para una aplicación definida $f : G \to G$ sobre la grassmanniana. Este enfoque es asimismo una simplificación por muchas razones:

- El dinero está sometido a las mismas leyes que los demás bienes, incluyendo creación y destrucción.

[24]Para más detalles ver los módulos 2 y 3 de mis notas sobre *Teoría Económica. Una aproximación diferencial*

- La evolución de la dinámica asociada a los $k+1$ bienes y servicios sobre los que se tiene información varía a lo largo del tiempo (estimación en términos de series temporales), lo cual genera trayectorias observadas en la Grassmanniana que condicionan la localización de posibles equilibrios.
- La información sobre los $k+1$ bienes ó servicios está habitualmente correlacionada.
- La disponibilidad de la información varía y, por consiguiente, la dimensionalidad de los espacios, lo cual lleva a introducir variedades de banderas más generales $\mathcal{B}$ e identificar los puntos fijos para las aplicaciones definidas sobre $\mathcal{B}$.

Es necesario un mayor esfuerzo de conceptualización y de desarrollo para una Teoría más satisfactoria del Equilibrio General en Mercados Incompletos que tenga en cuenta una dinámica más realista de los diferentes mercados, dinámica que habitualmente está lejos del equilibrio preconizado por la Teoría Neoclásica.

5.3.2. *La dinámica fuera del equilibrio.* Contrariamente a lo que postula la Teoría Económica Clásica las condiciones de equilibrio son una ficción matemático y que cualquiera de los mercados está habitualmente en una situación de desequilibrio. En presencia de shocks, los requisitos de continuidad son otra ficción matemática; se producen discontinuidades bruscas que es necesario incorporar al modelo (en términos de funciones escalonadas, p.e.). Por ello, los caminos a considerar deben incluir discontinuidades ó saltos en las trayectorias esperadas. Esta observación hace difícilmente aplicable los métodos basados en caminos (aplicaciones continuas) a una dinámica económica más realista que la actual. Una solución intermedia consiste en analizar los diferentes factores que pueden contribuir a la inestabilidad ó incluso a discontinuidades en la dinámica económica.

El paradigma neoclásico de la Teoría Económica debería partir de distribuciones de campos (ó de forma diferenciales) integrables cuyas soluciones (variedades integrales) representan las hojas $\mathcal{H}_\alpha$ de foliaciones $\mathcal{F}$. Cada hoja se puede interpretar como una "superficie de nivel" asociada una equidistribución de preferencias, asignación de recursos, etc. En este esquema ideal, gracias a una adecuada parametrización de los hojas, pequeños cambios en la asignación de factores (asociados a la producción o a los recursos utilizados) ó en la retribución de los factores (capital, trabajo, tecnologías) dan lugar a desplazamientos sobre la misma hoja (direcciones tangenciales) ó transversales a las hojas (direcciones normales). Este esquema que lamentablemente apenas se encuentra en los manuales de Teoría Económica explica de una forma sencilla y eficiente la parte estable de la Dinámica Económica. Sin embargo, no explica casi nada de la situación de desequilibrio en la que se encuentra la mayor parte de le economía real.

Es necesario reemplazar las condiciones de regularidad por la posibilidad de fenómenos de bifurcación en las soluciones asociadas a los sistemas de EDO (evolución temporal), EDP (evolución espacial en los mercados de factores) ó EDM (evolución espacio-temporal). El esquema a desarrollar debe tener en cuenta los diferentes tipos de rigideces (la "perfección" de los mercados es otra idealización absurda) que se presentan para cada uno de los mercados; las rigideces deben ser expresadas en términos de mapas de curvaturas que afectan a cada uno de los mercados por separado.

La Topología Algebraica/Diferencial es significativa pues permite identificar los obstáculos (agujeros en el modelo de superficie), las patologías asociadas a la propagación (ruptura de simetrías locales) y el comportamiento cualitativo de las soluciones asociadas a los modelos de propagación. La integración de estos aspectos en modelos más elaborados es un reto para el próximo futuro de enorme relevancia para intentar comprender mejor la actual situación y proponer mejoras que no sean simplemente parches de un modelo periclitado y equivocado desde el punto de vista matemático.

El *objetivo* de este trabajo práctico es familiarizar al estudiante con una aproximación topológica a la dinámica económica fuera del equilibrio.

5.4. **TPA4: Nubes de puntos e Invariantes topológicos.** Una nube de puntos es una colección de un número finito de puntos $2D$, $3D$ ó $4D$ (es decir, $3D$ variando a lo largo del tiempo) capturados mediante dispositivos externos (cámaras ó dispositivos láser, p.e.) que es necesario identificar, agrupar y simplificar para la extracción de características de la forma a partir de las apariencias. El número de componentes conexas del objeto ó el orden de conexión son dos ejemplos típicos. Para identificarlos es necesario es necesario diseñar estrategias de agrupamiento y simplificación que depende del nivel de detalle y, por consiguiente, del tipo de selección (técnicas de muestreo) de la información disponible.

5.4.1. *Estrategias de agrupamiento.* Las estrategias de agrupamiento operan por agregación de "elementos básicos" A y B, p.e., para los cuales es preciso identificar si $A \cup B$ presenta "características similares". Este es un problema típico de Topología Algebraica que se aborda a medio nivel en términos de homotopía (Teoremas tipo Van Kampen) para garantizar la independencia con respecto a deformaciones ó bien de homología (Teoremas tipo Mayer-Vietoris) para garantizar la independencia con respecto a las estructuras simpliciales superpuestas.

La idea para asociar invariantes topológicos a estas colecciones discretas de datos consiste en construir un complejo simplicial y calcular los invariantes topológicos asociados al complejo simplicial. Sin embargo, no existe una única forma de construir dicho complejo simplicial; ni siquiera una triangulación óptima asociada a una colección discreta de puntos: No hay un único criterio de optimización, ni siquiera para una nube de puntos prefijada. Los resultados relativos a la forma a obtener deben ser independientes tanto de la selección de información, como de las deformaciones que se dén asociadas al "nervio" del objeto [25].

5.4.2. *Controlando cambios en las apariencias.* Para minimizar la dependencia con respecto a apariencias cambiantes (situación típica en escenas de vídeo, p.e.), es conveniente identificar representaciones simbólicas (dadas por grafos eventualmente orientados). De cara a la estimación de características invariantes desde la localización relativa de la cámara, el modelo a desarrollar sólo debe depender de las propiedades combinatorias que persisten, de forma independiente con respecto a los valores numéricos obtenidos usando la presentación (generadores y relaciones) de grupos de homotopía) ó bien las relaciones algebraicas obtenidas a partir del operador borde en complejos simpliciales. La "persistencia" de estas propiedades se expresa en términos de la combinatoria de recubrimientos y se expresa en términos de la "homología persistente", una extensión natural de la (co)homología de Cech. Esta cuestión se introduce al final del módulo 2, tratándose con más detalle desde un punto de vista computacional en el módulo 5.

5.4.3. *Segmentación volumétrica asociada a nubes de puntos.* El *objetivo* de este trabajo práctico es familiarizar al estudiante con las nociones básicas asociadas a diferentes criterios de agrupamiento en $3D$ utilizando información discreta (nubes densas de puntos) procedentes de escaneos o bien del solapamiento de diferentes vistas

[25] El "nervio" de un objeto B_α se define como un retracto de deformación continuo del borde ∂B_α