CAPITULO 1: ESPACIOS DE CAMINOS

JAVIER FINAT, SEPTIEMBRE 2018

Contents

Este capítulo tiene una naturaleza descriptiva orientada a fijar notación, hechos básicos y problemas a resolver en relación con los problemas de clasificación local y global, tanto de espacios topológicos X, Y como de las aplicaciones continuas $f : X \to Y$ que los relacionan entre sí a partir de los caminos $\gamma : [a, b] \to X$ que podemos construir sobre ellos. A las aplicaciones no necesariamente siempre definidas $f : X - \to Y$ les llamaremos *morfismos* y los representaremos mediante $Mor(X, Y)$

La "exploración" de propiedades de un objeto cualquiera B se traduce en llevar a cabo "recorridos" (construyendo "caminos") que permitan detectar propiedades independientes de los recorridos (clases de caminos), indexar hechos significativos (agujeros, obstáculos, p.e.) y, finalmente, clasificar a los objetos con "propiedades similares" . Esta descripción tan vaga pone en escena algunos de los problemas más importantes que afectan a la detección, almacenamiento y clasificación de información a partir de propiedades invariantes asociadas a un espacio topológico X como "modelo" al más bajo nivel de un objeto B. Dejando a un lado las cuestiones del almacenamiento de información (datos topológicos que conciernen a la Topología Computacional), la clasificación topológica de espacios se entiende salvo homeomorfismo, es decir, módulo aplicaciones biyectivas y bicontinuas (continua y con inversa continua).

En relación con la condición de homeomorfismo, nótese que la continuidad de la función inversa no es consecuencia de las demás condiciones, salvo que X sea compacto e Y Hausdorff (repasa el Curso de Topología General). El Análisis Funcional muestra ejemplos de aplicaciones biyectivas continuas con inversa discontinua, en particular, para espacios de funciones lisas a valores reales $C^\infty(X, \mathbb{R})$ donde aparecen tipos de convergencia que pueden definirse en términos de diferentes números de derivadas; las cuestiones relativas a las distinciones entre las categorías $C^r(X, \mathbb{R})$ y $C^{r+1}(X, \mathbb{R})$ presentan sutilezas que no se abordan en este Curso; nos restringimos a los casos topológico $r = 0$ (conexión con la Topología General), diferenciable $r = \infty$ (denso en C^r para $r \geq 1$) y analítico $r = \omega$, por su especial significación para las aplicaciones que se comentan en el curso.

Salvo en el caso de la Geometría Diferencial, en la que la integración de campos vectoriales da lugar a homeomorfismos locales, la construcción de homeomorfismos es un problema muy difícil para dimensión $d \geq 2$. Por ello, habitualmente se recurre a criterios de "tipo negativo", es decir, si dos espacios topológicos tienen invariantes (por homeomorfismo) diferentes, entonces no pueden ser homeomórficamente equivalentes.

La *estrategia general* consiste en introducir *invariantes algebraicos computables* que permitan discriminar entre objetos. Los invariantes que se introducen son más débiles que la clase de equivalencia módulo homeomorfismo, pero tienen la ventaja de ser más fácilmente computables gracias a la disponibilidad e diferentes técnicas de tipo algebraico, que afectan a los coeficientes, a las estructuras superpuestas ó al tipo de cálculos realizados sobre dichas estructuras (de ahí el nombre de Topología Algebraica). Finalmente, en la comunicación presentada por Markov (en el ICM de 1958 se demuestra que el problema de clasificación modulo homeomorfismo (enunciado por Hurwitz en 1897) es irresoluble, lo cual justifica a posteriori las diferentes aproximaciones llevadas a cabo en las Topologías Algebraica y Diferencial.

0.1. **Una aproximación histórica al espacio de caminos.** En esta subsección se presentan algunos de los hitos más relevantes para el estudio de espacios a partir de las "clases de caminos" construidos sobre ellos, incluyendo una introducción a sus representaciones simbólicas (grafos). El tratamiento computacional de estos últimos se lleva a cabo en el módulo 2 (Topología Computacional) de la materia B_1 (Computational Mechanics).

0.1.1. *La "prehistoria".* La "prehistoria" concierne a algunas "curiosidades" como el problema de los puentes de Koenigsberg por parte de L.Euler (1752) ó el de la localización relativa de Vandermonde (1771). A pesar del carácter ingenuo de las descripciones desarrolladas, estos trabajos contienen el germen de buena parte de las nociones de conexión por caminos, la reducción a problemas de matemática discreta (basada en combinatoria o en grafos) y el de la orientación (en términos de determinantes).

Los primeros estudios sistemáticos de la topología de caminos para estudiar propiedades de variedades topológicas se deben a B.Riemann (1826-1866) quien introdujo la noción de conexividad y de recubrimientos ramificados. Estas nociones proporcionaron el punto de partida para estudiar propiedades geométricas de las superficies que son solución de funciones algebraicas elementales definidas sobre objetos geométricos sencillos.

En particular, para cada punto del lugar de ramificación de una aplicación, se tienen diferentes soluciones (eventualmente un número infinito) que dan lugar a diferentes "ramas" (determinaciones de la función) en el espacio de partida que se aplican sobre el "lugar discriminante" del espacio de llegada. El estudio analítico de estas ramas había sido iniciado por Puiseux (hacia 1850) en relación con la forma local de soluciones de ecuaciones algebraicas $f(z,w)=0$

Así, p.e., en el caso más simple de un polinomio de grado $k+1$ en una sola variable el lugar de ramificación corresponde a las diferentes soluciones reales (desde 0 hasta k) que puede presentar a las que se llama "raíces" y que se aplican todas sobre un único valor en el espacio de llegada que es un punto con multiplicidad $\leq k$ (visualizadlo con las $(k+1)$-ésimas raíces de la unidad para $f(z)=z^{k+1}$ y sus deformaciones). Sobre el conjunto de soluciones en el espacio de partida actúa un grupo que intercambia unas con otras al que se llama "grupo de monodromía" de la ecuación. Las conexiones de este grupo con la Teoría de Galois se estudian en Álgebra.

0.1.2. *Una aproximación topológica a superficies de Riemann.* El ejemplo más elemental (Riemann, 1851) está dado por la función $w(z)=z^2$ sobre la esfera $\mathbb{S}^2$ que siempre tiene 2 raíces distintas salvo para $z=0$ y $z=\infty$, casos en los que sólo hay una única raíz, es decir, cualquier camino que pase por dichos puntos se "ramifica" en dos componentes $+\sqrt{w}$ y $-\sqrt{w}$ para los valores con $z\neq 0,\infty$. Este comportamiento le sugirió a Riemann etiquetar como *puntos de ramificación* de la w-superficie que es "doblemente recubierta" por la z-esfera.

Esta superficie recubridora (llamada ahora de Riemann) es el primer ejemplo de *espacio recubridor* $\tilde{\mathbb{S}}^2$, en este caso con dos hojas, de una variedad conexa como la esfera. En otras palabras, cada camino en la z-esfera corresponde a dos caminos en la w-esfera (asociados a las dos raíces que tiene cada $z\in\mathbb{S}^2$. En particular, todos los caminos que pasan por los puntos de ramificación $z = 0$ y $z = \infty$ son "dobles" (tienen dos raíces) salvo en los puntos de ramificación correspondientes a dichos valores, donde la orientación del recubrimiento "cambia de signo", es decir, el grupo $\mathbb{Z}_2$ intercambia las hojas del espacio recubridor de dos hojas $\tilde{\mathbb{S}}^2$ cuando se alcanzan los puntos de ramificación. Algunas cuestiones de gran interés relacionadas con este ejemplo básico consisten en que

- el espacio recubridor $\tilde{\mathbb{S}}^2$ presenta propiedades "universales" en relación con propiedades de factorización con respecto a aplicaciones (ver más abajo);
- el argumento se extiende a cualquier función algebraica elemental $w(z) = z^n$ de grado n sobre la esfera $\mathbb{S}^2$, obteniéndose un recubrimiento $\tilde{\mathbb{S}}^2 \to \mathbb{S}^2$ de la esfera con *n puntos de ramificación* $\{b_1 \ldots, b_n\}$;
- el estudio de los puntos de ramificación (puntos críticos para la aplicación w) permite clasificar las superficies de Riemann a partir del "género" (ver capítulo 5, módulo I).

0.1.3. *Extendiendo el enfoque de Riemann.* El "ejemplo" correspondiente al doble recubrimiento descrito en el apartado anterior proporciona una motivación para algunas cuestiones cruciales como las siguientes:

- ¿Qué ocurre con los caminos γ definidos en el complementario $\mathbb{S}^2 - \{b_1 \ldots, b_n\}$ del lugar de ramificación B?.
- ¿Es posible extender la construcción precedente a recubrimientos ramificados en $3D$ para la esfera $\mathbb{S}^3$ (obtenida completando $\mathbb{R}^3$ con un punto (Alexandrov)? El lugar de ramificación B tendrá en este caso dimensión 1, en lugar de 0, pero ¿qué ocurre con los caminos contenidos en el complementario $\mathbb{S}^3 - B$ de B?
- ¿Es posible clasificar los recubrimientos ramificados de la esfera $\mathbb{S}^3$ de forma similar a como se hace para los de la esfera $\mathbb{S}^2$?

Por el momento, se pospone la respuesta a estas cuestiones; las dos primeras se abordan de una forma más sistemática a partir del cap.3 La tercera contiene el germen de la Teoría de Nudos como lugar de ramificación para aplicaciones definidas sobre la esfera $3D$, de gran interés adicional por sus aplicaciones a la Física Teórica ó a la Genética sobre los que se proponen posibles trabajos prácticos a realizar.

0.1.4. *Una aproximación estática a deformaciones.* La homotopía introducida para caminos o para aplicaciones entre espacios proporciona el modelo topológico más simple para estudiar deformaciones desde el punto de vista topológico; la versión diferencial utiliza (distribuciones de) campos vectoriales o, con más generalidad, tensoriales y se aborda en el contexto de la Topología Diferencial (ver materia A_4 para detalles y referencias).

Algunas de las aplicaciones más interesantes (con gran cantidad de problemas abiertos) conciernen a la identificación de "formas" en imágenes a partir de las "apariencias" o bien al seguimiento de objetos con apariencias cambiantes en secuencias de vídeo con objeto de identificar "comportamientos" (patrones topológicos para gestos, p.e.). [1]

[1] Estos tópicos se abordan en los módulos 4 y 5 del CEViC (Curso de Especialista en Visión por Computador) de la materia B_3.

1. **Espacios y aplicaciones**

En la primera subsección se describen algunos ejemplos básicos de espacios topológicos de interés para la Topología y la Geometría que proporcionan un banco de pruebas para ilustrar objetos. La segunda subsección presenta algunas generalidades sobre aplicaciones entre espacios. El estudio de caminos sobre espacios y sus transformaciones a través de aplicaciones proporciona la materia prima para abordar el primer bloque de técnicas espe´cificas de la Topología Algebraica.

1.1. **Espacios topológicos básicos.** El espacio cartesiano $\mathbb{R}^n$ soporta diferentes tipos de estructura euclídea $\mathbb{E}^n$, afín $\mathbb{A}^n$ ó proyectiva $\mathbb{P}^{n-1}$ que se suponen conocidos de la Geometría Lineal. Cada uno de ellos es G-homogéneo por la acción de un grupo lineal que se puede considerar como un subgrupo de $GL(n;\mathbb{R})$.

El espacio cartesiano $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo, por lo que tiene una estructura global muy sencilla que se supone bien conocida. Utilizando el sistema coordenado habitual es posible construir espacios topológicos no-triviales tales como

- La *esfera* $(n-1)$-dimensional $\mathbb{S}^{n-1} := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ de radio unidad
- El *disco unidad* n-dimensional $\mathbb{D}^n := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$
- El *cubo* n-dimensional $I^n := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$
- El *semiplano superior* (Poincaré) $\mathbb{H}^{n-1} := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$.

Se suponen conocidas las nociones de punto interior y punto frontera (en caso contrario, repasar las definiciones mostradas en Topología General).

Una transformación $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es un *homeomorfismo* si es biyectiva y bicontinua. Por el Teorema de la Invariancia del Dominio, la imagen de un abierto (resp. cerrado) por un homeomorfismo es un abierto (resp. cerrado). La noción de homemorfismo permite definir de forma intrínseca la dimensión de un espacio topológico X.

1.1.1. *Variedad topológica. Definición.*- Diremos que X tiene una C^0-estructura dada por el atlas $(\mathcal{U}, \Phi)$ si $\mathcal{U}$ es un recubrimiento por abiertos U_α de X y Φ es una colección de homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ sobre su imagen, tales que

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es una C^0 equivalencia para cualquier par α, β con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Una C^0-variedad ó *variedad topológica* es una clase de equivalencia de C^0-estructuras para un atlas maximal.

La noción de C^r-estructura (resp. C^r-variedad) es similar a la de C^0-estructura (resp. C^0-variedad), reemplazando 0 por r, para $r = 0, 1, \ldots \infty$ (caso "liso" ó "suave"; ambos son equivalentes) ó para $r = \omega$ (caso analítico). Los ejemplos mostrados en el apartado precedente admiten estructura de C^r-variedad para cualquier r.

1.1.2. *Borde de una variedad.* Diremos que X es una *variedad topológica con borde* si cualquier punto admite un entorno que es C^r-equivalente a $\mathbb{R}^n$ ó bien a $\mathbb{R}^{n-1}$; a los primeros se les llama puntos del interior y se representan mediante $Int(X)$, mientras que a los segundos se les llama puntos del borde y se les representa mediante ∂X.

Ejemplos.- Tres "ejemplos" que juegan un papel fundamental en la clasificación de superficies (que proporcionan los únicos tipos topológicos según el Teorema de Uniformización de Riemann para $n = 2$) son los siguientes:

- El borde del espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{E}^n$ es vacío (de hecho, cualquier espacio cartesiano tiene borde vacío).
- El disco n-dimensional $\mathbb{D}^n$ es una variedad con borde $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$.
- El semiplano superior $\mathbb{H}^n$ es una variedad con borde $\partial\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1}$. Para $n = 2$, la introducción de g agujeros sobre el modelo del plano hiperbólico (Poincaré) dado por el disco $\mathbb{D}^2/\mathbb{Z}_2$ da lugar a la clasificación de las superficies compactas conexas orientables.

Ejercicio.- Describe la frontera de cualquiera del complementario de una unión de discos en cada uno de los espacios anteriores.

Ejercicio.- Fijado cualquier hiperplano $H \simeq \mathbb{P}^{m-1}$, el espacio proyectivo m-dimensional $\mathbb{P}^m$ descompone en unión disjunta del hiperplano y el subespacio afín complementario $\mathbb{A}^m$. ¿Se puede interpretar dicho hiperplano como el borde y el espacio afín como el interior de una variedad con borde asociada al espacio proyectivo?. Razona la respuesta.

1.1.3. *Variedades con borde. Definición.-* Se dice que una C^r-variedad topológica m-dimensional X es una variedad con borde ∂X si cualquier punto $x \in X$ admite un entorno que es C^r-equivalente a un abierto del semiespacio superior $\mathbb{H}^m := \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$. El borde de de $\mathbb{H}^m$ es, por definición, el conjunto de puntos del hiperplano $x_m = 0$ que es C^r-equivalente a un hiperplano afin arbitrario $\mathbb{A}^{m-1}$.

A los puntos que tienen un entorno equivalente a un abierto de $\mathbb{R}^m$ (resp. de $\mathbb{R}^{m-1}$) ó se les llama puntos interiores (resp. puntos del borde). Se denota mediante $Int(X)$ (resp. ∂X) al conjunto de puntos interiores (resp. del borde) de X. Obviamente, se tiene una descomposición $X = Int(X) \cup \partial X$ como unión disjunta. Frecuentemente, a las variedades topológicas con borde se les denota mediante un par $(X, \partial X)$

Ejemplo.- Cualquier familia finita de *desigualdades* definidas por C^r-funciones (algebraicas, diferenciables, analíticas, p.e.) define una semi-variedad (algebraica, diferenciable, analítica, resp.) cuyo borde está dado por la anulación de dichas funciones. Por razones de computabilidad, habitualmente se supone que las C^r-funciones son polinomios de grado $\leq d$, en cuyo caso la Geometría Semialgebraica proporciona el marco para el estudio de las variedades correspondientes.

Ejercicio.- Extiende la descripción de variedades con borde a espacios de funciones. ¿Es necesaria la condición de disponer de base numerable?. Razona la respuesta.

1.1.4. *El caso relativo.* El caso relativo corresponde al estudio de las aplicaciones entre variedades $f : X \to Y$ o, con más generalidad, espacios topológicos. En el caso de variedades con borde, corresponde a aplicaciones ó con más generalidad morfismos $f : (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$.

Interesa saber si la propiedad de ser un punto interior o del borde es una propiedad intrínseca o no. El resultado siguiente responde a esta cuestión

Teorema de la Invariancia del Dominio.- Dada una aplicación $f : (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$ entre variedades con borde, se tiene que

$$f(Int(X)) \subseteq Int(Y) \quad \text{y} \quad f(\partial X) \subseteq \partial X$$

A pesar de su carácter intuitivo, este resultado es altamente no-trivial y, para la demostración del caso general, requiere el Teorema de Brouwer del punto fijo que se se presenta en el módulo 2 (Homología y Cohomología) de esta materia A_2. Sin embargo, hay "casos particulares" con una demostración bastante sencilla, como el siguiente p.e.:

Proposición.- Supongamos que K es un compacto, X un espacio Hausdorff y $f : K \to X$ es inyectiva y continua. Entonces f induce un homeomorfismo between K and $f(K)$.

Demostración.- Para que una aplicación biyectiva y continua $f : X \to Y$ sea un homeomorfismo, basta que f sea una aplicación cerrada (resp. abierta), pues en ese caso $(f^{-1})^{-1}(A) = A$ es cerrado (resp. abierto) para cualquier cerrado (resp abierto) $A \subset Y$. Por ello, f^{-1} es continua y, en consecuencia, f es un homeomorfismo [2]

Si $A \subset K$ es cerrado, como K es compacto, se tiene que A es compacto y, por consiguiente, también lo es $f(A)$. En un espacio Hausdorff, los compactos son cerrados. Por ello, $f(A)$ es cerrado y, por consiguiente, f es una aplicación cerrada.

El resultado anterior *no demuestra* el Teorema de la Invariancia del Dominio, pues requiere hipótesis adicionales relativas al espacio y a condiciones de "separación global" (no sólo locales).

Ejercicio.- Construye una aplicación continua y localmente inyectiva, para la que no se verifique el Teorema de la Invariancia del Dominio. *Indicación:* Utiliza la parametrización local dada por una curva nodal. [3]

1.1.5. *Algunas aplicaciones.* El caso inicial de variedades con borde correspondiente a la Topología Algebraica está relacionado con la construcción del operador borde sobre símplices y su extensión a cadenas simpliciales (combinación formal de símplices). Los símplices k-dimensional son la generalización a dimensión arbitraria de las figuras geométricas más elementales dadas por la imagen de puntos, segmentos, triángulos, tetraedros, etc. Cuando dichos símplices tienen coordenadas afines (suma igual a la unidad) cuyos valores están comprendidos entre 0 y 1 se dice que son *símplices estándar*. Un *símplice k-dimensional* (resp. singular) es la imagen del símplice estándar por una aplicación lineal (resp. continua).

Los puntos irregulares del borde (vértices o esquinas, aristas de poliedros o politopos, p.e.) juegan un papel especial en multitud de problemas relacionados con el

[2] Esta es la situación "clásica" en Geometría (Diferencial o Algebraica) para Variedades Regulares

[3] Este ejercicio resulta especialmente útil pues pone en escena una distinción sutil entre embebimientos e inmersiones que se desarrolla en el módulo 1 (Topología Diferencial Básica) de la materia A_4 (Topología Diferencial).

comportamiento de sistemas en las proximidades del borde (Dirichlet) o problemas de optimización relacionados [4]

Las aplicaciones matemáticas de variedades con borde (a cuestiones básicas de Ingeniería o Teoría Económica, p.e.) están relacionadas con problemas de optimización (lineal o no-lineal). Uno de los métodos más comunes de optimización lineal en el *caso convexo* está dado por el *método del símplice* que permite localizar el óptimo en algún punto del borde de la estructura simplicial asociada al objeto convexo. Este caso se resuelve fácilmente, pero su extensión al caso lineal no convexo o bien al caso no-lineal presenta dificultades bastante mayores.

Los problemas de optimización se aplican en casi todas las áreas de conocimiento de Física, Química, Biología, Ingeniería y Economía. Las funciones que definen el borde representan las restricciones estructurales del sistema. Algunas de las aplicaciones en Ingeniería a Robótica (restricciones estructurales para el robot o para tareas a realizar, p.e.) o a Visión Computacional (borde de objetos para facilitar la discriminación y el reconocimiento semi-automáticos, p.e.) se desarrollan en mis notas sobre dichas áreas que están disponibles en mi sitio web [5]. Una introducción a las aplicaciones a Economía se pueden ver en mis notas sobre "Una aproximación diferencial a la Teoría Económica".

1.2. **Construcciones sobre espacios y aplicaciones.** En esta subsección se muestran varios procedimientos constructivos y se comentan desarrollos recientes, incluyendo algunas aplicaciones al caso discreto que se utilizan en diferentes áreas de Ingeniería relacionadas con aplicaciones a la Mecánica Computacional B_1, la Robótica B_2, la Visión por Computador B_3 ó la Informática Gráfica B_4 [6].

Además de las cuestiones de modelado estructural que se presentan a lo largo de esta materia, el problema fundamental es la estimación. La clave para llevar a cabo dicha estimación consiste en mostrar diferentes herramientas para el estudio de deformaciones desde el punto de vista discreto, describiendo cómo afectan a la construcción de caminos y a las estructuras de proximidad diseñadas sobre mallas.

1.2.1. *Plantillas deformables.* Las plantillas deformables aparecen en todas las aplicaciones a la Ingeniería mencionadas más arriba. Las más sencillas corresponden a la composición en el plano de intervalos de rectas (poligonales ó bien árboles eventualmente abiertos por extremos) o bien a "lazos" dados por caminos simples (topológicamente equivalentes a circunferencias $\mathbb{S}^1$).

La "simplicidad" sólo es aparente, pues p.e. la descripción explícita de la conversión de una circunferencia en una curva simple (cerrada y sin auto-intersecciones), así como la estimación de la "proximidad" entre diferentes curvas simples requiere desarrollos avanzados de la Teoría de Deformaciones y del Cálculo Variacional, p.e.. La dificultad de ambos problemas en dimensión $D \geq 2$ crece de forma exponencial con D y presenta una gran cantidad de problemas abiertos en la actualidad de gran interés para todo tipo de aplicaciones.

[4] Ver módulos 2 (Computational Algebraic Topology) y 3 (Computational Differental Topology) de la materia B_1 (Computational Mechanics) para detalles, aplicaciones y referencias.

[5] Ver materias B_2 (Robotics. A hierarchised approach) y B_3 (Curso de Especialista en Visión por Computador) para detalles y referencias

[6] Para más detalles y referencias ver las introducciones a los materias , B_i en mi página web.

De acuerdo con las taxonomías clásicas correspondientes al marco matemático, algunas estrategias típicas para abordar estos problemas se etiquetan como

- *algebraica:* introducir un grupo ó alguna de sus variantes más débiles (grupoide ó pseudogrupo, típicamente) que actúa sobre el espacio de "objetos" modelados como C^r-variedades mediante C^r-equivalencias;
- *diferencial:* introducir diferentes tipos de campos (escalares, vectoriales, tensoriales) que permiten describir localmente las deformaciones a llevar a cabo;
- *geométrica:* introducir algún tipo de métrica (distancia) sobre el espacio de C^r-objetos (con alguna estructura adicional para que sea metrizable) que permita identificar los objetos "más próximos".

Esta descripción sigue un orden de complejidad creciente que requiere elementos adicionales procedentes de la acción de grupos sobre variedades o con más generalidad espacios topológicos, los diferentes tipos de acción (diferencial, infinitesimal) asociados a campos o el Cálculo Variacional sobre espacios metrizables asociados a formas (minimizando distancia, área, volumen, ángulos, ó en los casos más sofisticados funcionales de energía o de curvatura).

Todos estos tópicos requieren desarrollos complementarios y ejemplos ilustrativos que se desarrollan sobre todo en la materia B_1 (Computational Mechanics). No obstante, hay que tener siempre presente que en todas las estrategias descritas se requiere

(1) una *estimación de "hechos significativos"* (eventos simples o compuestos);
(2) una *verificación del carácter robusto* (con respecto a pequeñas perturbaciones para objetos rígidos) *vs adaptativo* (con respecto a la variabilidad permitida en el caso de objetos deformables); y
(3) una *validación* final del modelo para su aceptación o rechazo.

Todas estas fases requiere una discretización de los modelos que se desarrolla para caminos (aproximables mediante poligonales) o bien objetos (aproximables mediante PL-estructuras).

- En este primer módulo (Homotopía) de la materia A_2 (Topología Algebraica) la estimación de caminos se lleva a cabo en términos de puntos aislados cuya conexión consecutiva da lugar a poligonales (como PL-aproximación a caminos regulares).
- En el segundo módulo (Co-Homología) de la materia A_2 (Topología Algebraica) la estimación de C^r-objetos X y funcionales sobre X se lleva a cabo en términos de estructuras simpliciales o celulares que aproximan la topología de X.

En cualquier caso, es necesario discretizar y aproximar los C^r-objetos para facilitar su aproximación a C^r-estructuras. En los tres apartados siguientes se esbozan algunas ideas básicas sobre estas cuestiones.

1.2.2. *Discretizando trayectorias y sus deformaciones.* La generación automática de caminos que conectan un punto inicial y final de una trayectoria representada por un camino $\gamma : [0,1] \to X$ es crucial en Robótica o bien en aplicaciones más cotidianas como el problema del viajante.

La consecución de objetivos parciales ligados a la trayectoria prevista se representa mediante una discretización del intervalo $[0,1]$ que parametriza la trayectoria, insertando una colección discreta (no necesariamente regularmente distribuida) de puntos intermedios $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_d = 1$. Las imágenes $x_i := \gamma(t_i)$ de dichos puntos dan lugar a puntos intermedios $x_0, \ldots, x_d \in X$ que permiten evaluar on-line los resultados asociados a la realización de la trayectoria.

Además de los caminos lineales a trozos (PL: Piecewise Linear), un caso especialmente interesante corresponde a *snakes* (serpientes), es decir, caminos parametrizados por trozos de curvas racionales de grado d. Estas curvas están determinadas por $d+1$ puntos de control que imponen condiciones de incidencia (pasar por el punto) o de tangencia (ser tangente a la curva en dicho punto) que sean independientes en el espacio de curvas [7].

Las condiciones de incidencia o tangencia son proyectivamente invariantes, es decir, no dependen de la posición relativa del observador con respecto a la curva. Habitualmente, se imponen condiciones adicionales para que la suma de todos los coeficientes sea igual a la unidad (como extensión obvia de las coordenadas afines).

La deformación continua de un camino γ_0 en otro camino γ_1 se lleva a cabo mediante una aplicación continua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to X$ que permite conectar $\gamma_0(t) = \Gamma(0,t)$ con $\gamma_1(t) = \Gamma(1,t)$. La discretización puede afectar asimismo a la variable $s \in [0,1]$ correspondiente a la primera copia del producto de intervalos unidad.

En el caso de espacios discretos (asociados a grafos, p.e.), la discretización a realizar debe adaptarse a puntos (nodos del grafo, p.e.) que sean significativos. Dicha discretización da lugar a subconjuntos inmersos en la representación discreta original (subgrafos, p.e.) para los que es importante introducir relaciones de equivalencia que faciliten la aplicación de criterios de optimización. [8]

1.2.3. *Discretizando aplicaciones.* La discretización de una aplicación continua $f : X \to Y$ entre dos variedades topológicas X e Y se lleva a cabo habitualmente usando representaciones paramétricas de dichas variedades. En el contexto diferencial, dichas representaciones proceden de integrar campos; aquí se suponen que ya están dadas.

Un *ejemplo típico* corresponde a las superficies B-splines dadas como el producto de dos trozos de curvas racionales de grados d_1 y d_2 dadas por d_1+1 y d_2+1 puntos de control, respectivamente; este ejemplo se extiende de forma natural a dimensión superior. Este tipo de modelado se utiliza de forma habitual para modelado de personajes en 3D; para cuestiones de animación de personajes, interesa generar de forma automática la deformación entre dos modelos (correspondientes a dos "instantáneas", p.e.).

Un *ejemplo más avanzado* corresponde al modelado y simulación de efectos dinámicos utilizando p.e. métodos de elementos finitos (FEM) de superficies en presencia de diferentes tipos de tensiones procedentes de la Mecánica de Medios

[7] Se dice entonces que los puntos o las rectas que imponen dichas condiciones están en "posición general"

[8] El problema de isomorfismo entre subgrafos se aplica en multitud de áreas aplicadas; desde el punto de vista computacional es un problema NP-hard y, actualmente, no se conocen soluciones óptimas, resolviéndose mediante la introducción de criterios adicionales (incluyendo procedimientos heurísticos).

Continuos. La formulación de estas condiciones requiere campos tensoriales que se describen en el módulo A_3 (Tensores) de la materia A_1 (Geometría Diferencial).

Las irregularidades de los materiales (granularidad, p.e.) o las asociadas a la composición y forma de los materiales considerados dan lugar a una recomposición cristalina, pudiendo dar lugar a fenómenos de fractura que se desea evitar a toda costa. Este tipo de problemas está relacionado con la Mecánica de Materiales (incluyendo diseño de nuevos materiales) que es una de las áreas de investigación más activas en Ingeniería.

En ausencia de dicha parametrización es necesario utilizar técnicas estadísticas generando tablas input-output que proporciona una representación discreta de modelos continuos correspondientes a aplicaciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$; las $p \times n$-matrices proporcionan una PL-aproximación a dichas aplicaciones. En ausencia de sistemas de referencia "fiables" (con respecto a las cuales utilizar matrices), es necesario recurrir a procedimientos de estimación no-paramétrica.

Un ejemplo típico avanzado de estimación no-paramétrica aparece asociado a las fases de entrenamiento iniciales de redes neuronales artificiales que se construyen evaluando las respuestas (output) ejecutados por "comandos" a una colección de estímulos (inputs) capturados por los sensores. [9]

1.2.4. *Estructuras de proximidad.* Los fenómenos críticos asociados a la discretización de caminos o de aplicaciones se representan frecuentemente como "eventos" que es necesario modelar con objeto de disponer respuestas que garanticen la tolerancia a fallos de los sistemas artificiales desarrollados. El carácter crítico para una trayectoria o para una superficie aparece asociado habitualmente a un valor extremal para una función o bien para un funcional (en el caso de problemas de Optimización o, con más generalidad, Cálculo Variacional).

Para facilitar la gestión y el control de la evolución de sistemas en las proximidades de puntos críticos o sus imágenes (valores críticos) de una función $f : X \to \mathbb{R}$ es conveniente disponer de información métrica. Si el soporte del espacio X es una variedad (pseudo-)riemanniana (M, ds^2) o bien se trata de un espacio funcional con "buena" estructura métrica (Hilbert, Banach o incluso Fréchet), el problema se resuelve fácilmente recurriendo a la métrica ó la (pseudo)norma disponible.

Un caso particularmente difícil corresponde a criterios métricos que permitan representar la proximidad entre curvas "simples" (conexas, cerradas y sin autointersecciones), p.e.. Este caso fue resuelto por D.Mumford y J.Shah (1989) en relación con la deformación de siluetas en el plano de imagen y facilita la clasificación de objetos detectados en imágenes. Su demostración utiliza la minimización de un funcional de tipo variacional en el "espacio de moduli" de curvas planas [Arb85] [10].

La adaptación de estas estrategias que facilite el seguimiento de siluetas en vídeo es un problema para el que aún no se dispone de una implementación eficiente que proporcione resultados en tiempo real. Se desconoce la respuesta para el problema

---

[9] Para una introducción al modelado de tareas para robots basado en Redes Neuronales Artificiales ver los capítulos finales de los tres primeros módulos de la materia B_2 (*Robotics. A hierarchised approach*).

[10] E.Arbarello, M.Cornalba, P.Griffiths, J.D.Harris: *Geometry of Algebraic Curves. Vol. I*, Springer-Verlag, 1985

similar para objetos volumétricos acotados por "superficies simples" (deformaciones de la esfera ordinaria) [11].

Lamentablemente, en la mayor parte de los casos se desconoce si existe una métrica natural sobre el espacio en el que se consideran caminos o sobre el que se superponen aplicaciones; ello se debe a que el espacio de dichas aplicaciones no es metrizable. Una estrategia alternativa consiste en pasar al cociente el "espacio de formas" módulo alguna relación de equivalencia que permita dotar al espacio cociente de una métrica.

Esta estrategia se desarrolla en relación con problemas de Reconocimiento en Visión Computacional, introduciendo la métrica de Peterson-Weil para el espacio de moduli de curvas. Actualmente se ignora si existe algún tipo de superficies "suficientemente generales" (como las K3 en el caso algebraico, p.e.) para las que se pueda desarrollar una estrategia similar [12].

En ausencia de "buenas propiedades" desde el punto de vista métrico, es necesario recurrir a criterios de proximidad basados en relaciones de adyacencia que doten al espacio de clases de equivalencia de algún tipo de jerarquía. Un caso típico donde se dispone de modelos estructuralres corresponde a espacios de G-órbitas $G * x$ por la acción de un grupo G actuando sobre un espacio X; en este caso la adyacencia está inducida por la acción de un grupo cuya topoología se supone conocida [13].

En general, la estructura de los espacios de G-órbitas en términos de relaciones entre cierres de órbitas permite especificar "niveles de proximidad" que se representan mediante nodos de una representación discreta (grafos orientados, típicamente) que es necesario recorrer para conectar dos elementos entre sí. Un caso típico de gran interés para diferentes tipos de aplicaciones corresponde a espacios localmente simétricos y sus generalizaciones a espacios de funciones, distribuciones o, con más generalidad, tensores.

1.3. **La noción de camino.** El estudio de caminos está estrechamente relacionado con el desarrollo de las integrales de 1-formas diferenciales cuyo integrando es una función de una variable compleja z; este estudio fue llevado a cabo inicialmente por L.A.Cauchy (1789-1857) a partir de 1826, desarrollado desde el punto de vista topológico por B.Riemann (1826-1866) y formalizado en su formulación actual por E.Goursat (1858-1936).

El formidable desarrollo de la Topología Algebraica en el segundo cuarto del s.XX ha dado lugar a que las conexiones con la Teoría de Funciones de una Variable Compleja se haya relegado a un segundo plano. En parte, esto se debe a la posibilidad de formular los aspectos topológicos con independencia de los aspectos analíticos. Ello facilita su extensión a marcos geométricos o topológicos más generales la Teoría de Funciones Analíticas de Una Variable Compleja.

[11]Ver módulo 4 del CEViC para detalles adicionales en relación con cuestiones de Reconocimiento en Visión Computacional.

[12]Ver módulo 4 (Reconocimiento) d ela materia B_3 (Visión Computacional) para detalles y referencias

[13]Este tipo de espacios recibe el nombre de orbifolds y son de uso común en el caso de variedades tridimensionales.

Por ello, en los primeros apartados se introducen las nociones topológicas básicas; en la segunda mitad de la subsección se recupera el punto de vista analítico complejo (en relación con cuestiones de ramificación o de prolongación analítica, p.e.). Esta presentación pone de manifiesto la relación en baja dimensión entre diferentes aspectos algebraicos (composición de caminos, p.e.), topológicos (lazos contractibles, espacios simplemente conexos)y geométricos (superficies de Riemann asociadas al lugar de ceros de las funciones analíticas) del problema. La extensión de estas ideas a dimensión superior se ha desarrollado a lo largo de buena parte del s.XX.

Empezamos recordando una noción básica que fue introducida en Topología I:

Definición.- Un *camino* sobre un espacio topológico X es una función continua $\gamma : [0,1] \to X$. Al punto $x_0 = \gamma(0)$ se le llama *punto inicial* y al punto $x_1 = \gamma(1)$ se le llama *punto final* del camino.

Si $\gamma(0) = \gamma(1)$ se dice que γ es un *camino cerrado* ó *lazo.* Un lazo sin autointersecciones es homeomorfo a la circunferencia $\mathbb{S}^1$.

Nota 1.- En general y salvo que se indique lo contrario, supondremos que los caminos son simples, es decir, no tienen autointersecciones; de una manera más formal, la aplicación γ es inyectiva. Esta hipótesis se justifica por la posibilidad de descomponer caminos con auto-intersecciones en unión de caminos.

Nota 2.- Cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ es homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Por ello, no hay pérdida de generalidad al definir la noción de camino sobre el intervalo unidad $[0, 1]$.

1.3.1. *Caminos equivalentes.* Dados dos caminos $\gamma_1 : [a, b] \to X$ y $\gamma_2 : [c, d] \to X$ *con los mismos extremos* $x_0 = \gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ y $x_1 = \gamma_1(b) = \gamma_2(d)$, decimos que son *caminos equivalentes* si existe una aplicación *continua biyectiva* que *conserva el orden* $\phi : [a, b] \to [c, d]$ tal que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$.

Si consideremos el grafo $\Gamma(\phi)$ de ϕ, y re-escalamos el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ que parametriza ambos intervalos al cuadrado $[0, 1]^2$, la noción de equivalencia se puede reformular de una manera más gráfico:

Definición.- Dados dos caminos $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to X$, diremos que son equivalentes si existe una aplicación continua $h : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ que conserva el orden tal que

$$h(s, 0) = \gamma_1(s)\ ,\ h(s, 1) = \gamma_2(s)\ ,\ h(0, t) = x_0\ ,\ h(1, t) = x_1$$

para cualquier para $(s, t) \in I \times I$. Intuitivamente, corresponde a una "elevación curvada" del cuadrado a un trozo ondulante de superficie que deforma el camino γ_0 en el γ_1 a través de una aplicación que es constante en los extremos correspondientes a los puntos inicial x_0 y final x_1 (dibujarlo como ejercicio).

Denotamos mediante $[\gamma]$ a la clase de equivalencia de un camino γ. A menudo no se hace distinción entre un camino y su clase de equivalencia.

Ejercicio.- Verifica que la composición así definida es una relación de equivalencia. Nótese que la inversa ϕ^{-1} invierte la orientación o el sentido en el que se recorre el camino.

1.3.2. *Sobre la definición de integral a lo largo de un camino.* Buena parte de los desarrollos relacionados con la Teoría de Homotopía proceden de problemas relacionados con una correcta definición de la integral para funciones de una ó varias variables complejas y los problemas de prolongación analítica para pequeños entornos de puntos donde la función presenta ceros ó polos. Algunos hechos que suponemos conocidos del Análisis de Funciones de una Variable Compleja son los siguientes:

(1) El logaritmo $ln\ z$ es una primitiva de la integral de la 1-forma diferencial dz/z por lo que en ausencia de polos

$$\int_a^b \frac{dz}{z} \; = \; ln\ b \; - \; ln\ a$$

que está unívocamente valorada (salvo constantes) en el caso real. Por el contrario, en el caso complejo la función log es múltiplemente valorada; por ello, la integral presenta una indeterminación módulo los múltiplos $2k\pi i$ de

$$\oint \frac{dz}{z} \; = \; 2\pi i \quad (Cauchy)$$

(2) Para cualquier $n \neq -1$ se tiene que

$$\oint z^n dz \; = \; 0$$

(3) Para cualquier función holomorfa con un polo en el origen, la integral de contorno a lo largo de un lazo γ en torno al origen se calcula (Teorema de Cauchy) mediante

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z} dz \; = \; f(0)$$

De hecho, este resultado es consecuencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann (condiciones de holomorfía para funciones (e incluso para formas) holomorfas y de la fórmula de Cauchy que aparece como primer item.

(4) Usando el desarrollo de MacLaurin (versión compleja del desarrollo de Taylor), se calcula la integral de una 1-forma diferencial correspondiente a una función meromorfa $f(z)/z^{n+1}$ con un polo de orden $n+1$ en el origen mediante

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \; = \; f^{(n)}(0)$$

que corresponde al coeficiente de orden n del desarrollo de MacLaurin en el entorno del origen. Nótese que este cálculo es formal, es decir, sólo se requiere que la función sea de clase C^1.

(5) La última expresión se puede tomar como la *definición* de la derivada de orden n en el origen y expresar el coeficiente de orden n

$$a_n \; = \; \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

en términos de una integral. correspondiente a la serie de potencias

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^n + \ldots \; = \; f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} + \ldots$$

Este resultado pone en escena la relación entre integrales de funciones meromorfas y los problemas de prolongación analítica que es uno de los tópicos recurrentes en los primeros capítulos de este curso.

(6) Para cualquier otro punto z_0 que represente un cero ó un polo de la función meromorfa el análisis es similar realizando una *traslación* en la recta compleja; en este caso, el Teorema de Cauchy se reescribe como

$$\frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \;=\; f^{(n)}(z_0)$$

obteniéndose una interpretación similar para las expresiones en términos de series de potencias

1.3.3. *Aspectos topológicos de la integración compleja.* Fijado un punto base, la posibilidad de descomponer el ciclo soporte γ de integración en una unión finita de n ciclos correspondientes a caminos cerrados γ_k en cuyo interior sólo hay una singularidad permite descomponer formalmente la integración como sigue:

$$\oint_\gamma f(z)dx \;=\; \sum_{i=1}^{n}\oint_{\gamma_k} f(z)dx$$

Para cada punto $c \in \mathbb{C}$, se puede definir el *índice de* $c \in \mathbb{C}$ con respecto al ciclo $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ como el valor de las integrales precedentes. Por ello,

$$I(\gamma, c) \;=\; I(\gamma_1, c) + \ldots + I(\gamma_n, c)$$

donde cada integral se interpreta topológicamente como el "número de anudación" (winding number) de c a lo largo de γ_k correspondiente a la 1-forma $dz/(z-c)$.

Se dice que un *ciclo* γ con rango contenido en un dominio (abierto y conexo) $D \subset \mathbb{C}$ es *homólogo a cero* si $I(\gamma, c) \;=\; 0$. En estos términos, si f es holomorfa en el dominio D (es decir, $f(z)dz$ es una 1-forma cerrada por el Teorema de Morera) y γ es contractible a un punto, entonces (Teorema de Cauchy-Goursat):

$$\oint_\gamma f(z)dz \;=\; 0$$

En términos topológicos, este resultado (en el fondo puramente diferencial) muestra que para cualquier función f holomorfa sobre un dominio D, la integral de una 1-forma $f(z)dz$ a lo largo de un camino γ sólo depende de la clase de homotopía de γ: es decir, si γ y γ' son caminos homótopos, entonces sus integrales coinciden.

Nótese que, en presencia de una singularidad simple en z_0, es necesario reemplazar el integrando por $[f(z)/(z-z_0)]dw$.

1.3.4. *Prolongación y ramificación.* Supongamos que $f(z)$ es holomorfa sobre un dominio D que puede estar dada por una serie (formalmente) convergente de potencias como en el apartado precedente. Deseamos saber si podemos extender f a un dominio D' con $D \subset D'$ de modo que $f(z)$ sea holomorfa sobre D'. Para fijar ideas se puede pensar en

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots$$

que converge en toda la recta compleja $\mathbb{C}$ salvo en dos puntos. En este caso, el dominio de holomorfía es todo el plano excepto los puntos $+i$ y $-i$, por lo que la función se puede extender al "plano doblemente punteado" con dos agujeros correspondientes a los puntos $\underline{+}i$. En este caso, la solución correspondiente a la serie de potencias se escribe trivialmente como la función meromorfa $1/(1+z^2)$, pero en general la solución no tiene una forma tan compacta y sencilla, por lo que sólo se pueden mostrar propiedades formales de la serie ó topológicas de las integrales asociadas a lazos en torno a puntos que presentan "algún tipo de patologías". Para fijar ideas sobre los diferentes tipos de patologías que podemos encontrar, consideremos nuevamente la serie correspondiente a la función logaritmo en el caso complejo

$$log\ z \ = \ (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3!}(z-1)^3 - \frac{1}{4!}(z-1)^4 + \dots$$

cuyo radio de convergencia es, inicialmente, la circunferencia de radio unidad centrada en $z = 1$. La prolongación analítica se considera a lo largo de caminos que rodean el "origen" (correspondiente al punto 1) en sentido antihorario.

En rl *marco analítico*, se pueden elegir "ramas" representadas en coordenadas locales mediantes series de potencias en torno a puntos sucesivos $1, \omega, \dots, \omega^n = 1$. Al cabo de un número finito de pasos se regresa al origen (generadores del grupo fundamental) de forma similar a la estrategia utilizada con el grupo simétrico que permuta las raíces n-ésimas de la unidad, es decir, tomando $\omega^k = e^{2k\pi i/(k+1)}$ usando trasposiciones elementales.

En realidad, no se necesita la forma explícita de las series de potencias, y el grupo que permuta las "determinaciones locales" puede ser infinito, como ocurre con las determinaciones de la función $log\ z$. En general, la información disponible sobre una función definida globalmente es desconocida (sólo se dispone de datos locales); por ello es necesario estudiar las diferentes representaciones locales e incorporar las diferentes "determinaciones" asociadas a las expresiones locales para la función que estamos considerando.

Nota avanzada.- Un caso bastante más complicado y que ha recibido especial atención desde mediados del s.XIX corresponde a las series de Dirichlet. Una de las más importantes es la *función zeta* (Euler-Riemann) $\zeta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como la suma infinita

$$\zeta(z) \ = \ 1^{-z} + 2^{-z} + 3^{-z} + 4^{-z} + \dots$$

que converge a la función holomorfa denotada mediante $\eta(z)$ cuando $Re(z) > 1$. La continuación analítica de esta función define de forma única una función univalorada cuando se suprime el punto $z = 1$. La *hipótesis de Riemann* concierne a la distribución de los *ceros* de la prolongación analítica de la función zeta, es decir a las soluciones de $\zeta(z) = 0$. Es relativamente fácil verifica que $\zeta(z)$ toma valores nulos para $z = -2, -4, -6 \dots$. La hipótesis de Riemann dice que los ceros restantes están sobre la línea

$$Re(z) = \frac{1}{2}$$

es decir, es cero sólo cuando la parte real de z es igual a $1/2$. Aún no se dispone de una demostración para esta hipótesis.

1.4. **Operaciones sobre el espacio de caminos.** En esta subsección se comentan las dos operaciones básicas relacionadas con caminos: composición y producto. La composición ha surgido en relación con varias cuestiones presentadas anteriormente (incluyendo la prolongación analítica en el caso complejo, p.e.).

La motivación más amplia para el producto de caminos está dada por el carácter localmente trivial de la mayor parte de las estructuras superpuestas $\pi : E \to X$ a C^r-variedades X tales como fibrados, fibraciones, haces, et cetera de uso común en las diferentes Geometrías. En particular, las C^r-equivalencias

$$(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) \mid_{\varphi_i(U_i \cap U_j)} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

se elevan a productos localmente triviales que son compatibles gracias a las condiciones de compatibilidad entre cartas locales (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) sobre $U_{ij} := U_i \cap U_j$ para cualquier par $i, j \in I$. El estudio de esta elevación tiene en cuenta la topología de la C^r-variedad base X y la de la fibra $F := \pi^{-1}(x_0)$ para un punto base genérico $x_0 \in X$. Por ello, es natural preguntarse sobre la elevación de caminos a estructuras de tipo producto.

1.4.1. *Composición de caminos.* La composición de aplicaciones permite conectar diferentes caminos γ_i sobre un mismo espacio topológico X. Para ello, basta que $\gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$ para $i \geq 0$.

Cuando dos ó más caminos se pueden conectar, al resultado obtenido se le llama *composición de caminos* y se denota mediante $\ldots \circ \gamma_{i+1} \circ \gamma_i \ldots$.

Cualquier caminos $\gamma : [0,1] \to X$ definido sobre un espacio X es inversible (tomar γ^{-1} como $\gamma(1-t)$, p.e.), por lo que el conjunto de los caminos con la operación de composición es un *grupoide* al que se llama *grupoide de Poincaré.* Nótese que la composición de un camino y su inverso define un lazo α (camino con $\alpha(0) = \alpha(1)$), pero en general la composición de dos caminos arbitrarios no está definida , salvo que sean lazos con el mismo punto base $x_0 \in X$.

La operación de composición permite tratar por separado las patologías asociadas a "agujeros" u otros eventos que aparezcan en el espacio X y desagregar problemas de búsqueda atendiendo a conexividad vs separabilidad por regiones.

1.4.2. *Producto de caminos.* Dados dos caminos $\gamma_1 : [a,b] \to X$ y $\gamma_2 : [a,b] \to Y$, se define el *camino producto* como

$$\gamma_1 \times \gamma_2 : [a,b] \to X \times Y \ \mid \ (\gamma_1 \times \gamma_2)(t) \ := \ (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

En la clasificación de espacios topológicos, los casos más simples corresponden a productos de otros espacios más simples. El producto de caminos permite tratar los caminos definidos sobre productos de espacios en términos de los productos de caminos.

En los apartados siguientes se comentan dos aplicaciones de bajo nivel en Visión Computacional y Renderización.

Ejercicio.- Verifica que el producto de caminos es compatible con el paso al cociente por la relación de equivalencia. En particular, las operaciones de rellenado homogéneo de regiones como producto de caminos son independientes de los representantes elegidos

1.4.3. *Rellenado conjuntista en imagen.* Las operaciones básicas realizadas sobre imágenes digitales (capturam compresión, transmisión, decompresión) dan lugar a numerosos "artefactos" que se manifiestan como una "degradación" de las propiedades radiométricas originales. En los dispositivos de captura de información tridimensional (escaneo láser, infrarrojos, dispositivos acústicos), es muy frecuente encontrar "agujeros" que pueden existir o no en el objeto real al que se ha aplicado.

Un objetivo muy ambicioso con un gran número de problemas abiertos consiste en completar la información, dejando constancia de los agujeros caso de que efectivamente los haya. Habitualmente, es necesario fusionar la información procedente de diferentes tipos de sensores que proporcionan información volumétrica con diferentes niveles de detalle y diferentes tipos de ruido.

Para ello, es necesario diseñar estrategias topológicas (compatibles con deformaciones, agujeros y túneles) que permitan "restaurar" modelos a bajo nivel. Actualmente, el procesamiento y fusión de dicha información se realiza off-line; un objetivo a medio plazo consiste en proporcionar modelos en tiempo real en relación con las múltiples aplicaciones a imágenes biomédicas, modelado estático 3D, retransmisiones en directo, p.e.

El producto de caminos resulta de utilidad para diseñar estrategias de "rellenado" de agujeros en objetos cuya geometría no se ha podido capturar de una forma completa; el procedimiento más tosco consiste en multiplicar dos caminos sobre los cuales se tienen definidas funciones que presentan un "degradado" de color [14]. Dos procedimientos típicos utilizados en modelado $3D$ corresponden a la interpolación bilineal ó a la bicúbica en trozos de superficies asociados a diferentes formas (lineal a trozos y suave) de construir procedimientos de rellenado que se abordan en la subsección siguiente relacionada con las aplicaciones.

1.4.4. *Renderización: Controlando la radiometría. Grosso modo*, la renderización de una escena consiste en la representación 2D de escenas tridimensionales generando un aspecto 3D a partir del control de las condiciones de iluminación, es decir, mediante un control de los mapas de reflectancia que describen el comportamiento de superficies curvadas con respecto a la incidencia-reflexión (Óptica Geométrica) y la absorción de la luz (dependiendo de propiedades de los materiales).

La descripción anterior del rellenado deja de ser válida en procedimientos más avanzados de renderización. La renderización requiere un control apropiado de las condiciones radiométricas (iluminación, sombreado, reflectancia de superficies y de materiales, etc) para ajustar los modelos de propagación a las variaciones que pueda presentar la superficie de los objetos, los materiales y las fuentes de luz.

Los modelos más simples para mapas de reflectancia y los correspondientes procedimientos de renderización utilizan funciones definidas sobre las superficies que acotan los objetos. Estas funciones varían dependiendo de la localización relativa de la iluminación, las intensidades (absorbida y reflejada) y otras características los materiales.

Por ello, resulta más conveniente utilizar sistemas de 2-formas diferenciales que permiten representar la respuesta de la superficie con respecto a las condiciones de

[14] Existen procedimientos de propagación más avanzados que respondan a soluciones de EDP y que se detallan a partir del módulo 4 del CEViC

iluminación. En presencia de movimiento o de posibles deformaciones de la superficie (tal como ocurre cuando se generan personajes virtuales, p.e.), es necesario utilizar modelos más finos para una propagación basada en tensores. Una primera aproximación utiliza procedimientos de interpolación similares a los de campos escalares o vectoriales comentados más arriba.

2. **Espacios de Caminos**

En esta sección se presentan las nociones básicas relacionadas con la topología de los espacios de caminos $\gamma, \alpha, \ldots$ sobre espacios topológicos $X, Y, \ldots$. Los caminos y lazos, así como algunas operaciones básicas, han sido introducidos en dos subsecciones de la sección anterior. Se ilustran estas construcciones con algunos ejemplos elementales.

Los caminos se construyen tanto sobre un espacio topológico arbitrario X como sobre el conjunto de aplicaciones definidas sobre $Mor(X, Y)$; así p.e. si para fijar ideas, nos restringimos al estudio de funciones continuas (es decir, $Y = \mathbb{R}$), entonces un camino que conecta el elemento $f \in Mor(X, \mathbb{R})$ con el elemento $g \in Mor(X, \mathbb{R})$ está dado por $F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ que para $t = 0$ da $F(x, 0) = f(x)$ y para $t = 1$ da $F(x, 1) = g(x)$; es decir, la suma afín ó "ponderada" de f y g proporciona una "deformación continua" de f en g (este método de homotopía recibe el nombre de método de continuación en Ingeniería). Por ello, una idea intuitiva significativa que subyace a los problemas de clasificación basada en caminos está asociada a la posibilidad de "deformar" (imágenes de) aplicaciones de manera continua.

2.1. **Homotopía entre aplicaciones.** La motivación más simple viene dada por la deformación del segmento que conecta dos puntos para adaptarlo a la geometría del espacio topológico X.

2.1.1. *Segmentos.* Dados dos puntos $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ el segmento que les conecta está dado por

$$< \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1 > = \ \{(1-\lambda)\mathbf{P}_0 + \lambda \mathbf{P}_1 \ \mid \ \lambda \in [0,1]\}$$

La imagen por una aplicación continua f del segmento precedente proporciona un camino γ que conecta dos puntos $x_0, x_1 \in X$.

Esta definición se extiende de forma natural a espacios de funciones proporcionando la *interpolación lineal entre funciones*

$$< f_0, f_1 > = \ \{(1-\lambda)f_0 + \lambda f_1 \ \mid \ \lambda \in [0,1]\}$$

como un "segmento" que conecta ambas funciones (esta descripción geométrica sólo tiene sentido cuando el espacio de funciones tiene estructura subyacente de espacio vectorial). A esta construcción se le llama método de homotopía ó de continuación (en Ingeniería).

2.1.2. *Aplicaciones homótopas. Definición.-* Denotemos mediante X, Y dos espacios topológicos. Diremos que dos aplicaciones $f, g : X \to Y$ son homótopas si existe una aplicación $F : X \times I \to Y$ donde $I = [0,1]$ tal que

$$F(x,0) = f(x) \ , \ F(x,1) = g(x) \ \forall x \in X$$

En ese caso, diremos que f y g son *homotópicamente equivalentes* y lo representaremos mediante $f \sim g$

Ejercicio.- Verifica que la condición de ser homotópicamente equivalentes es una relación de equivalencia sobre el conjunto $C^0(X, Y)$ de aplicaciones continuas de X en Y

Ejercicio.- Extiende la noción de interpolación bilineal a espacios de funciones y define la noción de homotopía entre pares de aplicaciones.

2.1.3. *Homotopía entre variedades.* Si las variedades están dadas como imágenes de embebimientos o como imágenes recíprocas de valores regulares para una función (casos típicos en Geometría Diferencial), la homotopía entre variedades se reduce al caso de aplicaciones homótopas descrito en el apartado anterior. Otros casos de interés corresponden a variedades (algebraicas o analíticas) eventualmente singulares. En este caso, el análisis se lleva a cabo en términos de un "entorno tubular" de las regiones singulares que permite construir ciclos no-contractibles. La dificultad aparece en relación con la "desaparición" de ciclos cuando dos o más ramas confluyen en una subvariedad de dimensión menor; en este caso, se introduce la noción de "ciclo evanescente" (Lefschetz) que permite gestionar la información asociada. Estos tópicos son más avanzados y se comentan al final de este módulo 1.

2.1.4. *Técnicas avanzadas de interpolación.* La interpolación asociada a aplicaciones (o con más generalidad operadores) depende de las funciones definidas en cada punto. Aunque la estrategia de interpolación sea la misma, los objetos que se interpolan no siempre están definidos globalmente; en particular, esta circunstancia obliga a trabajar con morfismos racionales que son una extensión algebraica de las funciones meromorfas utilizadas en la Teoría de las Funciones Analíticas de Una Variable Compleja.

Por ello, las clases de homotopía asociadas a la interpolación de "objetos" (variedades o morfismos de clase C^r) varían de forma continua con respecto a la variedad topológica sobre la que están definidas. En el caso discreto, se pueden presentar discontinuidades en los modelos de propagación (vinculadas a modelos de difusión-reacción, p.e.) que no consideramos aquí, aunque son muy importantes para cuestiones de restauración de contenidos digitales.

La dependencia de los invariantes algebraicos (grupos de homotopía, en este caso) con respecto al punto base se representa mediante (pre)haces de grupos verificando condiciones de compatibilidad con respecto a los abiertos que contienen al punto base [15]

2.2. **Aplicaciones básicas.** Esta subsección presenta en primer lugar una aproximación histórica y a continuación muestra algunas aplicaciones sencillas relevantes. Esta elección en la presentación de los materiales se justifica pues buena parte de las aplicaciones desarrolladas en Ingeniería a partir de los años ochenta del siglo XX proceden de desarrollos efectuados a finales del s.XIX y comienzos del XX.

Un problema importante relacionado con la topología del espacio de caminos es la construcción explícita de dichos caminos. Dicha construcción afecta más a cuestiones computacionales que a los aspectos conceptuales que se han presentado

[15] Para los detalles ver el módulo 3 (Haces, Cohomología, Esquemas) de la materia A_3 (Geometría Algebraica).

más arriba. Por ello, este apartado y el siguiente tienen un carácter ilustrativo más que conceptual. La estrategia más sencilla de construcción es la interpolación; básicamente hay dos estrategias para abordar la construcción explícita que afectan al carácter lineal a trozos o no-lineal de las primitivas.

2.2.1. *Aproximaciones al espacio de caminos.* Una de las primeras referencias históricas al estudio del espacio de caminos se debe a L.Euler y se refiere a describir los posibles caminos "no contractibles" a recorrer sobre la ciudad teniendo en cuenta la disposición relativa de los *puentes de Koenigsberg* que conectaban entre sí las diferentes islas que formaban las ramificaciones del río con el resto de la antigua ciudad.

El análisis llevado a cabo por B.Riemann (1851) para la continuación analítica de funciones multivaloradas sobre una superficie (definidas sobre lo que ahora llamamos las hojas del recubrimiento), puso de manifiesto que el valor obtenido para "completar" el valor de una función ϕ (de hecho un funcional integral) sobre un camino γ depende de la hoja elegida para hacer la prolongación.

Tras una introducción de los generadores por parte de Jordan (1866), pero con descripción incorrecta para las relaciones, la idea original de Riemann llevó a Poincaré (1892) al estudio de las transformaciones que permiten construir las funciones ϕ "más generales" como clases de equivalencia de [integrales construidas módulo períodos] sobre clases de equivalencia caminos; la equivalencia entre caminos γ, γ' se definió inicialmente en términos de la existencia de una deformación continua que permite conectar un camino con otro.

La composición entre caminos con punto base prefijado define una ley interna que verifica las propiedades de una estructura de grupo, al que actualmente llamamos *grupo fundamental* y cuya construcción analítica se debe a Poincaré (1892); en dicho trabajo, Poincaré demostró que los números de Betti no determinan completamente una variedad, mostrando así cómo las aproximaciones basadas en caminos proporcionan un enfoque "más fino" que el asociado a estructuras simpliciales superpuestas al objeto.

Para que esta definición sea efectiva, es necesario contar con una descripción inicialmente combinatoria (Poincaré, 1895) en el que los caminos son poligonales (PL-aproximación) y la deformación se realiza insertando ó borrando puntos procedentes de una reproyección de una poligonal sobre otra; de hecho, éste es el procedimiento utilizado actualmente para la implementación computacional asociada a la representación a diferentes resoluciones de perfiles complicados en Sistemas de Información Geográficos.

Si pensamos en una poligonal $p(\gamma)$ asociada a un camino γ como un "complejo", se obtiene una PL-aproximación que mediante procedimientos de subdivisión puede ser relacionada con otra poligonal $p'(\gamma')$ asociada al camino γ'; por ello, enunciado de forma abstracta, se trata de una comparación entre complejos. Aunque este enfoque proporciona conjuntos de generadores y relaciones que permiten un tratamiento por "palabras" (lo que más adelante llamaremos una "presentación" del grupo), el grupo obtenido no es, lamentablemente, un invariante topológico. Esto pone de manifiesto los problemas entre la computabilidad y el carácter invariante de los objetos que se utilizan para describirlos, n tópico recurrente en las aplicaciones más avanzadas de la Visión Computacional sobre el que volveremos varias veces a lo largo del Curso.

A pesar de esta dificultad, el grupo fundamental introducido originalmente por Poincaré (1892) es un invariante topológico (Tietze, 1908), pero era necesario encontrar procedimientos asociados a descomposiciones simpliciales que proporcionaran invariantes topológicos.

El paso siguiente relevante para una interpretación geométrica fue realizado por Alexander (1915) quien demostró la invariancia topológica de los números de Betti (dimensión de lo que ahora llamamos grupos de Homología). A través de una técnica de refinamientos sucesivos demostró (usando la continuidad uniforme) que cualquier curva $\mathcal{C}$ descompone en un número finito de trozos que son equivalentes a segmentos; la estructura de complejo simplicial asociada a la poligonal resultante tiene ahora invariantes topológicos (números de Betti) y, como consecuencia, el grupo fundamental es un invariante topológico.

2.2.2. *Una aplicación del caso lineal a trozos a interpolación multilineal.* El modelo más sencillo de interpolación es lineal con respecto a los diferentes puntos de control y su formulación (método de homotopía ó "continuación" multilineal) depende de la dimensión d en la que los datos vayan a ser representados y de la distancia entre los puntos de control. Para simplificar supongamos que todos los puntos están situados a la misma distancia (que tomamos como unidad) en las diferentes direcciones del espacio d-dimensional.

(1) $d = 1$: La expresión $(1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2)$ con $0 \leq \alpha \leq 1$ define una *interpolación lineal* u homotopía entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (etiquetado clásicamente como *pencil*).

(2) $d = 2$: La expresión

$$(1-\alpha)(1-\beta)f(x_1, y_1) + (1-\alpha)\beta)f(x_1, y_2) + \alpha(1-\beta)f(x_2, y_1) + \alpha\beta f(x_2, y_2)$$

con $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ define una *interpolación bilineal* para el valor de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a partir de los valores en $4 = 2 \times 2$ puntos de control situados en una cuadrícula regular (etiquetada clásicamente como *net*).

(3) $d = 3$: La expresión $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)f(x_1, y_1, z_1) + (1-\alpha)(1-\beta)\gamma f(x_1, y_1, z_2) + (1-\alpha)\beta(1-\gamma)f(x_1, y_2, z_1) + \alpha(1-\beta)(1-\gamma)f(x_2, y_1, z_1) + (1-\alpha)\beta\gamma f(x_1, y_2, z_2) + \alpha(1-\beta)\gamma f(x_2, y_1, z_2) + \alpha\beta(1-\gamma)f(x_2, y_2, z_1) + \alpha\beta\gamma f(x_2, y_2, z_2)$ con $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ define una *interpolación trilineal* para el valor de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a partir de los valores en 8 puntos de control situados en una malla regular $3D$ (etiquetada clásicamente como *web*).

La adaptación automática de redes dependientes de $n \leq 3$ parámetros tiene utilidad para procesos de rellenado semiautomáticos en modelado nD

2.2.3. *Interpolación bicúbica y generalizaciones.* Una forma cúbica $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ está determinada por 4 coeficientes ó bien 3 salvo factor de proporcionalidad (enfoque de la Geometría Algebraica) que representamos mediante $[a_0 : a_1 : a_2 : a_3]$. Por ello, en el caso afín bastan 4 puntos sobre la recta real $\mathbb{R}$ para determinar un polinomio cúbico en una variable que se puede interpretar como una composición de 3 deformaciones continuas (visualizarlo como ejercicio).

En el caso lineal, la suma de los coeficientes asociados a la interpolación es igual a 1; esta restricción garantiza la convexidad del conjunto de puntos a los que se aplica en el caso general. Por ello, la extensión de esta construcción al caso no-lineal a menudo se realiza tomando coeficientes cuya suma total es asimismo la unidad.

El producto tensorial de dos cúbicas sobre la recta da lugar a una superficie bicúbica con $4 \times 4 = 16$ puntos de control a la que se llama B-spline de bigrado $(3, 3)$. La condición de ser tangente a una recta es la condición dual en el plano proyectivo de pasar por un punto. Por ello, se puede reemplazar, con las salvedades propias del paso al dual [16]

Con más generalidad se pueden considerar superficies B-splines de bigrado (d_1, d_2) o T-splines (threefolds ó sólidos eventualmente deformables) de trigardo (d_1, d_2, d_3) dados por el producto de 3 snakes de grados d_i para $1 \leq i \leq 3$. Estas variedades tienen interés para el modelado volumétrico de órganos internos en Imágenes Biomédicas 3D, p.e.

Ejercicio.- Construye y visualiza superficies B-splines de bigrado (p, q) especificando los puntos de control relativos a condiciones de pasar por un punto o ser tangente a una recta *Indicación:* Extiende la construcción mostrada para las superficies bicúbicas).

2.2.4. *Caminos en Robótica.* Un *robot* es un manipulador reprogramable multifuncional diseñado para mover materiales, piezas ó dispositivos especializados, a través de movimientos programados variables para la realización de diferentes tareas (definición dada por el Robot Institute of America, 1979).

El soporte para la arquitectura de un robot está dado por una ó varias cadenas cinemáticas articuladas conectadas. Cuando estas cadenas cinemáticas están conectadas a uno ó más cuerpos (plataformas con mecanismos de distribución) decimos que se tiene un robot paralelo de tipo multicuerpo. Los tipos más importantes son:

- *secuencial*, como p.e. brazo articulado
- *paralelo* como p.e. simuladores de vuelo
- *multicuerpo* como p.e. robots móviles con patas
- *híbrido* como p.e. robots humanoides

En cualquier caso, una interpolación continua entre dos caminos realizables no tiene por qué ser realizable en términos de movimientos del robot. Es necesario tener en cuenta no sólo las restricciones asociadas al espacio ambiente, sino las restricciones específicas asociadas a los movimientos del robot (como composición de rotaciones y traslaciones) dependiendo del tipo de juntas.

Los robots móviles tradicionales están basados en plataformas con ruedas; cuando el terreno es irregular ó el robot tiene que salvar obstáculos (tuberías, escaleras, p.e.) es necesario considerar robots basados en patas para operar en entornos peligrosos, tóxicos ó de difícil acceso para los humanos.

La exploración del espacio ambiente y la planificación de movimientos en Robótica son dos aplicaciones de la Topología del espacio de caminos. Una distinción inicial afecta al *espacio de trabajo* $\mathcal{W}$ (espacio ambiente en el que tienen lugar los movimientos) y el *espacio de configuraciones* $\mathcal{C}$ asociado a los mecanismos del robot al que también se le llama espacio de juntas. Ambos espacios están relacionados

[16] Ver módulo 2 (Variedades Algebraicas) de la materia A_3 (Geometría Algebraica) para detalles y referencias sobre variedades duales.

mediante una *aplicación de transferencia* $\tau : \mathcal{C} \to \mathcal{W}$ que traslada los impulsos generados en las juntas a las "cadenas cinemáticas" para generar movimientos en el espacio de trabajo $\mathcal{W}$. El camino más habitual a calcular en Robótica corresponde al "efector final" ó extremo del dispositivo articulado que realiza una tarea, pero el cálculo de este camino debe tener en cuenta las trayectorias a seguir por cada uno de los puntos de control y, en particular, por las juntas del dispositivo electromecánico.

Las restricciones asociadas a los movimientos del robot (configuraciones permitidas), a la cinemática (velocidades en juntas y en el efector final) y a la dinámica del robot (fuerzas y momentos, efectos inerciales, etc) introducen acotaciones para cada uno de los espacios que deben ser respetadas; dichas acotaciones presentan, frecuentemente, singularidades en las que el control (geométrico, cinemático y dinámico) del dispositivo es problemático. Por ello, la transferencia $\tau : \mathcal{C} \to \mathcal{W}$ y sus extensiones (k-jets) $j^k\tau : J^k\mathcal{C} \to J^k\mathcal{W}$ para estudiar la realimentación entre la Geometría ($k = 0$), la Cinemática ($k = 1$) y la dinámica ($k = 2$) son "aplicaciones estratificadas".

En el caso geométrico $k = 0$ más simple, la planificación de movimientos requiere calcular una trayectoria aproximada en el espacio de trabajo $\mathcal{W}$ y "elevarla" al espacio de configuraciones $\mathcal{C}$; debido a la aparición de singularidades y al carácter estratificado de la aplicación, dicha elevación es un problema altamente no trivial. La estrategia más razonable desde el punto de vista matemático consiste en considerar que los movimientos que tienen lugar en el espacio de trabajo $\mathcal{W}$ son composición de movimientos rígidos y por tanto se describen mediante la composición de elementos del grupo especial euclídeo $SE(3; \mathbb{R})$ (dado como el producto semidirecto del grupo $SO(3; \mathbb{R})$ de las rotaciones y del grupo $\mathbb{R}^3$ de las traslaciones). Por ello, los impulsos (señales transducidas por la electrónica del robot) deben reproducir "de forma infinitesimal" dichos elementos, es decir, pertenecen al álgebra de Lie $se(3) = T_I SE(3; \mathbb{R})$ del grupo especial lineal; mediante la exponencial de cada una de las transformaciones suministradas en las juntas se reproduce el movimiento en el espacio ordinario. Por ello, basta con controlar las transformaciones infinitesimales a nivel de impulsos en las juntas.

Una vez tratado el problema de la generación de impulsos en las juntas y su traducción a movimientos en el espacio de trabajo en términos del álgebra y del grupo especial lineal, podemos regresar al problema de la elevación de caminos de $\mathcal{W}$ a $\mathcal{C}$. A la vista de las "diferentes determinaciones" que pueden adoptar las transformaciones, es conveniente contar con una "descripción universal" de los movimientos a realizar, tanto a nivel infinitesimal (álgebras de Lie en las juntas) como espacial (grupo de Lie en el espacio ambiente). Ello requiere calcular el espacio recubridor del grupo de las rotaciones $SO(3; \mathbb{R})$, que se aborda en el capítulo 4 de este bloque.

2.2.5. *Segmentación por regiones de una imagen.* La segmentación por regiones de una imagen consiste en una descomposición en unión disjunta de la imagen en una colección de regiones R_i con un color homogéneo (modulo un umbral que depende del número de bits ó de la resolución (la escala en términos SIG). Una idea básica consiste en asignar un punto b_i ("baricentro") al interior de cada región R_i y conectar dos puntos mediante un segmento si y sólo si las regiones son adyacentes.

El *grafo dual* asociado a esta representación contiene a los puntos b_i como nodos n_i y a los segmentos correspondientes a regiones adyacentes como aristas $e_{ij} =<$

$n_i, n_j >$ del grafo $\mathcal{G}$ asociado a la imagen. La lectura de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo de la imagen permiten extraer un árbol $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$. Este árbol se puede elegir atendiendo a criterios de minimalidad (mínima longitud, p.e.), con objeto de estandarizar la construcción y realizar comparaciones entre diferentes construcciones; hay algoritmos muy eficientes (complejidad minimal) para construir árboles de longitud minimal ó MST (ver cualquier manual ó las notas del curso de Geometría Computacional, p.e.).

Este procedimiento proporciona una aproximación a bajo nivel del contenido de una imagen y el tratamiento por separado de cada región en diferentes tipos de tareas relacionadas con Restauración, Seguimiento ó Reconocimiento, p.e. En las aplicaciones prácticas es importante distinguir entre los elementos (regiones, sobre todo) cuya variabilidad está por debajo de un umbral y las que están por encima del umbral, pues sólo se actualiza la información de estas últimas y es necesario diseñar procedimientos basados en la gestión simbólica de la información (grafos) asociada a secuencias de imágenes.

Los detalles relativos al diseño e implementación de algoritmos relacionados con esta cuestión se abordan en el Curso de Especialista en Visión por Computador. En este apartado nos centramos en algunos aspectos relacionados con la Topología Algebraica del conjunto de regiones asociado a una imagen y otra imagen "próxima" asociada un movimiento relativo (de la cámara ó del objeto).

La idea original de Poincaré (1895) de utilizar generadores y relaciones para comparar diferentes poligonales asociadas a los caminos, se extienden a descomposiciones simpliciales más generales de objetos volumétricos en escenas $3D$, aunque dan lugar a una casuística considerable.

Para obtener estrategias más generales que permiten minimizar los efectos indesesables de dicha casuística se utilizan técnicas de remallado en Informática Gráfica, pegado de datos locales en objetos $3D$ más complicados (Teoremas tipo Van Kampen para grupos de homotopía ó de escisión para grupos de [co]homología). Esta metodología tiene multiples aplicaciones en Modelado 3D, Animación y toda clase de producción de contenidos $3D$.

Siguiendo con la aproximación histórica presentada al comienzo de la sección, Seifert (1931) demostró que el grupo fundamental $\pi_1(A \cup B)$ de un complejo que es unión de dos subconjuntos A y B con intersección $A \cap B$ conexa, está relacionado con los grupos fundamentales de A, B y $A \cap B$; la demostración original de Seifert es de tipo combinatoria y utiliza las descomposiciones simpliciales, pero Van Kampen dio una demostración (1933) independiente de las estructuras simpliciales utilizadas.

La construcción de tipo combinatorio proporciona el sustrato de un gran número de algoritmos tipo "divide-y-vencerás" (divide-and-conquer) para diferentes construcciones que se realizan en Geometría Computacional; el teorema de Van Kampen muestra la independencia de los resultados obtenidos con respecto al procedimiento particular utilizado para"pegar" los datos que, en cualquier caso, son imprescindibles para automatizar el proceso en las aplicaciones a Visión Computacional, Modelado $3D$ ó Animación.

Lamentablemente, no se dispone de resultados tipo Van Kampen (pegado de grupos fundamentales) para grupos de homotopía de orden superior. Ello justifica la utilización de diferentes variantes del Teorema de Escisión como soporte topológico para técnicas de rellenado.

2.2.6. *Rellenado de regiones.* Inicialmente, la forma inicial de la región no tiene por qué ser la deformación de un rectángulo. El Teorema de Seifert-Van Kampen (1933) y la aproximación desarrollada por G.DeRham en los años sesenta muestran que podemos restringirnos a funciones definidas sobre un producto de intervalos (un rectángulo en el caso $2D$, un paralelepípedo en el caso $3D$) para el rellenado de regiones. Por ello, podemos reducirnos al caso de regiones que sean deformaciones continuas de un rectángulo.

El procedimiento más tosco para el rellenado de regiones consiste en utilizar el producto de caminos asociado a los bordes de la región; como la naturaleza de los datos es discreta, la implementación se realiza según el nivel de detalle de la aplicación a desarrollar. Si nos restringimos al caso de una imagen $2D$, las operaciones más simples de rellenado homogéneo corresponden a un producto de dos funciones constantes, una por cada dirección del rectángulo. Para evitar un efecto de "excesiva homogeneidad" es frecuente elegir una función de "degradado" correspondiente a cada uno de los caminos que se están multiplicando.

En la práctica, la diversidad morfológica de las regiones da lugar a una diversidad considerable de funciones atendiendo a formas básicas (convexa, estrellada, monótona) para polígonos simples. La implementación de funciones continuas ó escalonadas para alguno de los dos intervalos da lugar a efectos de sombreado gradual ó discontinuidades que permiten resaltar efectos sobre algunas regiones con borde simple y gran complejidad radiométrica en su interior, lo cual abarata el coste computacional del mantenimiento de la estructura de la imagen o para facilitar una visualización global del objeto $3D$, dando sensación de relieve donde sólo hay una textura compleja.

El rellenado en el caso $3D$ utiliza la misma metodología para el rellenado de regiones que son deformación de paralelepípedos. Para que este rellenado sea compatible con el regreso al punto de partida tras realizar recorridos, hay que tener en cuenta el número de "agujeros" y la orientabilidad de la superficie que se está considerando (hay mosaicos romanos donde aparecen bandas de Moebius).

Si para simplificar nos reducimos al caso orientable, la metodología descrita en el párrafo anterior para rectángulos se aplica a la suma conexa de toros sin más que identificar los paralelos y meridianos. Para fijar ideas, en el caso de un toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ obtenido como el paso al cociente de un rectángulo a través de la identificación que conserva el orden de los lados opuestos, los paralelos y meridianos representan las dos direcciones de traslación a lo largo de cada una de las aristas del rectángulo original que la identificación convierte en circunferencias $\mathbb{S}^1$.

Por ello, la implementación de funciones constantes, lineales a trozos ó incluso discontinuas sobre cada uno de los intervalos proporciona diferentes efectos de visualización sobre el toro $\mathbb{T}^2$. Esta estrategia se extiende asimismo a la suma conexa de toros que proporciona el modelo general para superficies orientables (Poincaré).

Práctica avanzada.- Visualizar el interior de San Baudelio de Berlanga (Soria) con una única columna central como un PL-toro (PL: Piecewise Linear) e insertar imágenes sobre el PL-modelo resultante. ¿Cuál es el orden de conexión del interior de la iglesia de la Vera Cruz en Segovia? Realizar el mismo proceso que para San Baudelio de Berlanga (Soria).

Renderizar el interior de los modelos anteriores utilizando las herramientas apropiadas para funciones constantes, lineales a trozos y discontinuas, controlando la generación de sombras y efectos de iluminación asociados a las ventanas y la posición relativa del Sol.

Mediante dos texturas variables visualizar el renderizado de una banda de Moebius superpuesto al interior de San Baudelio en el que al cabo de dos vueltas se regresa al punto de partida en la misma cara que la inicial (*Indicación:* el borde de una banda de Moebius acotada es un recubrimiento doble de la circunferencia; el patrón superficial de la textura se define sobre el producto de un intervalo asociado a la elevación de la circunferencia por el intervalo correspondiente a la anchura de la franja).

2.3. **Nota sobre la clasificación topológica** $1D$**.** El objetivo de la clasificación topológica $1D$ es la identificación módulo homeomorfismos de los diferentes tipos de objetos conexos no-equivalentes $1D$ que se pueden presentar sobre un espacio topológico X. Los objetos $1D$ sobre X son imagen por una aplicación γ de objetos contenidos en $\mathbb{R}$. Los problemas de clasificación se pueden abordar recurriendo a una descripción abstracta del objeto (descripción intrínseca como espacio topológico, p.e.) ó bien recurriendo a una inmersión en otro espacio topológico (descripción extrínseca)

En Topología General ó en Topología Algebraica es más frecuente utilizar la primera aproximación, mientras que en Topología Geométrica ó en Topología Diferencial es más frecuente utilizar la segunda aproximación. Un gran número de problemas requiere combinar ambas aproximaciones. Como ejercicio, verifica que

- Un intervalo (semi-)abierto no es homeomorfo a un intervalo cerrado.
- Una circunferencia $\mathbb{S}^1$ no es homeomorfa a $\mathbb{R}^1$ (*Indicación:* $\mathbb{S}^1$ es compacta en $\mathbb{R}^2$)
- Un camino arbitrario no es necesariamente equivalente a un lazo (es decir, un camino cerrado).
- Un lazo (camino homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ no es deformable en el disco $\mathbb{D}^2$ (este resultado se demuestra en el capítulo 2).

Una consecuencia del cuarto punto consiste en que el número de agujeros es un invariante por deformación [17]

La clasificación topológica para el caso $2D$ es algo más complicada y es uno de los objetivos de la asignatura de Topología Algebraica. La clasificación topológica para el caso nD es bastante más difícil y no se aborda en un curso introductorio como éste. Cabe destacar el caso $n = 3$ (en dimensiones superiores hay "más dimensiones donde deformar" y eso facilita las cosas) en el que la resolución reciente de la conjetura de Poincaré por Perelman es uno de los grandes avances recientes de la Topología (ver subsección siguiente para nociones básicas).

[17] Este resultado es consecuencia de resultados elementales de Análisis Diferencial sobre Variedades 1D y viene descrito con detalle al final del Chap.1 de Hirsch: *Differential Topology*, GTM, Springer-Verlag.

2.3.1. *Equivalencia topológica entre curvas planas no-singulares.* La equivalencia topológica entre curvas planas no-singulares es un problema que presenta aún cuestiones abiertas difíciles de resolver para el caso real. Para fijar ideas empezamos recordando el caso más simple posible correspondiente a las curvas de grado 2 (cónicas del plano cartesiano).

Una elipse en el plano cartesiano no es topológicamente equivalente a una hipérbola ó una parábola, pues la elipse es compacta, mientras que los otros dos tipos de curvas no son compactas. Una parábola no es homeomorfa a una hipérbola aunque ambas sean no-compactas en el plano cartesiano ordinario $\mathbb{R}^2$: Una parábola es conexa por arcos, mientras que una hipérbola tiene dos ramas.

Ejercicio.- ¿Qué ocurre en el plano proyectivo real? ¿Y en el proyectivo complejo? Razona la respuesta suponiendo que las curvas son irreducibles (no se consideran pares de rectas) y reducidas (no se consideran rectas dobles).

2.3.2. *Sobre clasificación de curvas planas reales.* La clasificación de las curvas algebraicas planas lisas C de grado d en el plan proyectivo *real* (Problema 16 de Hilbert) debe identificar

- el *número de ramas* proporcionando una cota superior en términos del grado d;
- el *número de óvalos* y, por consiguiente, de componentes conexas separadas; Harhack (1876) demostró que el número de óvalos está acotado por $\frac{1}{2}(d^2 - 3d + 4)$ siendo $d = deg(C)$ y que esa cota es alcanzable para las M-curvas;
- la *posición relativa* de unos óvalos con respecto a otros usando campos vectoriales polinomiales de grado d de la forma
$$\frac{dx}{dt} = P(x, y)\ ,\ \frac{dx}{dt} = Q(x, y)$$
en términos de ciclos límite para las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden de la forma
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$$
siendo X, Y funciones enteras ó bien racionales de grado d en las variables x, y

Tiene gran interés desarrollar los aspectos topológicos de la clasificación incluyendo, en particular, las clases de homotopía y las clases de homeomorfismo de las curvas reales proyectivas de grado d. Nótese que pequeñas deformaciones en una familia uniparamétrica dan lugar a cambios bruscos en la topología de las soluciones y el problema es altamente no trivial; el problema similar para el caso de superficies presenta un gran número de cuestiones abiertas.

2.3.3. *Deformando variedades.* En general, la deformación general de una variedad algebraica no tiene por qué ser una variedad algebraica; ni siquiera cuando la deformación es una variedad algebraica, el resultado tiene por qué ser una variedad con las mismas características que la original. Para controlar las deformaciones de variedades algebraicas o analíticas, se introducen criterios más finos que afectan no sólo al grado o la clase (descritos en el apartado anterior), sino al "tipo" de singularidad que se puede describir (de formas no equivalentes) en términos topológicos, diferenciales, algebraicos ó analíticos. Las relaciones entre los diferentes tipos de clasificación dan lugar a multitud de resultados que relacionan la geometría intrínseca (independiente de la "inmersión") y la extrínseca (asociada al espacio en el que se "sumerge" la variedad).

La clasificación topológica para el caso singular presenta aún problemas abiertos sobre todo en dimensión ≥ 2. Las relaciones entre aspectos topológicos, algebraicos y diferenciales se enmarca dentro de la Teoría de Equisingularidad que ese estudia en Geometría Algebraica. Interesa estudiar el comportamiento de dichas propiedades por deformaciones (comportamiento "en familia") que se aborda en la Geometría Algebraica y Analítica de Curvas que se desarrolla en el Grado. Para dimensión superior ver a partir del módulo 4 en mis notas sobre Geometría Algebraica.

2.4. **Apéndice: Variedades topológicas.** Como ya se ha comentado anteriormente, los problemas fundamentales a resolver en Geometría y Topología son de caracterización y clasificación. Ambos problemas están relacionados entre sí. Los espacios de caminos (y sus generalizaciones) $\gamma : I \to X$ sobre espacios topológicos X juegan un papel fundamental para avanzar en ambos problemas.

En el caso más simple, las construcciones relacionadas con lazos (caminos cerrados no contractibles) se pueden definir sobre cualquier espacio topológico; sin embargo, en la mayor parte de los casos nos restringimos a analizar problemas de clasificación relacionados con "variedades topológicas".

2.4.1. *Noción de variedad topológica. Definición.-* Una *variedad topológica* es un espacio topológico Hausdorff X verificando que para cada punto $x \in X$ existe un abierto $U_\alpha \subset X$ con $x \in U$ que es homeomorfo via $\varphi_\alpha : U_\alpha \to U \subset \mathbb{R}^n$ a un abierto U del espacio cartesiano $\mathbb{R}^n$.

Denotamos mediante $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ a las coordenadas locales de U_α que son imágenes inversas de las coordenadas locales de $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mediante φ_α^{-1}. Al par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ se le llama una *carta local*

De forma similar a las condiciones impuestas en la construcción de variedades diferenciables a partir del "pegado" de datos locales (cartas), para que la definición de variedad topológica sea independiente de la carta local es necesario que la composición $(\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}) \mid_{\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)}$ sea la identidad.

El problema de la clasificación de variedades topológicas no se reduce al problema de los abiertos asociados al recubrimiento que da la estructura como variedad, pues el carácter global impone restricciones que en ocasiones es difícil detectar localmente. Para fijar ideas, aunque podamos obtener la circunferencia $\mathbb{S}^1$ como la imagen de un intervalo cerrado $[-1, 1]$ que identifica los extremos (variedades compactas y conexas por arcos), la circunferencia $\mathbb{S}^1$ no es homeomorfa a $[-1, 1]$. Esta afirmación se puede demostrar de varias formas:

- $[-1, 1]$ es simplemente conexo, mientras que $\mathbb{S}^1$ no lo es; más adelante veremos que el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$, por lo que $\mathbb{S}^1$ no puede ser contractible. ´En Geometría Diferencial diríamos que $[-1, 1]$ es una variedad con borde $\{-1, 1\}$, mientras que $\partial \mathbb{S}^1 = \emptyset$
- $\mathbb{S}^1 - \{p\}$ es conexo mientras que $[-1, 1] - \{q\}$ no lo es para $q \in]-1, 1[$.

2.4.2. *El problema del pegado.* El pegado de cartas se desarrolla en Geometría Diferencial de Variedades y, en menor medida, en Geometría Algebraica y Geometría Analítica. La equivalencia de los datos locales (cartas) sobre la intersección de los abiertos no es elemental y requiere reinterpretar expresiones locales para diferentes formas de expresar objetos que son topológicamente equivalentes. Un ejemplo topológico típico corresponde a la demostración del homeomorfismo entre discos $\mathbb{D}^n$ y (abiertos de) espacios cartesianos $\mathbb{R}^n$. Para fijar ideas a continuación se considera el caso $n = 2$

Ejercicio.- Verifica que la aplicación

$$f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \ , \ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$$

con inversa

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{D}^2 \mid g(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \ , \ \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$$

define un homeomorfismo entre el disco abierto $\mathbb{D}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ y el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ (*Indicación:* Comprobar que $fg = 1_{\mathbb{R}^2}$ y que $gf = 1_{\mathbb{D}^2}$ y que las aplicaciones son biyectivas).

Una consecuencia de este ejercicio consiste en que si añadimos un punto a $\mathbb{R}^2$ se obtiene un espacio compacto que es $\mathbb{S}^2$, un resultado bien conocido de la Topología General donde se demuestra para dimensión n arbitraria (Teorema de Alexandrov).

Las condiciones formuladas para el pegado de datos locales no son computacionalmente implementables. En las aplicaciones a Ingeniería u otras áreas, los datos son discretos y, por tanto, los objetos que se construyen son cerrados, desde el punto de vista topológico. Por ello, es preferible reformular las condiciones de compatibilidad en términos de cerrados, tal y como se hace en Geometría Algebraica con la Topología de Zariski.

La discretización de los datos correspondientes a los cerrados conduce a politopos (la generalización natural de poligonales, poliedros, etc) que es necesario comparar mediante técnicas de Topología Combinatoria (incluyendo representación mediante Grafos). En este contexto se han desarrollado técnicas de refinamiento de datos comunes (mediante operaciones booleanas sencillas) que se han aplicado a mallas para facilitar un remallado posterior para facilitar la implementación computacional.

En el modulo 2 (Homología Simplicial) veremos que un politopo es una unión conexa de símplices; el interior de cada símplice es una célula, es decir, un espacio topológicamente equivalente a un disco abierto estándar del espacio cartesiano. Los problemas se presentan en el borde que es necesario tratar de diferentes formas tal y como muestra el apartado siguiente.

2.4.3. *Equivalencia topológica entre el cuadrado y la circunferencia.* La presencia de "esquinas" es irrelevante desde el punto de vista topológico; ello es consecuencia de una extensión del ejercicio siguiente:

Ejercicio.- Verifica que la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ es homeomorfa al cuadrado $I^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

(*Indicación:* Construye $f : I^2 \to \mathbb{S}^1 \mid f(x,y) = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$ donde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$)

El ejercicio precedente se extiende de forma obvia a dimensión arbitraria y pone además de relieve que la utilización de una distancia u otra es indiferente desde el punto de vista topológico, aunque no lo sea para la mayor parte de las aplicaciones, incluso las que afectan a deformaciones de objetos donde frecuentemente se requiere conservación de ángulos (Geometría Conforme). La circunferencia corresponde a un entorno del origen para la distancia euclídea, pero ¿a qué distancia corresponde el cuadrado como entorno del origen?

3. **La noción de homotopía**

La homotopía formaliza desde el punto de vista topológico la noción de *deformación*, proporcionando una metodología para obtener *invariantes* a partir de caminos construidos sobre los objetos a estudiar. La "forma exacta" de los caminos importa poco; lo que importa es la "apariencia" o, con más precisión, las propiedades combinatorias de los caminos maximales que podamos componer, propiedades que expresamos algebraicamente en términos de generadores y de relaciones asociados al número de "agujeros". Para fijar ideas en el caso más simple correspondiente al plano, una circunferencia $\mathbb{S}^1$ no puede ser topológicamente equivalente a un disco $\mathbb{D}^2$, pues $\mathbb{S}^1$ tiene un agujero (el interior de la región que acota), mientras que $\mathbb{D}^2$ es "sólido" (no tiene agujeros).

Esta descripción se extiende a cualquier curva cerrada (incluyendo poligonales cerradas arbitrarias) y cualquier región planar "simplemente conexa" del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, ¿cómo demostrar esta afirmación para dimensión arbitraria?. ¿La afirmación sigue siendo cierta independientemente de la inmersión que utilicemos? La respuesta a la última cuestión es obviamente negativa, pues cualquier nudo dado por un embebimiento $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ muestra objetos que siendo lisos presentan una topología no equivalente a la de la circunferencia. Es necesario introducir herramientas más finas que permitan responder a las preguntas anteriores y ello requiere desarrollar conceptos y resultados que permitan comparar objetos y aplicaciones.

3.1. **Homotopía entre aplicaciones.** La posibilidad de deformar una aplicación en otra de manera continua, permite comparar propiedades de los espacios en términos de las clases de homotopía de las aplicaciones. Este tipo de argumentos proporciona asimismo relaciones entre los invariantes algebraicos asociados (grupos de homotopía). En esta subsección se introducen nociones básicas para facilitar dicha comparación.

3.1.1. *Homotopía de una aplicación. Definición.-* Una *homotopía continua* de una aplicación $f : X \to Y$ es una aplicación continua

$$F : X \times [0,1] \to Y$$

definida para cualquier par $(x,t) \in X \times [0,1]$ tal que

$$F(x,0) = f(x)\ \forall x \in X$$

Análogamente a la observación realizada para caminos, el intervalo unidad $[0,1]$ puede ser reemplazado por cualquier otro $I = [a,b]$. Intuitivamente, una homotopía corresponde a una "deformación continua" f_t donde para cada t prefijado se tiene

$$f_t : X \to Y \ \mid\ f_t(x) = F(x,t)\ \forall x \in X$$

que se visualiza sobre el cilindro $X \times [0,1]$. Interesa caracterizar todas las aplicaciones que se obtienen por este procedimiento:

3.1.2. *Aplicaciones homótopas. Definición.-* Dos *aplicaciones* $f, g : X \to Y$ se dice que son *homotópicamente equivalentes* u *homótopas* (para abreviar) si existe una homotopía continua

$$F : X \times [0,1] \to Y$$

tal que

$$F(x,0) = f(x)\ \forall x \in X\ ,\ F(x,1) = g(x)\ \forall x \in X$$

3.1.3. *Clases de equivalencia. Lema.-* La condición de equivalencia homotópica para aplicaciones $f, g : X \to Y$ es una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones $Map(X,Y)$

Demostración: Veamos que se verifican las 3 condiciones que caracterizan a una relación de equivalencia

(1) *Reflexiva:* Sea $f : X \to Y$ una aplicación y definamos $F : X \times I \to Y$ mediante $F(x,t) = f(x)$. Entonces, F es una homotopía entre f y ella misma.
(2) *Simétrica:* Supongamos que $f \sim g$. Entonces, existe una homotopía $F : X \times I \to Y$ tal que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$. Definamos la homotopía $G : X \times I \to Y$ mediante $G(x,t) = F(x,1-t)$. Entonces, $G(x,0) = g(x)$ and $G(x,1) = f(x)$ por lo que $g \sim f$.
(3) *Transitiva:* Supongamos que $f \sim g$ and $g \sim h$. Denotemos por $F : X \times I \to Y$ a la homotopía que relaciona f y g, y mediante $G : X \times I \to Y$ a la homotopía que relaciona g y h. Definamos la homotopía $H : X \times I \to Y$ mediante
$$H(x,t) = \left\{ \begin{array}{ccc} F(x\ ,\ 2t) & \text{si} & t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) & \text{si} & t > \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$
A partir de esta descripción para la homotopía H es claro que $f \sim h$.

La clase de homotopía de una aplicación $f \in Y^X$ es una componente conexa del espacio de aplicaciones Y^X. Se denota mediante $\pi_0(Y^X)$ al conjunto de clases de homotopía de las aplicaciones Y^X continuas de X en Y; en ocasiones, también se denota mediante $[X,Y]$, aunque esta notación puede inducir a confusión, pues el corchete de Lie de dos campos vectoriales se denota exactamente de la misma forma en Geometría Diferencial.

3.1.4. *Compatibilidad de la homotopía con la composición. Proposición* Sean $f, f_0 : X \to Y$ y $g, g_0 : Y \to Z$ aplicaciones continuas. Supongamos que $f \sim f_0$ y $g \sim g_0$. Entonces $g \circ f\ \sim\ g_0 \circ f_0$.

Demostración: Veamos en primer lugar que $g \circ f\ \sim\ g \circ f_0$. Denotemos por $F : X \times I \to Y$ a la homotopía que conecta f y f_0. Definimos la homotopía $F_0 : X \times I \to Z$ como la composición

$$g \circ F\ :\ X \times I\ \to\ Y\ \to\ Z$$

Ahora, veamos que $g \circ f_0 \sim g_0 \circ f_0$. Denotemos mediante $G : Y \times I \to Z$ a la homotopía que conecta g y g_0. Definimos la homotopía $G_0 : X \times I \to Z$ como la composición

$$G \circ f_0 \times id \;:\; X \times I \;\to\; Y \times I \;\to\; Z$$

Reuniendo ambos resultados, se obtiene

$$g \circ f \;\sim\; g \circ f_0 \;\sim\; g_0 \circ f_0 \quad \textbf{c.q.d.}$$

3.1.5. *Comparación entre definiciones. Definición.-* Diremos que dos caminos $f, g : I \to X$ de x en y son equivalentes si existe una homotopía $h : I \times I \to X$ tal que

$$h(s,0) = f(s)\ ,\ h(s,1) = g(s)\ ,\ h(0,t) = x\ ,\ h(1,t) = y$$

para cualquier $s, t \in I$.

3.1.6. *Ejercicios. Ejercicio 1.-* Compara la definición del último apartado con la definición dada más arriba y analiza si son equivalentes

Ejercicio 2 (Greenberg).- Supongamos que $X = Y = \mathbb{R}^n$. Sea $f : X \to Y$ la identidad y $g : X \to Y$ la aplicación nula. Demuestra que $F(x,t) = tx$ define una homotopía de g en f

3.2. **Dependencia con respecto al punto base. Caso relativo.** El propósito de esta subsección es mostrar que los grupos fundamentales correspondientes a puntos base diferentes pertenecientes a la misma componente conexa son conjugados entre sí. Por ello, el grupo fundamental proporciona el primer invariante algebraico importante que se puede asociar a un espacio topológico arbitrario.

La condición de llevar un punto base $x_0 \in X$ del espacio de partida a un punto base $y_0 \in Y$ del espacio de llegada Y para una aplicación $f : X \to Y$ es a menudo demasiado restrictiva. En relación otras áreas de las Matemáticas y sus aplicaciones a otras áreas de conocimiento, interesa considerar aplicaciones que dejan estable un subespacio topológico.

Esta observación lleva a considerar la homotopía relativa entre pares $f : (X, A) \to (Y, B)$ donde $f(A) \subset B$ con sus correspondientes relaciones entre grupos fundamentales relativos. Estos tópicos proporcionan el núcleo del Capítulo siguiente donde se abordan con más detalle resultados y aplicaciones, por lo que aquí nos limitamos a motivar algunas nociones básicas.

3.2.1. *Clases de conjugación de caminos. Definición.-* Para un camino $a : x \to y$, definimos $\gamma[a] : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$ mediante

$$\gamma[a][f] = [a \circ f \circ a^{-1}]$$

Ejercicio.- Verifica que la clase de conjugación $\gamma[a]$ sólo depende de la clase de equivalencia del camino a y es un homomorfismo de grupos.

Para un camino $b : y \to z$ verifica que

- $\gamma[b \circ a] = \gamma[b] \circ \gamma[a]$

- $\gamma[a]$ es un isomorfismo con inverso $\gamma[a.1]$.

Para un camino $a : y \to x$ comprueba que

$$\gamma[b \circ a][f] \;=\; [b \circ a][f][(b \circ a)^{-1}]$$

Si el grupo $\pi_1(X, x)$ fuera abeliano, entonces la expresión anterior es precisamente $[f]$

Haciendo $b = (a')^{-1}$ para cualquier otro camino $a' : x \to y$, si $\pi_1(X, x)$ es abeliano, entonces $\gamma[a]$ es independiente de la elección de la clase del camino $[a]$. Por ello, en el caso conmutativo se tiene una forma canónica que permite identificar $\pi_1(X, x)$ con $\pi_1(X, y)$.

Corolario.- Si un espacio es *conexo por caminos*, entonces los grupos $\pi_1(X, x_0)$ son isomorfos para cualquier $x_0 \in X$ y escribimos simplemente $\pi_1(X)$ en lugar de $\pi_1(X, x_0)$.

Cuestión.- ¿Qué ocurre si un espacio tiene r componentes conexas?

3.2.2. *Espacios simplemente conexos. Definición.-* Se dice que un espacio topológico X es *simplemente conexo* si es conexo por caminos y el grupo fundamental $\pi_1(X)$ de X es trivial.

En un espacio simplemente conexo, cualquier camino se puede deformar de manera continua en cualquier otro camino

Ejemplos

- $\mathbb{R}^n$ para cualquier n y $\mathbb{S}^n$ (para $n \geq 2$ son simplemente conexos. ¿Qué ocurre con $\mathbb{S}^1$?
- Cualquier espacio contractible es simplemente conexo
- El toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ no es simplemente conexo.

Ejercicio.- ¿Es simplemente conexo el producto de espacios simplemente conexos? Razona la respuesta.

3.2.3. *Homotopía punteada.* Cuando se desea privilegiar puntos de cada espacio $(x_0, y_0) \in X \times Y$, se introduce la noción de *homotopía punteada* que añade a la descripción anterior las restricciones

- $f(x_0) = y_0$
- $F(x_0, t) = y_0$ para cualquier $t \in [0, 1]$

Un ejemplo del interés práctico de esta situación corresponde a las condiciones de equilibrio cuasi-estático en diferentes tipos de mercados que se expresan como un punto fijo para aplicaciones ó, con más generalidad, sistemas dinámicos. La cuestión a resolver consiste en introducir deformaciones del modelo (con sus correspondientes versiones discretas) que permitan mantener las condiciones de equilibrio en términos de puntos fijos para aplicaciones. La dificultad del problema radica en que la información disponible está incompleta, sesgada y con frecuencia no responde a los modelos de expectativas racionales al uso en Teoría Económica.

3.2.4. *Homotopía relativa.* En lugar de conservar un punto como en el apartado precedente, se puede imponer la condición de conservar un subconjunto $A \subset X$. De una manera más formal, dados $A \subset X$, $B \subset Y$, estamos interesados en las clases de homotopía de las aplicaciones

$$f : X \to Y \ \mid f(A) \subset B$$

al que denotamos mediante

$$f : (X, A) \to (Y, B)$$

Ejercicio.- Demuestra que la homotopía con respecto a un subespacio $A \subset X$ es una relación de equivalencia.

Este ejercicio proporciona una motivación para el desarrollo de la homotopía relativa que puede interpretarse de forma intuitiva como la homotopía del "complementario" del subespacio A en X. En múltiples aplicaciones a otras áreas científicas o tencológicas, hay regiones interiores "no permitidas" para el estudio de caminos ó trayectorias que pueden fluctuar o incluso (des)aparecer. Por ello, esta construcción es especialmente útil.

Nota.- En ocasiones, a pesar de la incertidumbre sobre las condiciones de control ó de optimización (problema dual del de control), se conocen las regiones de estabilidad ó, por el contrario, de caos para la dinámica. La estabilidad global del sistema se traduce en mantener bajo control las regiones críticas. Existen diferentes aplicaciones de este enfoque relacionadas con el control de reacciones químicas, el análisis de fenómenos biológicos (incluyendo modelos de ecosistemas) ó nuevamente el análisis de sistemas complejos vinculados a la Dinámica Económica.

3.3. **Equivalencia homotópica.** *Definición.-* Se dice que la *aplicación* $f : X \to Y$ es una *equivalencia homotópica* si existe una inversa $g : Y \to X$ tal que las composiciones son homótopas a la aplicación identidad para cada espacio, es decir:

$$g \circ f \sim 1_X : X \to X \text{ y } f \circ g \sim 1_Y : Y \to Y$$

donde $1_X(x) = x \ \forall x \in X$ y $1_Y(y) = y \ \forall y \in Y$. En ese caso, se dice que X e Y son *espacios homotópicamente equivalentes* ó que tienen el *mismo tipo de homotopía* y se representa mediante $X \sim Y$

3.3.1. *Retracto de deformación.* Supongamos que

- X es un subespacio topológico de Y, con $f : X \to Y$ como aplicación de inclusión
- La restricción de $g : Y \to X$ a X es la aplicación identidad.

Definición.- Con la notación anterior, decimos que X es un *retracto de deformación de* Y si a partir de la homotopía $F : X \times I \to Y$ que deforma $f \circ g : Y \to X \to Y$ en la identidad 1_Y se tiene

$$F(x, t) = x \ \forall x \in X \subset Y$$

Un problema importante es la comparación entre propiedades del borde y del interior ó bien del "esqueleto". Dos ejemplos importantes son

- La esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ es un retracto de deformación del espacio cartesiano punteado $\mathbb{R}^n - \{\underline{0}\}$ (*Indicación:* utilizad la aplicación radial $x \mapsto x/\|x\|$)
- La esfera no $\mathbb{S}^{n-1}$ es un retracto de deformación del disco $\mathbb{D}^n$: esta afirmación es casi una trivialidad para $n = 2$, pero requiere un mayor desarrollo conceptual y de resultados para n arbitrario.

3.3.2. *Espacios contractibles. Definición.-* Se dice que X es un *espacio contractible* si admite un punto como retracto de deformación.

- El espacio cartesiano $\mathbb{R}^n$ tiene a un punto cualquiera (el origen $\underline{0}$, típicamente) como retracto de deformación (*Indicación:* Utiliza la aplicación radial). Por ello, *cualquier espacio cartesiano es contractible* (esta construcción es independiente del cuerpo con el que se trabaje).
- El interior de la región acotada por cualquier curva simple (poligonal cerrada conexa sin autointersecciones) es contractible, aunque la poligonal no lo sea.
- Cualquier región abierta $Y \subset \mathbb{R}^n$ se retracta a un subconjunto de dimensión más baja (razonarlo como ejercicio)

La construcción de retractos es una de las técnicas más importantes en Topología Algebraica, pues simplifica los espacios con los que se trabaja y facilita la comparación entre los mismos de cara a la clasificación de espacios y de aplicaciones entre espacios.

3.3.3. *Aplicaciones sobre un espacio contractible. Proposición.-* Dos aplicaciones $f, g : X \to Y$ sobre un espacio contractible Y son homótopas.

Demostración.- Supongamos que Y es contractible; la aplicación 1_Y es homótopa a la aplicación constante c. Como la composición de dos homotopías es una homotopía, se tiene que $f \sim c_f$ y $g \sim c_g$.

Como $c_f \sim c_g$ y la homotopía con respecto a un subespacio $X' \subset X$ es una relación de equivalencia, se tiene que $f \sim g$

Definición.- Se dice que una función es *homótopa a cero* (null-homotopic) si es homótopa a una función constante.

Ejemplo.- Una aplicación de $\mathbb{S}^1$ en un espacio X es homótopa a cero cuando se puede extender a una aplicación del disco unidad $\mathbb{D}^2$ en X que coincide con f en el borde $\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$

Ejercicio.- Demuestra que un espacio X es contractible si y sólo si la aplicación identidad $1_X : X \to X$ es homótopa a cero. Ilustra este argumento con ejemplos de espacios contractibles (el espacio cartesiano, p.e.) vs no-contractibles (la circunferencia de radio unidad, p.e.). Adapta el argumento relativo a la circunferencia $\mathbb{S}^1$ a cualquier curva simple.

3.3.4. *Retracción. Ejemplos avanzados. Definición.-* Una *retracción* de un espacio Y en un subespacio $X \subset Y$ es una aplicación $f : Y \to X$ tal que la restricción de f a X es (homótopa a) la aplicación identidad: $f\,|_X = 1_X$. Se dice entonces que el espacio X es un *retracto* de Y

Ejemplos avanzados.- A continuación se comentan algunos ejemplos prácticos relacionados con la retracción de espacios topológicos en torno a una representación simbólica conexa (un "esqueleto" Sk) que tienen interés y están siendo desarrolladas en la actualidad en relación con cuestiones de animación o de restauración de video.

- El "adelgazamiento" de las letras mayúsculas macizas a su "esqueleto" (erosión manteniendo la conexividad) es un retracto de deformación que permite tratar a las letras como si fueran caminos en el plano y, por tanto, aplicar los métodos de homotopía para cuestiones de reconocimiento incluyendo detección, clasificación e indexación. Este argumento es válido para cualquier tipo de signo caligráfico ó símbolos alfanuméricos en relación con el tratamiento digital de documentos (aplicaciones en OCR: Optical Character Recognition).
- El "esqueleto virtual" es un retracto de deformación asociado a la captura en cada instante de un objeto móvil articulado $B^{(\alpha)}$. El modelado en términos de esqueleto facilita la animación añadiendo la biomecánica correspondiente a las juntas en las que confluyen dos ó más segmentos. Este modelado utiliza información heurística procedente del procesamiento de secuencias de video correspondientes al movimiento de uno ó varios animats.
- La representación simbólica del lenguaje de signos (no verbal) es un retracto de deformación de los signos realizados por intérpretes que afecta a dedos, manos, brazos, parte superior del tronco y cabeza. Aún no se dispone de un tratamiento computacional en tiempo real para el procesamiento y análisis de este lenguaje.

En el marco C^r para $f \geq 2$ es posible construir retracciones mediante la integración de campos vectoriales. Un caso particular importante concierne a la Teoría de Morse (que se desarrolla en Topología Diferencial Global); en este caso, la reconstrucción de variedades compactas conexas se lleva a cabo mediante adjunción de un número finito de "células" [18]. Es fácil ver que la topología de la variedad sólo depende de la localización relativa de los puntos críticos de funcionales definidos sobre la variedad.

En el caso escalar, para una función $f : M \to \mathbb{R}$ con puntos críticos aislados no-degenerados $x_i \in M$ (a la que se llama función de Morse), la signatura del Hessiano $Hess(f)(x_i)$ es igual a la dimensión de las células a añadir. La retracción se lleva a cabo a lo largo de las curvas integrales asociadas al campo gradiente para la función altura (camino del "descenso más rápido"). La construcción original de Morse se extiende a variedades no necesariamente compactas utilizando una extensión localmente finita de los complejos celulares a la que se llama CW-complejo.

Ejercicio.- Demuestra que el segmento que conecta los puntos de intersección de las bisectrices asociadas a cada par de ángulos consecutivos de una figura cuadrangular es un retracto de deformación de la región rectangular. Extiende esta construcción al borde de una región planar conexa acotada por una poligonal simple arbitraria, obteniendo un árbol conexo al que se llama "esqueleto" [19]

[18] Una célula es un par de espacios topológicos homeomorfo al par $\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1}$

[19] Este procedimiento proporciona una primera aproximación a la animación de figuras planares representadas por poligonales cerradas simples $\mathcal{P}$ a partir de representaciones esqueletales $Sk(\mathcal{P})$

3.4. **Ejercicios de recapitulación.**

3.4.1. *Homotopía relativa. Contractibilidad de* $\mathbb{R}$. Supongamos que $X = Y = \mathbb{R}$ and $f_0(x) = x$; $f_1(x) = 0$ con $x \in \mathbb{R}$, Verificar que f_0 es homotópicamente equivalente a f_1 con respecto al subconjunto $\{0\}$

Indicación: Construir la homotopía

$$F : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R} \ \mid \ F(x;t) = (1-t)x$$

y comprobar que $F(x,0) = x$, $F(x,1) = 0$, $F(0,t) = 0$. Nótese que este resultado implica que la recta $\mathbb{R}$ es contractible

3.4.2. *Contractibilidad del intervalo unidad.* Supongamos que $X = Y = I$ y sean $f_0(t) = t$, $f_1(t) = 0$ para $t \in I$. Verificar que $f_0 \sim f_1$ con respecto al subconjunto $\{0\}$

Indicación: Construir la homotopía $F : I \times I \ \to \ I \ \mid \ F(t;t') = (1-t')t$ y verificar que $F(t,0) = t$, $F(t,1) = 0$, $F(0,t') = 0$. Como consecuencia, el intervalo $I = [0,1]$ es contractible

3.4.3. *Grafos homotópicamente equivalente y retractos.* Se consideran los grafos dados por (i) dos ciclos conectados mediante un segmento, (ii) dos ciclos conectados a través de un punto en común, (iii) dos ciclos que comparten una arista (dibujarlos). Verificar que los tres grafos son homotópicamente equivalentes, pero ninguno de ellos es un retracto de deformación del otro. (*Indicación*: los tres grafos son equivalentes porque proceden todos ellos de un mismo espacio).

3.4.4. *Propiedades invariantes.* Supongamos que X e Y son homotópicamente equivalentes. Demuestra que

- Si X es conexo por arcos, entonces Y es conexo por arcos.
- Si X es simplemente conexo, entonces Y es simplemente conexo .
- Si X e Y son conexo por arcos, entonces los grupos fundamentales son isomorfos.

3.4.5. *Equivalencia homotópica y retracto de deformación.* Dos *espacios* X e Y son *homotópicamente equivalentes* si, y sólo si, existe un espacio Z que contiene a X e Y como retractos de deformación (*Indicación*: La condición suficiente es trivial. Para demostrar la condición necesaria, construir Z como una "aplicación cilíndrica" M_f de la equivalencia homotópica $f : X \to Y$. Obviamente, M_f se retracta sobre Y, por lo que basta demostrar que M_f) también se retracta en el otro extremo X usando la equivalencia homotópica).

Dos C^r- *variedades* X, Y son *cobordantes* si existe una C^r-variedad Z tal que $\partial Z = X \cup Y$. Interese mostrar procedimientos efectivos que permiten conectar C^r-variedades mediante curvas integrales asociadas a campos vectoriales.

El caso más sencillo corresponde a la Teoría de Morse asociada a una función escalas (la altura ó la profundidad, p.e.); en este caso, si el intervalo $[c_i, c_{i+1}]$ solo

asociadas a las poligonales; una introducción a los modelos biomecánicos para la animación se puede ver en los módulos 5 y 6 de mis notas sobre Robótica.

contiene a los extremos $\{c_i, c_{i+1}\}$ como puntos críticos, entonces las "superficies" de nivel asociadas a elementos regulares $f^{-1}(r)$ son homeomorfas; en particular, tienen el mismo tipo de homotopía y todas ellas son un retracto de deformación de la variedad $f^{-1}([c_i, c_{i+1}])$

4. Elementos de Categorías y Funtores (TTA)

Toda esta sección se debe entender como una propuesta para un trabajo teórico adicional (TTA)

En esta sección se introducen elementos de abstract no-sense que facilitan la manipulación algebraica de objetos con propiedades abstractas similares ó, por el contrario, radicalmente diferentes. A pesar de su abstracción, la introducción de este lenguaje simplifica demostraciones de una gran complejidad y proporciona una visualización de equivalencias, a veces sorprendentes, entre campos de conocimiento que inicialmente parecen bastante alejados entre sí.

Desde un punto de vista de metalenguaje, una categoría proporciona el marco conceptual más sencillo en el que podemos hablar de sistemas (objetos) y de procesos (morfismos). Esta cuestión es crucial no sólo en el marco lógico, matemático ó físico, sino también computacional, donde los procesos se pueden entender como una composición de servicios como respuesta a un requerimiento realizado contra un repositorio; la información contenida en dicho repositorio puede proceder de procesamiento y análisis de objetos. La idea intuitiva que subyace a las construcciones basadas en categorías consiste en pensar en las "cosas" como si fueran objetos de una categoría $\mathcal{C}$ y en los "procesos" como si fueran los morfismos de la categoría $\mathcal{C}$.

4.1. Nociones básicas.

4.1. Nociones básicas. La Teoría de Categorías nace en torno a 1945 y aparece formulada por primera vez en Eilenberg and Mac Lane [Eil45], donde se introducen "funtores" entre categorías y "transformaciones naturals" entre funtores. Una introducción clásica se puede encontrar en [Mac98]; otras aproximaciones que facilitan materiales complementarios surgidos a lo largo de los años 70 y 80 son [Cro93] y [McL95]

4.1.1. *¿Qué es una categoría? Definición.*- Una categoría $\mathcal{C}$ consiste en

- una *colección de objetos* X, donde si X es un objeto de $\mathcal{C}$ escribimos $X \in \mathcal{C}$, y
- para cada par (X, Y) de objetos un *conjunto hom*(X, Y) de *morfismos de* X en Y, al que denotamos $Mor(X, Y)$; si $f \in Mor(X, Y)$ entonces escribimos $f : X \to Y$

verificando que

- Para cada objeto X existe un *morfismo identidad* $1_X : X \to X$;
- Es posible realizar la *composición de morfismos*, es decir, dado $f \in Mor(X, Y)$ y $g \in Mor(Y, Z)$, existe el *morfismo compuesto* $g \circ f \in Mor(X, Z)$
- El *morfismo identidad* es una unidad a la derecha y a la izquierda, es decir, para $f \in Mor(X, Y)$, se tiene que $f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f$
- La composición es *asociativa*, es decir, $(hg)f = h(gf)$ con tal de que cada miembro esté bien definido.

4.1.2. *Ejemplos de categorías.*

- La categoría $\mathcal{S}$ de conjuntos y aplicaciones entre conjuntos;
- La categoría $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y aplicaciones lineales entre e.v.;

- La categoría $\mathcal{G}$ de grupos y homomorfismos entre grupos;
- La categoría $\mathcal{G}_{ab}$ de grupos abelianos y homomorfismos entre grupos abelianos;
- La categoría $\mathcal{R}$ de anillos y homomorfismos entre anillos;
- La categoría $\mathcal{T}$ de espacios topológicos y aplicaciones continuas entre e.t.

La categoría que más interesa en Topología Algebraica es la $\mathcal{T}$, aunque es importante tener alguna familiaridad con categorías algebraicas por las posibilidades que ofrece para el tratamiento algebraico de la información topológica.

4.1.3. *Morfismo entre categorías. Definición.-* Decimos que un morfismo $f \in Mor(X,Y)$ es un *isomorfismo* si tiene un inverso, es decir, si existe otro morfismo $g \in Mor(Y,X)$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$.

Los isomorfismos en la categoría $\mathcal{T}$ de espacios topológicos son los homeomorfismos. Por ello, la clasificación de objetos (variedades topológicas) modulo homeomorfismo es la clasificación módulo isomorfismo en la categoría $\mathcal{T}$

Ejercicio.- Sea $f : X \to Y$ un isomorfismo en la categoría $\mathcal{C}$ y denotemos mediante Z un objeto arbitrario en la categoría $\mathcal{C}$. Entonces f determina por composición

- una aplicación de conjuntos $f_* : Hom(Z,X) \to Hom(Z,Y)$ dada por $\varphi \mapsto f \circ \phi$ para cualquier $\phi : Z \to X$
- una aplicación de conjuntos $f^* : Hom(Y,Z) \to Hom(X,Z)$ dada por $\psi \mapsto \psi \circ f$ para cualquier $\psi : Y \to Z$

Demuestra que f_* y f^* son biyecciones entre conjuntos.

4.2. **Funtores.** Los funtores permiten construir aplicaciones entre diferentes categorías, facilitando su comparación en términos de objetos y de morfismos.

4.2.1. *Definición de funtor. Definición.-* Un *funtor* de la categoría $\mathcal{C}$ en la categoría $\mathcal{D}$ es una correspondencia que

- asocia el objeto $F(X) \in Ob(\mathcal{D})$ a cada $X \in Ob(\mathcal{C})$
- asocia un morfismo $F(f) \in Mor_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ a cualquier morfismo $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$

verificándose los *axiomas siguientes*:

(1) Para cualquier objeto $X \in \mathcal{C}$ se tiene $F(1_X) = 1_{F(X)}$.
(2) Para cualquier morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ y $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ se tiene:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Z))$$

4.2.2. *Funtores covariantes y contravariantes.* Frecuentemente, por analogía con la terminología utilizada en Cálculo Tensorial ó en Geometría Diferencial, al funtor que acaba de ser definido se le llama un *funtor covariante* (respeta el sentido de las flechas). Existe asimismo la noción de *funtor contravarante* que se puede definir de forma abstracta en la *categoría opuesta $\mathcal{C}op$* caracterizada por

- Los objetos de $\mathcal{C}^{op}$ son los mismos que los objetos de $\mathcal{C}$
- Para cada morfismo $f \in Mor_{\mathcal{C}}$ dado por $f : A \to B$, existe un único $f^* \in Mor_{\mathcal{C}^{op}}$ dado por $f^* : B \to A$

Según esta descripción, un *funtor contravariante* $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es por definición un funtor covariante $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$

4.2.3. *Ejemplo de funtor covariante.* Para la categoría de grupos abelianos $\mathcal{C} = \mathcal{G}_{ab}$ y la categoría de grupos $\mathcal{D} = \mathcal{G}$, el funtor que lleva cada grupo abeliano $G \in Ob(\mathcal{G}_{ab})$ en el mismo grupo $G \in Ob(\mathcal{G})$ es un funtor al que se llama *funtor de olvido*

Ejercicio Demuestra que si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor y $f \in Hom(X, Y)$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}$, entonces $F(f) \in Hom(F(X), F(Y))$ es un isomorfismo in $\mathcal{D}$.

4.2.4. *Ejemplo de funtor contravariante.* Sea $\mathcal{C}$ la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y asociemos a cada espacio vectorial V su espacio vectorial dual $V^* := Hom(V, \mathbb{K})$. Verifica que esta correspondencia define un funtor contravariante.

Ejemplo.- El dual del espacio tangente T_pM en un punto $p \in M$ de una variedad diferenciable es el espacio cotangente $T_p^*M = \Omega^1_{M,p}$; de una manera más literaria, el dual del espacio de las derivaciones es el espacio de las diferenciales (independientemente del cuerpo base) y recíprocamente. Esta construcción se extiende formalmente al fibrado tangente τM y a su dual el fibrado cotangente Ω^1_M, proporcionando un soporte para el desarrollo del cálculo tensorial sobre cualquier variedad diferenciable M; un tensor de tipo (p, q) es un tensor q veces covariante y r veces contravariante, es decir, un elemento que localmente se representa como un multivector $\otimes^q T_pM \otimes \otimes^r T_p^*M$; esta construcción se globaliza utilizando la compatibilidad entre las cartas locales para el fibrado tangente y las del fibrado cotangente.

Una cuestión algo más complicada es la extensión de la construcción precedente a variedades con singularidades que se aborda en Geometría Algebraica y en Geometría Analítica de Varias Variables Complejas.

4.3. **Utilidad de categorías en Topología Algebraica.** Las construcciones con categorías y funtores son ubicuas en Topología Algebraica y aparecen a lo largo de todo el Curso. El lenguaje categorial es muy potente y permite expresar de forma compacta resultados que, de otra forma, son tediosos de escribir. En particular, la equivalencia entre categorías proporciona la herramienta adecuada para trasladar métodos y herramientas entre diferentes áreas de las Matemáticas, lo cual ha impulsado las aplicaciones a otras áreas de conocimiento en Ciencias e Ingeniería.

La utilización de categorías permitió en los años cincuenta y sesenta del s.XX la unificación entre diferentes métodos y herramientas de la Topología Algebraica como consecuencia de desarrollos formales procedentes del Álgebra Homológica. La referencia clásica más completa es [Car56] [20]. No obstante, el lenguaje de categorías funciona frecuentemente como una "barrera" en las primeras fases de aprendizaje; por ello, en la mayor parte de los módulos 1 y 2 utilizaremos un lenguaje más "pedestre", para facilitar una mayor familiaridad con los objetos básicos.

En esta subsección se proporcionan elementos básicos y se anticipan desarrollos futuros, centrando la atención en la categoría $\mathcal{T}$ de espacios topológicos

[20] H.Cartan and S.Eilenberg: *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, disponible en http://www.math.stonybrook.edu/ mmovshev/BOOKS/homologicalalgeb033541mbp.pdf

4.3.1. *Componentes conexas por caminos.* Sea X un espacio topológico e introduzcamos la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y$ si y sólo si existe un camino γ que conecta $x = \gamma(0)$ con $y = \gamma(1)$ (verificar que es una relación de equivalencia). Las clases de equivalencia en X por la relación anterior se denominan las *componentes por caminos de* X y al conjunto de dichas clases de equivalencia se le denota mediante $\pi_0(X)$. De este modo, se obtiene una partición (descomposición en unión disjunta de subconjuntos) de X en subespacios conexos por caminos ó por arcos.

El conjunto $\pi_0(X)$ es un funtor de la categoría $\mathcal{T}$ de espacios topológicos en la categoría $\mathcal{S}$ de conjuntos. En efecto, para una aplicación $f : X \to Y$, denotemos mediante $[x] \in \pi_0(X)$ la componente conexa a la que pertenece $x \in X$. Entonces, π_0 conserva las composiciones y las identidades (verificarlo):

$$F[x] \ := \ [f(x)]$$

por lo que la asignación que a cada punto le lleva en su componente conexa por caminos es un funtor. De hecho, más adelante, añadiendo alguna restricción adicional veremos que podemos pensar en $\pi_0(X)$ como elementos de una categoría de grupos, por lo que el funtor lleva conjuntos que son componentes conexas por caminos en grupos, es decir, se puede "representar" como $F : \mathcal{T} \to \mathcal{G}$, lo cual reduce la dificultad del problema, pues un estudio directo de $\mathcal{T}$ es más difícil que el estudio de $\mathcal{G}$ donde contamos con un número mucho mayor de herramientas, lo cual facilita la manipulación de objetos y de morfismos.

4.3.2. *La homotopía como categoría. Definición.-* La categoría de homotopía $h\mathcal{T}op$ es la categoría cuyos objetos son espacios topológicos y cuyos morfismos son las clases de homotopía de aplicaciones $X \to Y$

Ejercicio.- Comprueba que $h\mathcal{T}op$ es en efecto una categoría.

Existe un funtor tautológico de la categoría $\mathcal{T}$ en la categoría $h\mathcal{T}op$

Recordemos que dos *espacios* topológicos X, Y son *homotópicamente equivalentes* si existen aplicaciones $f : X \to Y$ and $g : Y \to X$ tales que $f \circ g \sim 1_Y$ y $g \circ f \sim 1_X$, en cuyo caso se dice que f y g son equivalencias de homotopía. En lenguaje funtorial, la equivalencia de homotopía es una aplicación que admite inversa a los dos lados, salvo homotopía. Por ello, la equivalencia homotópica proporciona la noción de isomorfismo en la categoría $h\mathcal{T}op$.

En particular, un homeomorfismo es un caso de equivalencia homotópica, pero hay muchos ejemplos de equivalencia homotópica que no son homeomorfismos.

4.3.3. *No-equivalencia de la esfera y el disco.* Más arriba se ha comentado la diferencia entre la circunferencia $\mathbb{S}^1$ y el disco $\mathbb{D}^2$ (sólido contractible a un punto). En términos de caminos cerrados construidos sobre el espacio, cualquier camino cerrado sobre $\mathbb{S}^1$ es no-contractible, mientras que cualquier camino cerrado sobre $\mathbb{D}^2$ es contractible a un punto. El argumento se puede extender a dimensión arbitraria usando grupos de homotopía de orden superior cuya construcción es algo sofisticada y se aborda más adelante. Pero también se puede abordar en el marco de los grupos de homología asociados a estructuras simpliciales superpuestas; admitamos que

- $H_i(\mathbb{D}^n) = 0$ para cualquier $i > 0$ (plausible pues $\mathbb{D}^n$ es contractible a un punto).

- $H_n(\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{Z}$ y nulo para $i \leq n-1$ (plausible pues es el único elemento que no se puede contraer debido a que acota un agujero en su interior).

Si $i : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{D}^n$ denota la inclusión, entonces la composición

$$\mathbb{S}^{n-1} \ \to \ \mathbb{D}^n \ \to \ \mathbb{S}^{n-1}$$

es la identidad. El cálculo de la homología se puede interpretar como un funtor que a una colección de objetos le asocia los grupos de homología

$$H_n(\mathbb{S}^{n-1};\mathbb{Z}) \to H_n(\mathbb{D}^n;\mathbb{Z}) \to H_n(\mathbb{S}^{n-1};\mathbb{Z})$$

cuya composición debería dar el homomorfismo identidad sobre $H_n(\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{Z}$. Como $H_n(\mathbb{D}^n) = 0$, tomando la n-ésima homología se obtiene una composición de aplicaciones lineales

$$\mathbb{Z} \ \to \ 0 \ \to \ \mathbb{Z}$$

que no puede ser equivalente al morfismo identidad sobre $\mathbb{Z}$. Por ello, el disco n-dimensional $\mathbb{D}^n$ no puede ser topológicamente equivalente a la esfera $(n-1)$-dimensional $\mathbb{S}^{n-1}$, aunque exista una retracción del disco punteado $\mathbb{D}^n - \{\underline{0}\}$ en la esfera (dada por la aplicación "norma": $\underline{x} \mapsto \underline{x}/\|\underline{x}\|$).

La construcción precedente no sólo pone de manifiesto el interés en la utilización de categorías; también muestra las sutilezas de los retractos de deformación y, sobre todo, es el ingrediente fundamental para la demostración del Teorema del Punto Fijo de Brouwer (cualquier aplicación continua definida sobre el disco $\mathbb{D}^n$ tiene un punto fijo); este teorema tiene múltiples aplicaciones desde la Meteorología hasta la identificación de equilibrios en modelos simplificados de Teoría Económica, p.e.

4.4. **Una ilustración avanzada: Hacia la Gran Unificación.** Uno de los retos más difíciles en Física Teórica desde mediados de los años cincuenta del siglo XX es la formulación de una Unificación entre los 4 tipos de interacción de fuerzas en la materia: gravitatoria, electromagnética, débil y fuerte. La dificultad del problema ya fue reconocida por Einstein en los últimos años de su vida, quien se refirió a ella como el problema de la "gran unificación".

4.4.1. *Unificando los tipos de interacción.* Es conocido que hay 4 tipos de interacción que corresponden a las fuerzas de tipo gravitatorio, electromagnética, débil y fuerte, cada una de las cuales opera en un rango diferente.

Desde el punto de vista geométrico, la unificación entre las interacciones electromagnética, débil y fuerte se realizó en los años setenta y ochenta. Esta unificación recibe el nombre de *Modelo Estándar* y es consecuencia de la existencia de un mismo sistema de ecuaciones estructurales asociadas al mismo principio variacional (acción lagrangiana) que corresponde a minimizar un funcional integral en el espacio de conexiones definidas sobre un fibrado principal (aunque el grupo estructural sea diferente en cada caso).

Sin embargo, la formulación de un marco común con la interacción gravitatoria sigue resistiéndose a los intentos llevados a cabo desde entonces. Como la unificación se ha llevado a cabo en el marco cuántico, se supone que bastaría encontrar una "adecuada cuantización" de la interacción gravitatoria para demostrar la Gran Unificación

El intento más sólido desde el punto de vista físico-matemático se basa en la Teoría de Cuerdas y la Gravedad Cuántica de Lazos. Los aspectos geométricos de la Teoría de Cuerdas se abordan en el módulo 6 de mis notas sobre Geometría Algebraica. Los fundamentos de la Gravedad Cuántica de Lazos son topológicos y se comentan brevemente en los apartados siguientes.

4.4.2. *Una conexión con Categorías.* Esta teoría reposa sobre una analogía sorprendente entre Física y Topología que se pueden reformular en términos de categorías [Bae09] [21]

- Para la Teoría Cuántica se tiene la categoría $Hilb$ cuyos objetos son espacios de Hilbert (utilizados para describir sistemas físicos) y cuyos morfismos son operadores lineales (utilizados para describir procesos físicos).
- Para la Topología Diferencial se tiene la categoría $nCob$ cuyos objetos son variedades $(n-1)$-dimensionales (utilizados para describir el espacio en el que tienen lugar las interacciones) y cuyos morfismos son los cobordismos nD (utilizados para describir el espacio-tiempo que incluye el rango de las interacciones).

4.4.3. *Incorporando el cobordismo.* Tradicionalmente se ha pensado que la categoría Set de conjuntos es apropiada para representar los procesos cuánticos como funciones de un conjunto de estados en otro. La propuesta formulada en [Bae09] consiste en utilizar la categoría $nCob$ en lugar de Set para recomponer un espacio-tiempo entre espacios de una unidad menos como ocurre con las variedades cobordantes; se dice que X, Y son variedades cobordantes si existe una variedad Z tal que $\partial Z = X \cup Y$; la cintura y el borde inferior de unos pantalones es el ejemplo más simple de variedades cobordantes.

Es importante desarrollar métodos que permitan conectar unas variedades con otras mediante "familias" de soluciones asociadas a distribuciones de campos vectoriales ó formas diferenciales; actualmente carecemos de una metodología similar constructiva para la categoría C^0 (para el caso C^ω los problemas son de prolongación analítica en presencia de bifurcaciones).

4.4.4. *Una conexión con diagramas de Feynman.* Esta propuesta está alineada con la representación de procesos mediante diagramas de Feynman (entidades topológicas que describen operadores lineales sobre espacios curvados); estos diagramas de Feynman vendrían a ser el "esqueleto" (formalmente y en términos topológicos, un retracto de deformación) de las variedades cobordantes que se "pegan" en el marco de la Topología Diferencial. Según[Bae09],

- la Teoría de Cuerdas utiliza cobordismos $2D$ equipados con una estructura extra (string worldsheets) para representar procesos mediante operadores lineales;

[21] J.C.Baez and M.Stay: "Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone", preprint disponible en Internet, 2009.

- la Gravedad Cuántica de Lazos utiliza generalizaciones $2D$ de diagramas de Feynman llamadas "spin foams" [Bae00] [22];
- la Teoría Cuántica de Campos utiliza cobordismos de dimensión superior [Bae95] [23].

En cada uno de los casos descritos, los procesos se representan mediante morfismos en una clase especial de categorías etiquetada como "categoría monoidal simétrica compacta".

[22] J. Baez: "An introduction to spin foam models of quantum gravity and BF theory", in H. Gausterer and H. Grosse (eds): *Geometry and Quantum Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 2000, pp. 25-93. Also available at arXiv:gr-qc/9905087.

[23] J. Baez and J. Dolan: "Higher-dimensional algebra and topological quantum Field theory", *Jour. Math. Phys.* 36 (1995), 6073-6105. Also available as arXiv:q-alg/9503002.