

A125 Grupos de Lie Clásicos

Javier Finat

Índice

0.1.	Introduction	2
0.1.1.	Invariantes diferenciales	2
0.1.2.	Hacia un tratamiento unificado de las ODEs	3
0.1.3.	Propagación casi-homogénea	4
0.2.	Outline of the chapter	5
0.2.1.	Methodological issues	5
0.2.2.	Some applications	6
0.3.	Basic references	7
1.	Nociones básicas de grupos de Lie	8
1.1.	Grupos y morfismos de grupos topológicos	9
1.1.1.	Noción de grupos de clase C^r	9
1.1.2.	Morfismos de grupos de Lie	10
1.1.3.	Comentarios y Ejemplos	11
1.1.4.	Apéndice: Subgrupos de Lie	12
1.2.	Descripción de Grupos Clásicos	13
1.2.1.	Subgrupos básicos	13
1.2.2.	Subgrupos clásicos obtenidos como intersección	14
1.2.3.	Grupos asociados a geometrías lineales	15
1.2.4.	Algunas Propiedades Conjuntistas interesantes	16
1.3.	Estructura Localmente Euclídea de los Grupos Clásicos	18
1.3.1.	La aplicación Exponencial. Propiedades	18
1.3.2.	Grupos uniparamétricos como grupos de Lie	19
1.3.3.	Campos Vectoriales Invariantes sobre un Grupo de Lie	20
1.3.4.	Relación con Geometría Diferencial Local de Curvas	21
1.4.	Complementos sobre la Topología de los Grupos de Lie	22
1.4.1.	Compacidad para grupos de Lie	22
1.4.2.	Conexividad para grupos de Lie	23
1.4.3.	Descripción topológica local	24
1.4.4.	Estructura diferenciable sobre grupos. Unicidad	24
2.	Estructuras Diferenciables sobre grupos	26
2.1.	El Grupo Ortogonal	26
2.1.1.	Descripción como subvariedad	26
2.1.2.	Extensión a otros grupos	27
2.1.3.	El grupo pseudo-ortogonal	28
2.1.4.	Geometría de Lorentz	28

2.2.	Espacios tangentes de otros grupos clásicos	29
2.2.1.	El espacio tangente $T_l GL(m; \mathbb{R})$	29
2.2.2.	El espacio tangente $T_l SL(m; \mathbb{R})$	29
2.2.3.	El espacio tangente $T_l O(m; \mathbb{R})$	30
2.2.4.	El espacio tangente $T_l Sp(m)$	31
2.3.	Homomorfismos e isomorfismos entre grupos de Lie	31
2.3.1.	Homomorfismo entre grupos de Lie	31
2.3.2.	Isomorfismo entre grupos de Lie	31
2.3.3.	Un ejemplo significativo	32
2.4.	El espacio recubridor del grupo de rotaciones	33
2.4.1.	Relación con el grupo de Moebius	33
2.4.2.	Reinterpretando las transformaciones conformes	34
2.4.3.	El grupo unitario como recubridor universal	34
3.	Álgebras de Lie	36
3.1.	Definiciones y Ejemplos	37
3.1.1.	Variedad paralelizable	37
3.1.2.	Ejemplos	37
3.1.3.	Paralelizabilidad de grupos de Lie	38
3.1.4.	Caracterización local de morfismos	38
3.2.	Álgebras de Lie. Nociones básicas	38
3.2.1.	Corchete de Lie	39
3.2.2.	Morfismos entre álgebras de Lie	39
3.2.3.	Algunas propiedades básicas	40
3.2.4.	Constantes de Estructura	40
3.3.	Ejemplos y Observaciones	41
3.3.1.	Álgebra Especial Ortogonal	41
3.3.2.	Álgebra Unitaria especial	41
3.3.3.	Rotaciones y Rotaciones Infinitesimales	41
3.3.4.	Transformaciones euclídeas infinitesimales	43
3.4.	Derivaciones del Grupo	44
3.4.1.	Subgrupos uniparamétricos	44
3.4.2.	Campos invariantes a un lado	44
3.4.3.	El álgebra de las derivaciones	45
3.4.4.	El álgebra envolvente	45
4.	Una introducción a la Teoría de Representación	46
4.1.	La Representación adjunta	46
4.1.1.	Algunos resultados básicos	46
4.1.2.	La representación adjunta y las derivaciones	46
4.1.3.	La representación adjunta de $SO(n)$	47
4.1.4.	La representación adjunta de $E(n)$	47
4.2.	Una aproximación a Representaciones de Álgebras de Lie	48
4.2.1.	Nociones básicas	49
4.2.2.	Una introducción a la geometría de la aplicación momento	49
4.2.3.	Algunas aplicaciones a Mecánica de Medios Continuos	50
4.3.	La forma de Killing	50
4.3.1.	Nociones básicas	50

4.3.2.	Descripción infinitesimal	50
4.4.	Sobre el Problema de Clasificación de Algebras de Lie	51
4.4.1.	Nociones básicas	51
4.4.2.	Etapas de la clasificación algebraica	52
5.	Complementos	53
5.1.	Algunos desarrollos adicionales	53
5.1.1.	Una aproximación algebraica a aspectos topológicos	53
5.1.2.	Elementos de la Teoría de Representación	53
5.1.3.	Transformaciones Activas y Pasivas de Coordenadas	55
5.1.4.	Un ejemplo básico de Fibrado Principal	56
5.2.	Ejercicios	58
5.2.1.	El grupo ortogonal	58
5.2.2.	El grupo especial ortogonal	58
5.2.3.	Algunos resultados básicos de álgebras de Lie	59
5.2.4.	Isomorfismos entre grupos y álgebras de Lie	59
5.2.5.	Espacios recubridores de grupos de Lie	60
5.2.6.	Constantes de estructura de álgebras de Lie	60
5.2.7.	Topología local de grupos de Lie	60
5.2.8.	Derivaciones sobre álgebras de Lie	61
5.3.	Prácticas	62
5.3.1.	Práctica: Elementos de Mecánica Hamiltoniana Equivariante	62
5.3.2.	Una nota sobre el grupo simpléctico y polinomios cuadráticos invariantes	63
5.3.3.	Práctica sobre Cuaterniones (enfoque homogéneo)	66
5.4.	References	69
5.4.1.	Referencias para grupos y álgebras de Lie	70
5.4.2.	Tópicos avanzados	70
5.4.3.	Aplicaciones a otras áreas	71

0.1. Introduction

La Teoría de Grupos y Álgebras de Lie utiliza elementos procedentes de Álgebra, Geometría y Topología para estudiar propiedades locales de espacios que presenten algún tipo de simetrías en el entorno de puntos. Los Grupos de Lie G utilizan simetrías ordinarias, mientras que las álgebras de Lie $\mathfrak{g} := T_e G$ utilizan simetrías infinitesimales (asociadas a trayectorias, p.e.). Inicialmente surgen para estudiar y clasificar las soluciones de Ecuaciones Diferenciales, pero proporcionan herramientas fundamentales para el estudio de variedades, espacios de funciones o sistemas dinámicos, así como sus aplicaciones a los terrenos más diversos. Por ello, ocupan un puesto privilegiado en el que se encuentran diferentes áreas de las Matemáticas.

Por el tipo de herramientas utilizadas, la Teoría de Grupos y Álgebras de Lie es la continuación natural de la unificación de las Geometrías Lineales llevado a cabo por F.Klein en su Programa de Erlangen (1873). Según el enfoque de Klein, cada Geometría Clásica está caracterizada por la conservación de una “cantidad” (una forma cuadrática o una bilineal, inicialmente) y recíprocamente. La “cantidad invariante” se representa de diferentes formas (dependiendo del sistema de referencia) y su variabilidad se expresa mediante un “campo”; como es habitual, el campo puede ser escalar, vectorial o tensorial (según un orden creciente de complejidad).

0.1.1. Invariantes diferenciales

Según el Programa de Erlangen (F.Klein, 1873), la “invariancia de una cantidad geométrica” se expresa en términos de la acción de un grupo o de un álgebra y su “traslación” implica inicialmente la necesidad de contar con alguna herramienta de “diferenciación” que permita expresar su variabilidad en el espacio ambiente. Los grupos de Lie matriciales proporcionan la herramienta diferencial (Lie, Cartan).

El enfoque diferencial permite extender a variedades o espacios de funciones la aproximación algebraica inicial de Klein diseñada sobre espacios de dimensión finita. La identificación de una C^r -estructura sobre el grupo (que luego se revela como esencialmente única) permite extender el enfoque algebraico inicial, incorporando los elementos de análisis diferencial e integral en el contexto de variedades ó, con más generalidad, de espacios de funciones.

Con más generalidad, la invariancia puede afectar a las soluciones de distribuciones de campos, o sistemas de operadores definidos sobre variedades (de interés en Mecánica Analítica), o con más generalidad a operadores (integró)diferenciales definidos sobre espacios de funciones (de interés en Mecánica cuántica). Por ello, la identificación de invariantes diferenciales por la acción de un grupo de Lie G

La extensión de este enfoque al caso infinito-dimensional fue llevada a cabo por Emmy Noether en relación con problemas de tipo variacional. Esta exten-

sión presenta una dificultad bastante mayor que el enfoque original vinculado a ODEs pues el álgebra de Lie de las simetrías infinitesimales está vinculado a deformaciones del que so cuya dimensión no está acotada. Una estrategia básica consiste en tratar de reducir PDEs a ODEs. Lamentablemente, esta estrategia de reducción rara vez es aplicable.

En cualquier caso, el enfoque de E.Noether es la continuación natural del programa original de Lie. Una de las ramificaciones de esta extensión es la Teoría Diferencial de Invariantes como extensión de la Teoría Geométrica de Invariantes;. Ambas Teorías son tópicos avanzados de Topología Diferencial que se abordan en el módulo A_{44} (Singular map germs) de la materia A_4 (Differential Topology).

Los desarrollos basado en transformaciones infinitesimales asociadas a principios de tipo variacional se han utilizado desde los años sesenta para el estudio de las simetrías de funcionales integrales de acción (ver módulo A_{15} para más detalles). Los “ejemplos” clásicos corresponden a la minimización de funciones de longitud (geodésicas), área (superficies minimales) ó Energía (Euler-Lagrange). Más recientemente se ha incorporado el funcional de curvatura (Yang-Mills) asociado los diferentes tipos de interacción que aparecen en el modelo estándar (unificación de las interacciones electromagnética, débil y fuerte) en Mecánica Cuántica.. Estos tópicos se abordan en el módulo A_{42} (Fiber Bundles) de la materia A_4 (Differential topology) donde se pueden encontrar más detalles.

0.1.2. Hacia un tratamiento unificado de las ODEs

El *objetivo original* de S.Lie era la unificación de métodos para resolver EDO o EDP utilizando “simetrías infinitesimales” asociada a campos. La integración de estos campos proporcionara soluciones genéricas mediante transformaciones elementales controladas por grupos de una solución particular ¹.

La recuperación una solución general a partir de una particular por la acción de un grupo es reminiscente del enfoque de Galois para ecuaciones algebraicas. Esta idea es de una potencia formidable y aún proporciona herramientas de gran utilidad para estudiar soluciones de sistemas dinámicos (flujos, p.e.) mediante modelos de propagación asociadas a simetrías que se traducen en factores integrantes o bien para identificar direcciones a lo largo de las cuales se propagan de forma natural (por la acción de algún grupo G) las soluciones del sistema.

En general (salvo que el espacio de soluciones sea homogéneo), no podemos esperar simetrías globales para representar las soluciones de un sistema en el entorno local en un punto de una variedad o para operadores actuando sobre un espacio de funciones. En ausencia de una simetría global (que permita propagar soluciones de forma indefinida), la presencia de simetrías locales se traduce en modelos localmente isótropos; los fenómenos de bifurcación se estudian asimismo

¹ Un caso particularmente simple corresponde a las EDO de primer orden cuando se expresa una solución particular más un constante que representa la acción del grupo de traslaciones

en términos de *ruptura de simetrías* que pueden presentarse de forma continua ó discreta controlada por relaciones de adyacencia entre subgrupos.

Las *relaciones de adyacencia* se representan globalmente de forma simbólica mediante grafos cuyos nodos representan subgrupos y cuyas aristas representan relaciones de inclusión. Estos grafos permiten visualizar los subgrupos como un conjunto parcialmente ordenado (poset) que es equivalente a una representación de las geometrías asociadas a las acciones de grupos. En este capítulo sólo se considera el caso continuo de dimensión finita asociado a grupos de Lie. Los subgrupos discretos de grupos clásicos tienen asimismo interés en la clasificación de singularidades de funciones que se aborda en los módulos 3 y 4 de Topología Diferencial. No consideraremos otras aplicaciones de la ruptura de simetrías relacionadas con la Mecánica Cuántica (módulo 7) o con la Robótica de la locomoción (ver módulos y 6 del Curso de Robótica).

0.1.3. Propagación casi-homogénea

Más recientemente, un gran número de propiedades (incluyendo fenómenos de propagación) locales ó globales se expresan algebraicamente mediante la acción $G \times X \rightarrow X$ de algún grupo G sobre un espacio topológico soporte X . La existencia de un entorno homogéneo ó de una órbita $G * x$ densa simplifica el análisis de la “homogeneidad”. Este análisis conduce de forma natural a imponer C^r -estructuras sobre el grupo G que sean compatibles con la topología del espacio soporte X sobre el que actúan. Las C^r -estructuras adicionales que consideramos más frecuentemente sobre un grupo G que actúa sobre un C^r -espacio X son de tipo algebraico, analítico ó diferenciable.

En general, sólo se dispone de una estructura dada por “paquetes de órbitas” (orbifolds) con diferentes modelos de propagación. La existencia de estas estructuras adicionales permite dotar a los cocientes topológicos X/G de una estructura de C^r -espacio, simplificando el análisis de las propiedades del espacio original X . Este enfoque se aplica tanto al caso de variedades topológicas finito-dimensionales como al caso de espacios de funciones sobre los actúan (pseudo)grupos de C^r -equivalencias.

Actualmente, existe un gran número de problemas abiertos para describir variedades o espacios de funciones como “paquetes de órbitas” por la acción algebraica (resp. infinitesimal) de grupos (resp. álgebras) de Lie. Los casos más interesantes para *variedades* corresponden a las dimensiones 3 y 4 (ver el módulo 5 de Topología Diferencial para una introducción). Los casos más interesantes para *espacios de funciones* están relacionados con la clasificación de gérmenes de aplicaciones (módulo 4 de TopDif) y de sistemas dinámicos (módulo 6). Algunas aplicaciones recientes de este enfoque están relacionadas con la Dinámica Computacional de Fluidos, la gestión de “caracteres” (avatares) en Animación² ó el módulo B_{16} (Visualización Avanzad) para una introducción).

² ver el módulo B_{44} (Animation and Simulation) de la materia A_4 (Computer Graphics)

0.2. Outline of the chapter

Además de esta introducción y una sección de Complementos (Conclusiones, Prácticas, Retos, Referencias), este capítulo tiene 4 secciones etiquetadas como

1. En la primera sección se presentan los grupos clásicos como “ejemplos relevantes” de grupos de Lie; la presentación tiene un carácter descriptivo con comentarios caso por caso, que es complementario del enfoque algebraico al estilo de Warner u otros manuales similares y que sólo se mencionan (sin demostración de resultados en la última subsección).
2. En la segunda sección se describe la estructura diferenciable de los grupos presentados en la primera sección usando las propiedades de morfismos (sobre todo submersiones) que se ha desarrollado en la segunda parte del capítulo anterior; se describen de forma explícita los espacios tangente en el elemento neutro a los grupos más utilizados en el curso.
3. En la tercera sección se muestran propiedades de las álgebras de Lie superpuestas a los espacios tangentes descritos en la sección anterior.
4. La sección cuarta está dedicada a presentar algunos rudimentos de la Teoría de Representación que son relevantes para comprender algunas aplicaciones, especialmente las relacionadas con las interacciones del modelo estándar.

0.2.1. Methodological issues

En el primer capítulo de este módulo 2 se ha centrado la atención en las estructuras más simples (fibrados como productos localmente lineales) que se pueden superponer a los objetos básicos (variedades diferenciables inicialmente, aunque el formalismo se extiende a cualquier tipo de variedades). La comparación entre estructuras se realiza usando morfismos, es decir, pares de aplicaciones entre estructuras y variedades bases, para las que, inicialmente, se impone la condición de hacer conmutativos los diagramas correspondientes al cambio de espacio base ³.

Las “buenas propiedades” de dichos morfismos permiten construir subvariedades añadiendo condiciones simples de verificar sobre los espacios base. Una cuestión que surge de forma natural es la siguiente: ¿Es posible generar variedades o morfismos mediante acciones (locales o globales) de grupos o, en su versión infinitesimal, de álgebras?

En este capítulo concentramos la atención en el estudio de las propiedades más básicas de grupos de Lie dados por grupos de matrices con estructura diferenciable que actúan sobre variedades de clase C^∞ . Buena parte de las propiedades que mostraremos se extienden a otros tipos de C^r -grupos y a otros

³ El enfoque basado en morfismos se etiqueta como “relativo” y es el predominante en GAGA

tipos de C^r -variedades (algebraicas ó analíticas) e incluso al caso discreto. No obstante, para fijar ideas nos restringiremos a la categoría C^∞ . Las aplicaciones básicas más importantes conciernen a la estructura de espacios homogéneos.

Otras aplicaciones más avanzadas están relacionadas con espacios localmente simétricos (de gran interés en Robótica y Visión Computacional), las teorías de unificación para los diferentes tipos de interacciones en Física-Matemática (que desarrollaremos con más detalle en el módulo A_{17}) ó fenómenos de bifurcación equivariante para sistemas dinámicos (cuyas componentes topológicas se abordan en el módulo A_{46} (Dynamical Systems) de A_4 (Differential Topology)).

0.2.2. Some applications

En esta materia A_1 se desarrollan sobre todo aplicaciones a Física Teórica que están relacionadas con las GUT (Theories of Great Unification). El objetivo de las GUT está relacionado con la unificación entre las interacciones

- Gravitatoria con el grupo de Lorentz $SO(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^3$ como grupo estructural;
- Electromagnética con el grupo unitario $U(1)$ como grupo estructural;
- Débil (fuera del núcleo) con el grupo especial unitario $SU(2)$ como grupo estructural; y
- Fuerte (dentro del núcleo) con el grupo especial unitario $SU(3)$ como grupo estructural.

Las tres últimas corresponden al *Modelo Estándar* en Mecánica Cuántica cuyo grupo estructural ambiente es el producto $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ de grupos clásicos de Lie compactos. Aún no se ha conseguido unificar el modelo estándar con (una cuantización de) la interacción gravitatoria. El candidato más satisfactorio desde el punto de vista matemático es la teoría de supercuerdas, para la que se ha desarrollado una teoría de supergrupos (incluyendo ruptura y captura de simetrías) y las correspondientes super-variedades⁴

La comprensión de estos tópicos requiere elementos más avanzados de Topología Diferencial que se desarrollan en el módulo A_{42} . Por ello, en esta materia nos limitamos a cuestiones más básicas relacionadas con aspectos básicos de la Mecánica Analítica en su formulación diferencial (Hamilton-Jacobi) y a cada una de las interacciones por separado, introduciendo las nociones básicas de Relatividad y Mecánica Cuántica cuando correspondan.

Las aplicaciones a diferentes áreas de Ingeniería se presentan en la parte II de estas notas, con especial atención a la Mecánica Computacional de Medios Continuos B_1 , Visión Computacional B_2 , Robótica B_3 e Informática Gráfica B_4 . Las aplicaciones a otras áreas de Química-Física, Cristalografía o Diseño Molecular están dispersas en varios de los módulos que se acaban de mencionar.

⁴ Para una introducción ver el capítulo 4 del módulo A_{24} (Geometric Topology) de la materia A_2 (Algebraic and Geometric Topology).

Las aplicaciones a Teoría Económica aparecen en los últimos capítulos de cada uno de los módulos de esta materia.

0.3. Basic references

Sólo se incluyen algunos de los libros de texto más usuales relacionados con el enfoque desarrollado a lo largo del capítulo. Una relación más completa se puede ver en la subsección §5.4 de este capítulo.

[Bum04] D. Bump: *Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 225, Springer, New York, 2004

[Bro85] T. Bröcker, T. tom Dieck : *Representations of Compact Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 98, Springer, New York, 1985.

[Hal03] B.Hall: *Lie Groups, Lie algebras and Representations*, GTM, Springer-Verlag, 2003.

[Mne86] R.Mneimné, et F.Testard : *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann eds, Coll. Méthodes, 1986. [Ser77] J.-P. Serre : *Linear representations of finite groups*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977

[Ser92] J.-P. Serre : *Lie algebras and Lie groups*, 1964 lectures given at Harvard University, Second edition. LNM 1500. Springer-Verlag, Berlin, 1992

[War83] F. Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

1. Nociones básicas de grupos de Lie

En esta sección se presentan algunas nociones básicas de carácter topológico y algebraico sobre grupos de Lie G que proporcionan soporte a todos los grupos clásicos que constituyen el núcleo central del capítulo. El enfoque adoptado es de tipo algebraico, a diferencia del predominante en la sección siguiente donde se adopta un enfoque diferencial asociado a la acción infinitesimal del álgebra de Lie $\mathfrak{g} := T_e G$.

Los casos más interesantes en *Geometría* corresponden a la acción de *grupos de dimensión finita* para $r = \infty$ (caso diferenciable), $r = \omega$ (caso analítico) y $r = \text{alg}$ (caso algebraico). La Teoría Topológica y Algebraica de Grupos de Lie proporciona soporte común a todas ellas. En esta asignatura estamos interesados sobre todo en el caso $r = \infty$ en cuyo caso se habla simplemente de grupos de Lie. Otros casos de interés en Álgebra afectan a la acción de grupos discretos (habitualmente finitos) que no se consideran aquí.⁵

En *Topología Diferencial* tiene interés estudiar la acción de *grupos infinito-dimensionales* que son subgrupos del grupo de los Homeomorfismos de Variedades que conservan algún tipo de estructura (diferenciable, algebraica, analítica), ó bien alguna forma cuadrática o multilineal. La estrategia habitual consiste en linealizar el problema, pasando a la acción del álgebra de Lie sobre el espacio tangente a una $\mathcal{B}$ -órbita de (el germen de) una aplicación $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$. Este caso presenta una dificultad mucho mayor y se aborda en los módulos 3 y 4 del Curso de Topología Diferencial.

Debido a la falta de tiempo y al carácter muy específico (que afecta a grupos topológicos, sobre todo), algunos resultados clave se presentan sin demostración. Un ejemplo típico es el Teorema del Subgrupo (llamado también Tercer Teorema de Lie) que permite caracterizar como subgrupos de Lie a los subgrupos cerrados de un grupo de Lie. Una consecuencia del Teorema del Subgrupo (presentado más arriba) y de la caracterización de variedades como imágenes recíprocas de subvariedades regulares muestra que los $O(n)$, $SL(n; \mathbb{R})$ y $SO(n; \mathbb{R})$ son subgrupos de Lie cerrados.

La primera subsección está dedicada a presentar las definiciones básicas y las descripciones de los grupos clásicos como subgrupos del grupo lineal general que conservan alguna forma cuadrática o alguna forma bilineal no-degenerada. En la segunda subsección se presentan los cálculos explícitos relativos al espacio tangente al grupo en la matriz identidad (elemento neutro para la multiplicación). La tercera recupera la estructura localmente euclídea que permite trasladar el cálculo diferencial e integral bien conocidos del Análisis de Funciones de varias variables (reales o complejas). La última subsección presenta algunos resultados topológicos de interés para un tratamiento abstracto más general de los grupos de Lie que, por falta de tiempo, tampoco se desarrolla en este Curso.⁶

⁵ Para algunas aplicaciones relacionadas con Singularidades de Funciones ver el módulo 3 de Topología Diferencial

⁶ Para detalles topológicos ver el libro de Pontrjagin o bien [Oni90], [Kir04]

1.1. Grupos y morfismos de grupos topológicos

En esta subsección se introducen las nociones básicas de grupo de Lie y morfismos de grupos de Lie. Además del carácter funtorial (común a todas las geometrías), los conceptos introducidos son relevantes para cuestiones topológicas (espacios recubridores de grupos) y en Teoría de Representación (ver última sección del capítulo). El formalismo para grupos es muy similar al de álgebras, pero para fijar ideas, sólo consideramos grupos y nos restringimos inicialmente al caso finito-dimensional.

1.1.1. Noción de grupos de clase C^r

Definición.- Diremos que G es un *grupo topológico* si es un espacio Hausdorff, es un grupo algebraico y la composición $G \times G \rightarrow G \mid (g, h) \mapsto gh^{-1}$ es continua.

Ejercicio.- Dado un grupo topológico G , se definen la *traslación a la derecha* $R : G \rightarrow G \mid R_a := ba$ y la *traslación a la izquierda* $L : G \rightarrow G \mid L_a := ab$. Razona por que ambas son bicontinuas.

Nota.- Esta construcción se extiende a acciones de grupos sobre espacios. Tiene gran interés para la clasificación de gérmenes de aplicaciones $f \in C^r(n, p)$ que se desarrolla en los módulos 2 y 3 de Topología Diferencial, denotándose la acción izquierda-derecha mediante kfh^{-1} que es una extensión al caso topológico de la doble acción de conjugación KMH^{-1} de $GL(p) \times GL(n)$ sobre las $p \times n$ -matrices M que representan las aplicaciones lineales $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$.

Definición.- Diremos que G es un *grupo de clase C^r* si es un grupo topológico con una estructura de C^r -variedad, es decir, tal que la aplicación $G \times G \rightarrow G$ dada por la asignación (g_1, g_2) le lleva en $g_1g_2^{-1}$ es de clase C^r .

Ejemplo básico.- Cualquier espacio vectorial finito-dimensional es un grupo de Lie conexo.

La conexividad es muy importante, pues permite conectar mediante acciones de grupos (representadas por producto de matrices en el caso de grupos matriciales) el “desplazamiento” o la realización de caminos en el espacio ambiente. Algunos de los grupos de Lie más relevantes son no-conexos:

- El grupo lineal general $GL(n; \mathbb{R})$ correspondiente a los automorfismos de un espacio vectorial n -dimensional V sobre el cuerpo real $\mathbb{R}$ tiene 2 componentes conexas que denotamos mediante $GL^+(n; \mathbb{R})$ y $GL^-(n; \mathbb{R})$ según que su determinante sea positivo o negativo; la primera componente es la componente conexa de la matriz identidad I_n y se denota en general mediante G^e (componente conexa del elemento neutro $e \in G$).
- Cualquier grupo de Lie discreto es un grupo de Lie desconectado y, en particular, 0-dimensional. Algunos de los más sencillos son grupos de permutaciones, raíces de la unidad ó simetrías discretas (en espacios euclídeos

o hiperbólicos), p.e. Su aplicación al estudio de funciones o de sistemas dinámicos permite estudiar gran número de problemas relacionados con cuestiones de ramificación, bifurcación ó fenómenos de propagación anisótropa.

La representación de grupos finitos o discretos sobre espacios vectoriales mediante aplicaciones en $\text{Aut}(V)$ permite visualizar propiedades geométricas de dichos grupos. Un ejemplo típico sencillo corresponde a las raíces de la unidad de $z^k = 1$ que se representan como giros de ángulo $2\pi/k$ de uso común en Álgebra Básica y en Funciones Analíticas de una Variable Compleja. Otros ejemplos relativos a representaciones de las permutaciones mediante matrices son bien conocidos del Álgebra Básica.

Una presentación más sistemática a la Topología de Grupos de Lie se presenta en la última subsección.

Ejercicio.- Comprueba que la definición de grupo de Lie para un grupo topológico G es equivalente a que las aplicaciones $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ y $g g^{-1}$ sean de clase C^r .

1.1.2. Morfismos de grupos de Lie

Llamamos *morfismo de grupos de Lie* a cualquier aplicación $\phi : G \rightarrow G'$ de clase C^∞ que sea un homomorfismo de grupos, es decir ϕ es compatible con las leyes de grupo definidas sobre los grupos de partida y llegada:

$$\varphi(g_1 *_G g_2) = \varphi(g_1) *_G \varphi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

Para fijar ideas, visualiza el grupo S_n de las permutaciones de n elementos en términos matriciales; en este caso, la composición de permutaciones se representa como el producto de las matrices que las representan. *Ejercicio.-* Compruébalo para $n = 3$ y extiende esta observación al grupo alternado.

El producto de grupos de Lie es un grupo de Lie, pero el cociente no tiene por qué ser siquiera un grupo (de entrada es necesario que el denominador sea un subgrupo normal. La relación entre productos y morfismos de grupos de Lie es bastante sutil, tal y como muestra el ejercicio siguiente:

Ejercicio.- Demuestra que la aplicación $\mu : G \times G \rightarrow G$ es un homomorfismo de grupos si y sólo si el grupo G es abeliano.

Las propiedades habituales de morfismo de grupos (inyectividad, suprayectividad, biyectividad) se extienden de forma natural a morfismos de grupos de Lie. En particular, diremos que ϕ es un *isomorfismo de grupos de Lie*, si es un homomorfismo biyectivo entre grupos de Lie con inversa de clase C^∞ .

Cuando el grupo de llegada G' es el grupo lineal general $GL(n; \mathbb{K})$ para algún n se dice entonces que el morfismo $\varphi : G \rightarrow GL(n; \mathbb{K})$ es una *representación lineal* del grupo G . Diremos que una representación lineal φ es *fiel* si φ es inyectiva, es decir, $\text{Ker}(\varphi) = e_G$ donde e_G es el elemento neutro de G .

Ejercicio. - Muestra una representación lineal del grupo de las permutaciones de n letras en $GL(n; \mathbb{K})$ que sea fiel y tenga dimensión mínima.

1.1.3. Comentarios y Ejemplos

1. La componente conexa G^e del elemento neutro $e \in G$ es un subgrupo de Lie *cerrado* de G . Las componentes conexas de G son difeomorfas (¿cuál es la componente conexa de la identidad en $GL(m; \mathbb{R})$?). Por ello, el cociente G/G^e es un conjunto *discreto* que parametriza el conjunto de componentes conexas de G .
2. El grupo de traslaciones en un espacio euclídeo es un grupo de Lie.
3. El grupo de unidades $\mathbb{K}^*$ es un grupo de Lie (respecto a la multiplicación).
4. Si H es un subgrupo *normal cerrado* de un grupo de Lie G , entonces G/H es un grupo de Lie. En este caso $P(G/H, H)$ es un fibrado principal sobre G/H con grupo estructural H .
5. El grupo $\mathbb{S}_{\mathbb{K}}^1 := \{z \in \mathbb{K} \mid \|z\| = 1\}$ es un grupo de Lie cuando $\mathbb{K}$ es el cuerpo de los reales ó de los complejos ó bien el álgebra de los cuaterniones.
6. Si G y H son grupos de Lie, entonces $G \times H$ es un grupo de Lie. En particular, el toro m -dimensional $\mathbf{T}^m := \mathbb{S}^1 \times \dots^m \times \mathbb{S}^1$ es un grupo de Lie m -dimensional compacto conexo conmutativo.
7. La aplicación $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por la asignación $t \mapsto e^{2\pi it}$ define un isomorfismo entre grupos de Lie.
8. Sea V un espacio vectorial n -dimensional sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ó $\mathbf{H}$, donde representamos al álgebra $\mathbf{H}$ de los cuaterniones mediante

$$\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) \right\}$$

Entonces $GL(n; \mathbb{K}) := Aut_{\mathbb{K}}(V)$ es un grupo de Lie, es decir, la aplicación

$$GL(n; \mathbb{K}) \times GL(n; \mathbb{K}) \rightarrow GL(n; \mathbb{K}) \mid (A, B) \mapsto A.B$$

es de clase C^∞ . Esta condición “se comporta bien” por restricción y da la estructura de grupo de Lie para cada uno de los grupos clásicos que describimos en el número siguiente. Más abajo veremos un procedimiento topológico alternativo para mostrar la estructura como variedad diferenciable, sin usar cartas coordenadas locales.

1.1.4. Apéndice: Subgrupos de Lie

Este apartado se puede saltar en primera lectura, pues tiene un carácter más avanzado que el resto de la sección; se incluye sólo a título informativo y se desarrolla con más detalle en el curso sobre Grupos y Álgebras de Lie (Seminario con J.Güemes). Una cuestión natural es preguntarse cuándo un subgrupo H de un grupo de Lie G es un subgrupo de Lie, es decir, cuándo es una C^r -subvariedad. El siguiente resultado da la respuesta:

Teorema del subgrupo.- Un subgrupo abstracto H de un grupo de Lie G es una subvariedad si y sólo H es un subgrupo cerrado.

Nota.- La implicación $\Rightarrow$ es evidente. La inversa es bastante más difícil y no se demuestra aquí (Teorema de Cartan). Como consecuencia inmediata, se tiene que todos los subgrupos del grupo lineal general que consideramos en este capítulo son subgrupos de Lie.

Corolario 1.- Cualquier homomorfismo continuo $f : G \rightarrow H$ entre grupos de Lie es de clase C^∞

Demostración.- El grafo $\Gamma_f := \{(g, h) \in G \times H \mid f(g) = h\}$ de f es un subgrupo cerrado de $G \times H$. En virtud del Teorema del Subgrupo, Γ_f es una subvariedad suave. Por ello, la proyección $\pi_G|_{\Gamma_f} : \Gamma_f \rightarrow G$ sobre la primera componente es suave. Es fácil verifica que la asignación $g \in G \mapsto (g, f(g)) \in \Gamma_f$ es suave. Por ello, la aplicación $f = \pi_H \circ (\pi_G|_{\Gamma_f})$ es composición de aplicaciones suaves y por tanto, suave.

Corolario 2.- Cualquier grupo topológico tiene a lo sumo una estructura de grupo de Lie ⁷.

Nota histórica.- El Quinto Problema de Hilbert (1900) planteaba si cualquier grupo topológico que sea una variedad tiene una estructura de grupo de Lie (compatible con la estructura de variedad). Montgomery, Zippin y Gleason (1951) demostraron que cualquier grupo topológico que sea una variedad topológica, es decir, de clase C^0 admite una única estructura como grupo de Lie.

Nótese la gran diferencia que existe con los resultados que se muestran en la Topología Diferencial de Variedades según los cuales sólo existen “esencialmente” dos categorías de clase C^0 y las de clase C^∞ , pues cualquier objeto (variedad o aplicación) de clase C^r para $r \geq 1$ se “puede aproximar” por objetos de clase C^∞ que son “densos” (forman un conjunto “residual”) para la topología débil.

Ejercicio 1.- Si $\mu : G \times G \rightarrow G$ es suave, demostrar que $\iota : G \rightarrow G$ es suave (*indicación:* Utiliza el Teorema de la Función Implícita).

Ejercicio 2.- Sea G un grupo de Lie y G_e la componente conexa del elemento neutro $e \in G$. Demuestra que G_e es un subgrupo normal cerrado de G (por ello,

⁷ Nótese la diferencia con las álgebras de división en las que $\mathbb{S}^7$ admite 28 estructuras diferenciables no-equivalentes entre sí (J.Milnor, 1963)

G/H tiene estructura no sólo de espacio topológico cociente, sino también de grupo cociente como grupo de Lie).

1.2. Descripción de Grupos Clásicos

Un grupo clásico es un subgrupo del grupo lineal general $GL(n; \mathbb{K})$ correspondiente a las matrices A cuyo determinante es no-nulo. Este grupo proporciona la representación natural para los automorfismos $Aut(V_{\mathbb{K}}^n)$ de un espacio vectorial n -dimensional V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Fijada una referencia en V cualquier automorfismo se representa mediante una matriz regular, es decir, con determinante no-nulo.

Con la notación anterior, introducimos los grupos siguientes:

1.2.1. Subgrupos básicos

Grupo especial lineal

$$SL(n, \mathbb{K}) := \{A \in GL(n; \mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}$$

que conserva la “forma de volumen” representada por el determinante de una matriz.

Grupo ortogonal caracterizado por la conservación de la matriz identidad en coordenadas reales (que representa la métrica euclídea), es decir,

$$O(n) := \{A \in GL(n; \mathbb{R}) \mid {}^T A.A = I\}$$

que también se describe en términos del producto $\langle x, y \rangle := \sum x_i y_i$ como

$$O(n) := \{A \in Aut(V_{\mathbb{R}}) \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y \in V_{\mathbb{R}}\}.$$

Grupo unitario caracterizado por la conservación de la matriz identidad en coordenadas complejas (que representa la métrica hermítica), es decir,

$$U(n) := \{A \in GL(n; \mathbb{C}) \mid {}^T \bar{A}.A = I\}$$

que es conexo (verifícalo como ejercicio) y que también podemos describir en términos del producto $\langle x, y \rangle := \sum x_i \bar{y}_i$ como

$$U(n) := \{A \in Aut(V_{\mathbb{C}}) \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y \in V_{\mathbb{C}}\}.$$

Para $n = 1$ es el grupo asociado a la interacción electromagnética.

Grupo simpléctico caracterizado por la conservación del anti-automorfismo J asociado a la conjugación compleja, es decir,

$$Sp(n) := \{A \in Aut(V_{\mathbb{H}}) \mid {}^T A.J.A = J\}$$

donde, si I_n denota la $n \times n$ -matriz identidad, entonces

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in GL(2n, \mathbb{C})$$

Este grupo conserva la matriz asociada a las ecuaciones estructurales del movimiento en Mecánica Analítica Clásica.⁸

Con más generalidad, para cualquier forma bilineal $B : V \times V \rightarrow W$ sobre un espacio vectorial real W , se tiene que

$$G_B := \{A \in Aut(V) \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y \in V\}$$

es un grupo de Lie. Un ejemplo de gran interés en Relatividad Especial viene dado por

Grupo de Minkowski ubicuo en relación con fenómenos de propagación (desde D'Alembert) y sobre todo en Relatividad Especial

$$O(3, 1) := \{A \in GL(4; \mathbb{C}) \mid {}^T A \cdot g \cdot A = g\}$$

donde g es la *métrica de Minkowski* dada por $g = (dx^2 + dy^2 + dz^2) - dt^2$ con matriz diagonal $(1, 1, 1, -1)$; en muchos textos de Física se denota mediante $O(1, 3)$ con las re-interpretaciones inmediatas a para los signos. La extensión a espacios de dimensión arbitraria es inmediata y se denota mediante $O(n, 1)$ o bien mediante $O(1, n)$.

Ejercicio.- Demuestra que $O(1, 3)$ es no-compacto y que tiene 4 component conectas de acuerdo con el signo del determinante (dos posibilidades) y el signo de la entrada $(0, 0)$ (dos posibilidades). A la componente del elemento neutro (matriz identidad) se le denota en Física mediante $O_+^\uparrow(1, 3)$.

1.2.2. Subgrupos clásicos obtenidos como intersección

Los demás grupos clásicos se deducen a partir de los ya citados por operaciones algebraicas básicas. Así, p.e., tenemos:

Grupo Especial Ortogonal asociado a variedades riemannianas

$$SO(n) := SL(n; \mathbb{R}) \cap O(n) = O(n; \mathbb{R})^I$$

Para $n = 2$ ó 3 representa las rotaciones del plano o del espacio ordinario, respectivamente; en todos los demás casos, sus elementos no se pueden interpretar como rotaciones del espacio ordinario. Para $n = 4$ es un grupo no-simple (es producto de dos grupos) que está estrechamente relacionado con los cuaterniones; a principios de los noventa se decía que esta propiedad está vinculada a la existencia de estructuras diferenciables no-estándar sobre $\mathbb{R}^4$.

⁸ Ver capítulo 7 de este módulo 2 para una introducción geométrica ó [Gui83] para un tratamiento más sistemático

Grupo Especial Unitario asociado a variedades hermiticas

$$SU(n) := SL(n; \mathbb{C}) \cap U(n)$$

Es el grupo estructural para la Geometría de las Variedades Complejas. Para $n = 2$ es el grupo asociado a la interacción débil (exterior del núcleo). Para $n = 3$ es el grupo asociado a la interacción fuerte (interior del núcleo). Por ello, las representaciones de ambos grupos proporcionan información crucial para el zoo de partículas elementales.

1.2.3. Grupos asociados a geometrías lineales

Grupo lineal proyectivo.- Es el grupo estructural de la Geometría Proyectiva:

$$\mathbb{P}GL(n; \mathbb{K}) := GL(n; \mathbb{K}) / \mathbb{K}^*$$

para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}^*$ es el subgrupo cerrado normal de las $n \times n$ -matrices diagonales λI_n para $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Este grupo recibe el nombre de “homografías” en la Geometría Proyectiva Clásica.

Grupo Afín Es el grupo estructural de la Geometría Afín. Se define como el producto semidirecto del grupo lineal general $GL(n; \mathbb{K})$ por el grupo de traslaciones $\mathbb{K}^n$. Por ello, sus elementos son de la forma

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in GL(n; \mathbb{K}), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{K}^n$$

conserva el paralelismo donde $\mathbf{t}$ representa una traslación. Si $A \in SL(n; \mathbb{K})$, entonces conserva los volúmenes orientados.

Grupo Euclídeo Es el grupo estructural de la Geometría Euclídea. Se define como el producto semidirecto del grupo especial ortogonal $SO(n) = SL(n; \mathbb{R}) \cap O(n)$ por el grupo de traslaciones $\mathbb{R}^n$. Por ello, sus elementos son de la forma

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in GL(n; \mathbb{R}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

conserva longitudes (y, por consiguiente, ángulos), por lo que conserva áreas, volúmenes, etc orientados. Nótese que una transformación que conserva distancias (euclídea) conserva ángulos (conforme) y, por consiguiente, conserva áreas ó volúmenes (llamada en algunos casos equiforme), pero que el recíproco no es cierto.

En los casos de baja dimensión (es decir para $n = 2$ ó $n = 3$) la representación del grupo euclídeo mediante pares $\{\mathbf{R}, \mathbf{t}\}$ dados por una rotación $\mathbf{R}$ y una traslación $\mathbf{t}$ permite expresar la acción del grupo sobre un espacio cartesiano mediante

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{t}\}\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

(para $n \geq 4$ hay que reemplazar la rotación $\mathbf{R}$ por un elemento de $SO(n; \mathbb{R})$). Aplicando dos veces esta operación a cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\{\mathbf{R}_2, \mathbf{t}_2\}\{\mathbf{R}_1, \mathbf{t}_1\}\mathbf{x} = \mathbf{R}_2(\mathbf{R}_1\mathbf{x} + \mathbf{t}_1) + \mathbf{t}_2 = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{x} + (\mathbf{t}_2 + \mathbf{R}_2\mathbf{t}_1),$$

por lo que, la composición se escribe de forma abreviada como

$$\{\mathbf{R}_2, \mathbf{t}_2\}\{\mathbf{R}_1, \mathbf{t}_1\} = \{\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1, \mathbf{t}_2 + \mathbf{R}_2\mathbf{t}_1\}$$

donde la inversa se calcula como:

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{t}\}^{-1} = \{\mathbf{R}^{-1}, -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{t}\}$$

La caracterización del grupo euclídeo como el grupo de transformaciones que conservan la métrica euclídea está justificada por el resultado siguiente:

Ejercicio 1.- Demuestra que cualquier si una transformación arbitraria del espacio cartesiano ordinario conserva la métrica euclídea, entonces es producto de una matriz ortogonal y una traslación. *Nota.-* Este resultado justifica la descripción presentada más arriba.

Ejercicio 2.- Demuestra que cualquier inversión conserva ángulos pero no distancias (*indicación:* utiliza la representación compleja dada en términos de transformaciones fraccionarias y la fórmula de Euler).

Nota.- Como cualquier transformación conforme del plano (llamada también transformación fraccionaria o de Moebius) es composición de homotecias, traslaciones e inversiones, el ejercicio anterior demuestra que cualquier transformación conforme conserva los ángulos. Nótese que ésta es una condición más débil que la conservación de la métrica pero más fuerte que la conservación de las áreas (típica del grupo especial lineal).

Una aplicación reciente de las transformaciones conformes es la asistencia a la animación de personajes; la estimación de las transformaciones a realizar requiere elementos adicionales (Christoffel) vinculados para cada uno de los tres modelos complejos 2-dimensionales (Teorema de Uniformización). Estos tópicos se abordan en el último módulo de Informática Gráfica.

1.2.4. Algunas Propiedades Conjuntistas interesantes

- $GL(n, \mathbb{C}) \cap SO(2n; \mathbb{R}) = U(n)$.
- $GL(n, \mathbb{R}) \cap SO(2n; \mathbb{R}) = O(n; \mathbb{R})$.
- $O(n; \mathbb{R}) \hookrightarrow SO(n+1; \mathbb{R})$.
- $U(n) = GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2n; \mathbb{R}) \cap Sp(n)$ ⁹.

⁹ Esta igualdad aparentemente inocente “codifica” buena parte de la Geometría de las Variedades Kähler en Geometría Algebraica Diferencial Compleja; además se tiene que la

- *Gram-Schmid real*: $GL(n, \mathbb{R})$ es difeomorfo al producto del conjunto $D_{\mathbb{R}}$ de las matrices triangulares superiores por el grupo ortogonal $O(n; \mathbb{R})$.
- *Gram-Schmid complejo*: $GL(n, \mathbb{C})$ es difeomorfo al producto del conjunto $D_{\mathbb{C}}$ de las matrices triangulares superiores por el grupo unitario $U(n)$.
- Si $A \in O(3, 1)$, entonces $\det(A)^2 = 1$. Esto da dos posibilidades ± 1 para el valor de $\det(A)$. Por otro lado, como

$$a_{00}^2 - (a_{10}^2 + a_{20}^2 + a_{30}^2) = 1,$$

tenemos que $a_{00}^2 \geq 1$, por lo que el signo de a_{00} puede ser positivo ó negativo ¹⁰. En resumen, tenemos 4 componentes conexas para $O(3, 1)$ que representamos (siguiendo la notación usual en Gravitación) como

$$O(3, 1) = SO(3, 1)^{\uparrow} \cup \Lambda_P SO(3, 1) \cup \Lambda_T SO(3, 1)^{\uparrow} \cup \Lambda_{PT} SO(3, 1).$$

En particular, el cociente $O(3, 1)/SO(3, 1)^{\uparrow}$ tiene 4 elementos que denotamos mediante I_4 y las matrices

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \Lambda_{PT} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Por analogía con el grupo euclídeo, dado como el producto semidirecto del grupo (especial) ortogonal por el grupo de traslaciones, el *grupo de Poincaré* se define como el producto del grupo $O(n, 1)$ por el grupo de traslaciones. Por ello, es un subgrupo lineal de $GL(n+2; \mathbb{R})$

Nota.- Con más generalidad, Iwasawa demostró que si G es un grupo de Lie *conexo*, entonces G se puede descomponer en producto de un subgrupo *compacto maximal* H y un espacio topológico *contractible*, es decir, homeomorfo a un espacio euclídeo (no es elemental).

A continuación se reproduce un cuadro (tomado de Sattinger y Weaver) donde las flechas denotan las relaciones de inclusión entre los diferentes grupos clásicos

$$\begin{array}{ccccccc} & & & GL^+(2n, \mathbb{R}) & & & \\ & & & \uparrow & & & \\ GL^+(n, \mathbb{R}) & \rightarrow & GL(n, \mathbb{R}) & \rightarrow & GL(n, \mathbb{C}) & \rightarrow & GL(n, \mathbf{H}) \rightarrow GL(2n, \mathbb{C}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ SO(n) & \rightarrow & O(n) & \rightarrow & U(n) & \rightarrow & Sp(n) \rightarrow Sp(n, \mathbb{C}) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & SO(2n) & & U(2n) \end{array}$$

estructura asociada a la intersección de dos cualesquiera de los 3 grupos clásicos determina la tercera (M. Atiyah, 1978?). Este resultado es altamente no-trivial y se comenta en el módulo 7 (Unificación de interacciones) y en capítulos avanzados del Curso de Geometría Algebraica

¹⁰ La versión diferencial de esta matriz aparece asociada a la métrica de Minkowski (ver módulo 5) que juega un papel clave en relación con el operador de ondas (D'Alembert, Laplace-Beltrami) y en particular con cuestiones de Relatividad Especial (ver módulo 7)

Este diagrama pone de manifiesto las relaciones entre las diferentes geometrías clásicas en términos de las relaciones básicas entre sus grupos estructurales. De acuerdo con el Programa de Erlangen de F.Klein (1873), la descripción de una geometría equivale al estudio de las propiedades invariantes de su grupo estructural G . Las geometrías más tradicionales correspondientes a la jerarquía usual (euclídea, afín, proyectiva) se obtienen como el producto semidirecto de alguno de los grupos del diagrama con el grupo de las traslaciones ó bien como el proyectivizado de alguno de estos grupos.

1.3. Estructura Localmente Euclídea de los Grupos Clásicos

Para fijar ideas, supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Entonces, parametrizamos localmente el grupo lineal general $Aut(V_{\mathbb{R}}) = GL(n; \mathbb{R})$ como subconjunto del espacio vectorial $End(V_{\mathbb{R}}) = M(n; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ por las entradas a_{ij} de la matriz A que representa cada elemento de $Aut(V_{\mathbb{R}})$, una vez elegida una base. La norma euclídea usual definida sobre $\mathbb{R}^{n^2}$ da por restricción

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$$

Se tienen las siguientes propiedades (comprobarlas como ejercicio):

1. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
2. $\|A.B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.
3. Si $\|X\| < 1$ entonces $A = I + X \in GL(n, \mathbb{R})$ (indicación: mostrar que la serie $B = I - X + X^2 - \dots$ converge).

La última propiedad permite construir un *entorno* de la identidad I_n en $GL(n, \mathbb{R})$ mediante $\{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \|A - I\| < 1\}$. En términos coordenados, está dado por

$$x_{ij}(A) = a_{ij} - \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

La descripción de este entorno de I_n permite obtener por traslación un entorno de cualquier punto $B \in GL(n, \mathbb{R})$.

1.3.1. La aplicación Exponencial. Propiedades

Esta aplicación permite reconstruir un “pequeño” entorno del origen dado por la matriz identidad I para los grupos de matrices (para grupos más generales, el origen está representado por el elemento neutro $e \in G$). Para un entorno del “origen” suficientemente pequeño, la aplicación exponencial

$$\exp : T_e GL(n; \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n; \mathbb{R})$$

dada por la asignación

$$\exp(X) := I + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!} + \dots$$

es *convergente*; de hecho para $\|X\| < 1$. Por ello, es este caso la exponencial toma valores efectivamente en (la componente conexa de I de) $GL(n; \mathbb{R})$.

Ejercicio.- Verifica las propiedades siguientes:

- Si $XY = YX \Rightarrow \exp(X + Y) = \exp(X).\exp(Y)$. Cuando $XY \neq YX$, existe una complicada fórmula debida a Baker-Campbell-Hausdorff que relaciona ambos términos.
- Para cualquier X , se tiene que $A := \exp(X)$ es inversible y $A^{-1} = \exp(-X)$.
- Para cualquier X , $\exp({}^T X) = {}^T \exp(X)$.

Para un entorno suficientemente pequeño del origen, la aplicación exponencial es biyectiva.

1.3.2. Grupos uniparamétricos como grupos de Lie

La introducción de grupos uniparamétricos (ver §1,5,10) dados por exponenciales para el estudio de buenas parametrizaciones locales de un entorno de la identidad fue desarrollado sistemáticamente por I.Schur (1890) y J.E.Campbell (1897). La idea original se debe no obstante a S.Lie en relación con la obtención de transformaciones localmente finitas mediante la exponenciación de transformaciones infinitesimales (dadas por campos vectoriales, en la terminología más moderna de H.Weyl)

En general, la *exponencial de cualquier* $X \in \mathfrak{g}$ *toma valores en* G , cualquiera que sea el grupo de Lie G . Para demostrarlo debemos usar la descripción global del fibrado tangente a cualquier grupo de Lie G como un producto $G \times \mathfrak{g}$ (ver §2,5,17) y la descripción del álgebra de Lie $\mathfrak{g} := T_e G$ como el conjunto de campos vectoriales invariantes a la izquierda (ver §2,5,8). Tomando las exponenciales de dichos campos vectoriales, obtenemos curvas integrales de los campos que parametrizan localmente un entorno del elemento neutro, y por traslación un pequeño entorno de cualquier elemento del grupo que pertenezca a la misma componente conexa.

En el §1,5,10 se ha mostrado cómo el valor de $X_a(0) \in T_e G$ determina el valor de $X_a(\lambda)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Este resultado se globaliza de la forma siguiente: la asignación que a cada grupo uniparamétrico (conteniendo al elemento neutro) le lleva en el vector tangente $X_a(0) \in T_e G$ a la imagen (calculado en la identidad) define una aplicación biyectiva entre el conjunto de subgrupos uniparamétricos y el álgebra de Lie de los campos vectoriales (esta correspondencia se extiende al caso de subgrupos conexos, usando Frobenius; ver §2,6 para detalles).

En consecuencia, si G es un grupo de Lie de dimensión d , el conjunto de familias d -dimensionales de grupos uniparamétricos de un grupo de Lie G es igual al conjunto de *parametrizaciones locales* del grupo de Lie G . Esta descripción basada en la aplicación exponencial, permite construir un “diccionario” entre propiedades locales de grupos y de álgebras de Lie.

En particular, cuando se estudia la topología de los grupos de Lie se demuestra que cualquier grupo de Lie *conexo* G está generado por un entorno del elemento neutro $e \in G$. En virtud de este resultado, se tiene que cualquier grupo de Lie es paracompacto.

No obstante, existen algunos *inconvenientes* que limitan el alcance de este enfoque. Por un lado, se tiene que en general $e^X e^Y \neq e^{X+Y}$ (lo cual se “resuelve” con la complicada fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff). Además, la aplicación exponencial puede presentar singularidades fuera de un pequeño entorno del origen. Por último, existen elementos de la componente conexa G_e del elemento neutro e que no son alcanzables mediante subgrupos uniparamétricos que pasen por $e \in G$ (ver ejercicios).

Por todo ello, el estudio de los grupos de Lie *no se reduce* al de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. En cualquier caso, la información proporcionada por la linealización es significativa para nuestros objetivos.

1.3.3. Campos Vectoriales Invariantes sobre un Grupo de Lie

Sea $a : G \times G \rightarrow G$ la acción de un grupo G que actúa a la izquierda sobre G via traslaciones. Para cada $g \in G$ la traslación a la izquierda $a_g : G \rightarrow G$ dada por $a_g(x) := g * x$ es un difeomorfismo de G . Por tanto, la diferencial $d_x a_g : T_x G \rightarrow T_{g*x} G$ de a_g es un *isomorfismo* de espacios vectoriales. En particular, si $x = e$ obtenemos un automorfismo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G .

Definición.- Diremos que un campo vectorial $X : G \rightarrow TG$ es *invariante a la izquierda* si el diagrama obvio asociado a la diferencial de la acción es conmutativo, es decir, si $da_g(X) = X$, es decir, si

$$(da_g)(X)(x) = X(a_g(x)) = X(g * x) \quad \forall g \in G \quad \forall x \in G.$$

Un campo vectorial invariante a la izquierda sobre un grupo G está determinado por su valor en $e \in G$ y recíprocamente, pues $(da_g)(X)(e) = X(g)$ para cualquier $g \in G$ y

$$X(a_g h) = X(gh) = (da_{gh})(X(e)) = d(a_g a_h)(X(e)) = (da_g)(da_h X(e)) = da_g(X(h))$$

Por ello, *los campos vectoriales invariantes a la izquierda están globalmente definidos sobre* (la componente conexa del elemento neutro de) G . Su integración proporciona parametrizaciones locales con mejores propiedades que los grupos uniparamétricos arbitrarios mostrados más arriba. Ello se debe a lo siguiente: Denotemos mediante

$$\mathcal{L}_G := \{X \in C^\infty(G, TG) \mid X = (da_g)(X) \ \forall g \in G\}$$

al conjunto de los campos vectoriales invariantes a la izquierda sobre G . Este conjunto es una subálgebra de Lie del conjunto de campos $C^\infty(G, TG)$ definidos sobre G (comprobarlo). Además, se tiene un isomorfismo

$$\varphi : \mathcal{L}_G \rightarrow T_e G \quad \text{dado por} \quad \varphi(X) = X(e) .$$

En efecto, si $\varphi(X) = \varphi(Y)$, entonces $X(g) = (da_g)(X(e)) = (da_g)(Y(e)) = Y(g)$ para cualquier $g \in G$, por lo que φ es *inyectiva*.

Para ver que φ es *suprayectiva*, tomamos $v \in T_e G$ y construimos el campo $X : G \rightarrow TG$ dado por la asignación $g \mapsto X(g) := a_g v \in T_e G$ para cualquier $g \in G$. En particular, se tiene que $X(e) = a_e v = v$ y $\varphi(X) = v$. Además, X es invariante a la izquierda pues

$$X(a_g g') = X(gg') = (da_{gg'})(v) = (da_g)(da_{g'})(v) = (da_g)(X(g')) \quad \forall g, g' \in G.$$

1.3.4. Relación con Geometría Diferencial Local de Curvas

La observación mostrada en el apartado precedente permite conectar con el Teorema Fundamental de Clasificación de Curvas en $\mathbb{R}^n$ en términos de referencias móviles. En efecto, a cada punto de una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ le asociamos una referencia de n vectores (el tangente y el normal para una curva plana; el triedro intrínseco de Frenet para una curva alabeada, p.e.). La variación de esta referencia móvil de vectores con respecto a un parámetro intrínseco s asociado a la curva verifica un sistema de EDO (ecuaciones de Frenet-Serret) que es invariante con respecto a movimientos rígidos (traslaciones y rotaciones para $n = 2$ ó $n = 3$, p.e.). Por ello, los coeficientes del sistema determinan invariantes diferenciales asociados a la acción de un grupo clásico.

Si razonamos desde el punto de vista dual, podemos construir un sistema de 1-formas diferenciales invariantes a la izquierda sobre un grupo de Lie G . Este es el punto de partida para el enfoque unificado de E.Cartan de la Geometría Diferencial Equivariante. En este caso, la determinación de un sistema de 1-formas diferenciales independientes G -invariantes por la acción de un grupo G es la herramienta que permite extender a variedades diferenciables el razonamiento que acabamos de mostrar para curvas. Del mismo modo que en el caso de curvas (Frenet), este sistema de 1-formas diferenciales verifica un sistema de ecuaciones diferenciales (llamado de Maurer-Cartan) que caracteriza el grupo de Lie en base a sus invariantes diferenciales.

Ambas observaciones proporcionan el punto de partida para la Teoría Diferencial de Invariantes (que desarrollaremos a partir del §4,7).

1.4. Complementos sobre la Topología de los Grupos de Lie

La primera etapa consiste en describir las propiedades básicas de compacidad y conexividad (por arcos). Estas descripciones motivan que nos restrinjamos al estudio de grupos de Lie *conexos*. Para ello, en el caso general debemos considerar la componente conexa G_e del elemento neutro $e \in G$, que es un subgrupo cerrado de G . Frecuentemente, el cociente G/G_e tiene una estructura de espacio discreto.

1.4.1. Compacidad para grupos de Lie

Definición.- Un grupo de Lie matricial G es compacto si se verifican las condiciones siguientes

1. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de matrices en G que converge hacia A , entonces $A \in G$.
2. Existe una constante C tal que para cualquier $A \in G$ se tiene que $\|A_{ij}\| \leq C$ con $i \leq i, j \leq n$

Esta caracterización corresponde a la descripción por convergencia de sucesiones acotadas (à la Cauchy) que no es la definición estándar en Topología General que, en este caso, corresponde a un cerrado y acotado en el espacio cartesiano (real o complejo) ambiente. Sin embargo, como el espacio ambiente es un espacio de Banach, esta definición es equivalente a la usual.

Ejercicio.- Comprueba que los grupos $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ y $Sp(n)$ son compactos.¹¹

Ejercicio.- Demuestra que el grupo lineal general $GL(n; \mathbb{R})$ ó $GL(n; \mathbb{C})$ no es compacto. *Indicación:* El límite de una colección de matrices inversibles no tiene por qué ser inversible (puede converger hacia un elemento de la hipersuperficie caracterizada por la condición $\det(A) = 0$).

Los grupos de traslaciones $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^n$ ó los grupos multiplicativos de unidades $\mathbb{R}^*$ y $\mathbb{C}^*$ son obviamente no-compactos. El ejercicio siguiente incrementa la colección de grupos no-compactos:

Ejercicio.- Demuestra que el grupo especial lineal $SL(n; \mathbb{R})$ ó $SL(n; \mathbb{C})$ no es compacto. Demuestra que $O(n; \mathbb{C})$, $SO(n; \mathbb{C})$, $O(n, k)$, $SO(n, k)$ para $n \geq 1$ y $k \geq 1$ no son compactos. Tampoco lo son los grupos simplécticos $Sp(n; \mathbb{R})$, $Sp(n; \mathbb{C})$, los grupos euclídeo $G_{\mathbb{E}}(n)$ y de Poincaré $G_P(n; 1)$. *Indicación:* Ninguno de los grupos mencionados verifica la segunda condición.

¹¹ Se sobrentiende que el grupo ortogonal es a coeficientes reales y que el unitario es a coeficientes complejos

1.4.2. Conexividad para grupos de Lie

Definición.- Se dice que grupo de Lie matricial G es *conexo* si dados cualquier par de matrices $A_0, A_1 \in G$ existe un camino continuo $A(t)$ con $t \in [0, 1]$ tal que $A(0) = A_0$ y $A(1) = A_1$

Para grupos de Lie G , el criterio de conexividad por arcos es equivalente al criterio habitual de conexión. Este resultado es no-elemental y no será demostrado aquí.

Proposición.- Si G es un grupo matricial de Lie, entonces la componente conexa G^e de la identidad I es un subgrupo de Lie de G .

Demostración.- Supongamos que $A, B \in G^e$. Entonces existen caminos continuos $A(t)$ y $B(t)$ con $A(0) = I = B(0)$ y $A(1) = A, B(1) = B$. Entonces, $A(t)B(t)$ es un camino que empieza en I y termina en $AB \in G^e$. Análogamente, $A(t)^{-1}$ es un camino continuo que empieza en I y termina en A^{-1} , por lo que $A^{-1} \in G^e$

Ejercicio.- Comprueba que $GL(n; \mathbb{C}), SL(n; \mathbb{R}), SL(n; \mathbb{C}), SO(n; \mathbb{C}), U(n; \mathbb{C}), SU(n; \mathbb{C})$ son conexos

Ejercicio.- Comprueba que $GL(n; \mathbb{R}), O(n; \mathbb{R}), SO(n, 1)$ y $E(n)$ tienen dos componentes conexas.

Ejercicio.- Comprueba que $O(n, 1)$ y $P(n)$ (Poincaré) tienen cuatro componentes conexas.

Definición.- Se dice que grupo de Lie matricial G es *simplemente conexo* si cualquier lazo se puede reducir a un punto. Dicho de otra forma si dado cualquier camino $A(t)$ con $A(0) = A(1)$ existe una función continua $A(s, t)$ con $s, t \in [0, 1]$ verificando que

1. $A(s, 0) = A(s, 1)$ para cualquier $s \in [0, 1]$, es decir, para cualquier valor de s se tiene un lazo.
2. $A(0, t) = A(t)$, es decir, para $s = 0$ se tiene el lazo prefijado.
3. $A(1, t) = A(1, 0)$ para cualquier $s \in [0, 1]$, es decir, para $s = 1$ el lazo es un punto.

Ejemplo.- El grupo $SU(2)$ que topológicamente representa la esfera $\mathbb{S}^3$ en $\mathbb{R}^4$ es simplemente conexo. Este hecho es extremadamente importante, pues proporciona la clave para construir el espacio recubridor universal de otros grupos clásicos como se ve más adelante.

“Ejercicio”.- Los grupos $SL(n; \mathbb{C}), SU(n)$ y $SO(1, 1)$ son simplemente conexos. Todos los demás mencionados no son simplemente conexos.

1.4.3. Descripción topológica local

La herramienta para el estudio topológico local de los grupos de Lie *conexos* se facilita en virtud del resultado siguiente:

Proposición Cualquier grupo de Lie conexo está generado por un entorno del elemento neutro $e \in G$.

Corolario 1.- Cualquier grupo de Lie es paracompacto.

El estudio topológico de un grupo de Lie conexo G se lleva a cabo en términos de su recubrimiento universal $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$, donde $\tilde{G}$ es simplemente conexo. La existencia de un espacio recubridor universal $\tilde{X}$ para un espacio topológico X arbitrario (que es un resultado general de la Topología Algebraica) se traduce aquí en el resultado siguiente

Corolario 2 Para cada álgebra de Lie existe un único grupo de Lie *simplemente conexo* G , tal que todos los grupos de Lie conexos que tienen el mismo álgebra de Lie son cocientes de G por un subgrupo normal *discreto* H de G .

En virtud de este resultado, podemos reducir la *parte topológica local* del problema de clasificación de grupos de Lie al problema algebraico de clasificar álgebras de Lie modulo isomorfismo (a través de las constantes de estructura, tal y como mencionamos en el §1,5,10).

1.4.4. Estructura diferenciable sobre grupos. Unicidad

El resultado siguiente muestra que cualquier grupo topológico es esencialmente un grupo de Lie, respondiendo así afirmativamente a una cuestión planteada por Hilbert (Paris, 1900):

Teorema (Montgomery y Zippin, 1952) Si G es un grupo topológico, entonces existe una estructura diferenciable compatible con la estructura de grupo para un entorno abierto del elemento neutro $e \in G$. En particular, el grupo G admite una estructura de clase C^∞ que es compatible con su estructura original.

De hecho, un subgrupo *abstracto* H de un grupo de Lie G admite a lo sumo una estructura como subvariedad de G . Además, si dicha estructura existe, entonces H es un subgrupo de Lie de G .

Proposición Si $f : G \rightarrow G'$ es un homomorfismo entre grupos de Lie, entonces $f \in C^\infty(G, G')$.

Corolario Cualquier grupo topológico verificando la segunda condición de separación T_2 y localmente euclídeo posee a lo sumo una estructura diferenciable que le convierte en un grupo de Lie.

Los resultados relativos a embebimientos para subvariedades (presentados en el capítulo anterior), se traducen aquí en los resultados siguientes:

Teorema (E.Cartan) Si H es un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G , entonces existe una única estructura de variedad diferenciable sobre H tal que

H es un subgrupo de Lie de G .

Corolario Si $f : G \rightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces $\text{Ker}(f)$ es un subgrupo de Lie y $T_e(\text{Ker}(f)) = \text{Ker}(d_e f)$.

En este Curso no realizaremos un estudio sistemático de grupos de Lie y centraremos nuestra atención en cuestiones geométricas relacionadas con algunos grupos clásicos, especialmente aquellos cuya aplicación a modelos elementales que aparecen en Física es más elemental.

A continuación mostramos una aplicación a grupos de Lie del punto de vista mostrado en el §2,4 para variedades que nos permite obtener la estructura de los grupos clásicos como grupos de Lie y, al mismo tiempo, calcular su álgebra de Lie.

2. Estructuras Diferenciables sobre grupos

En el §2,4 se ha mostrado cómo construir subvariedades utilizando la imagen recíproca de valores regulares de una submersión. Este método puede ser utilizado para describir la estructura diferenciable de los grupos clásicos y también otras propiedades de naturaleza conjuntista. Para fijar ideas, consideraremos en detalle el caso correspondiente al grupo ortogonal $G = O(n; \mathbb{R})$.

2.1. El Grupo Ortogonal

La motivación para las construcciones llevadas a cabo sobre el grupo ortogonal parte de la descomposición de cualquier matriz $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ en producto de una matriz ortogonal y una matriz simétrica. Esta descomposición (esencialmente única) permite visualizar dicho conjunto de matrices como una “fibración” sobre el espacio vectorial de las $n \times n$ -matrices simétricas cuya fibra es el conjunto de las matrices ortogonales. Esta descomposición se extiende de forma inmediata al caso complejo. La extensión a otros cuerpos es más complicada y no será revisada aquí (Teorema de Malcev-Iwasawa).

2.1.1. Descripción como subvariedad

Para cualquier matriz $A \in O(n; \mathbb{R}) := \{A \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}) \mid {}^T A \cdot A = I\}$ se tiene que la matriz $B := {}^T A \cdot A$ es simétrica. Por ello, construimos una aplicación lisa sobre el conjunto $\text{Sim}(n; \mathbb{R})$ de las matrices simétricas con coeficientes reales:

$$f : \text{End}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}) \rightarrow \text{Sim}(n; \mathbb{R}) \mid A \mapsto {}^T A \cdot A$$

de modo que $O(n; \mathbb{R}) = f^{-1}(I)$. En virtud del resultado que acabamos de citar, para ver que $O(n; \mathbb{R})$ es una variedad, basta comprobar que la matriz identidad I_n es un *valor regular* de f . Para ello, calculamos la aplicación lineal tangente:

$$df_A(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(A + \varepsilon B) - f(A)}{\varepsilon} = B \cdot {}^T A + A \cdot {}^T B$$

Como $\text{End}(\mathbb{R}^n) \sim \mathbb{R}^{n^2}$ y $\text{Sim}(n) \simeq \mathbb{R}^N$, donde $N = \frac{n(n+1)}{2}$, obtenemos que I_n es un valor regular para f si, y sólo si, $df_A : \text{End}(V) \rightarrow \text{Sim}(n)$ es suprayectiva.

En virtud de la descripción dada más arriba para $df_A(B)$, la condición de suprayectividad para df_A equivale a demostrar que

$$\forall C \in \text{Sim}(n) \exists B \in \text{End}(V) \mid df_A(B) = B \cdot {}^T A + A \cdot {}^T B$$

Haciendo $C = (C + {}^T C)/2$, la condición requerida equivale a encontrar B tal que $B \cdot {}^T A = C/2$. Como $A \in O(n)$, basta tomar $B := C \cdot A/2$. Este razonamiento muestra además que

$$\dim(O(n; \mathbb{R})) = \dim(\text{End}(\mathbb{R}^n)) - \dim(\text{Sim}(n; \mathbb{R})) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Además, como variedad topológica $O(n; \mathbb{R})$ es *compacta*, pues

$$A = (a_{ij}) \in O(n; \mathbb{R}) \Rightarrow \sum_j a_{ij}^2 = 1 \quad \forall i.$$

Ejercicio.- Extiende la construcción presentada a los grupos $U(n)$ y $SL(n)$.
Indicación: Para $G = U(n)$ basta reemplazar $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ y adaptar los argumentos; para $G = SL(n)$ nótese que 0 es el único valor crítico de la aplicación determinante $\det : \text{End}(V^n) \rightarrow \mathbb{R}$

2.1.2. Extensión a otros grupos

El grupo espacial ortogonal $SO(n) := SL(n) \cap O(n)$. Para fijar ideas, nos restringimos a $n = 3$. En este caso $SO(3)$ es el grupo de rotaciones de $\mathbb{R}^3$ que dejan fijo el origen. De Geometría Básica es conocido que cualquier rotación $R \in SO(3)$ tiene una base ortonormal de autovectores (complejos) con autovalores cuyos afijos están contenidos en la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ de radio unidad; en particular si $\mathbf{v}$ es un autovector de R con autovalor λ , es decir, $R\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, entonces se pueden presentar dos casos

- $\lambda \in \mathbb{R}$, en cuyo caso, $\lambda = \pm 1$ y $\mathbf{v}$ es real (representando el eje de rotación);
- $\lambda \notin \mathbb{R}$, en cuyo caso los autovectores $\mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}}$ y $(\mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}})/i$ son reales y la rotación actúa multiplicando por $\theta := \arg(\lambda)$ sobre el subespacio 2-dimensional generado por dichos vectores.

Como los autovectores aparecen por pares conjugados y $\det(R) = 1$ se tiene que el autovalor -1 debe aparecer un número par de veces. Por ello, los autovectores correspondientes aparecen por pares en subespacios 2-dimensionales sobre los que actúan los elementos $R \in SO(n)$ ¹².

Por ello, la acción de cualquier R fija un subespacio L de codimensión 2 (una recta en el caso $n = 3$) y actúa como suma directa de rotaciones $SO(2)$ en el plano complementario de L . Este argumento se extiende asimismo a dimensión arbitraria (se utiliza de forma frecuente en álgebras de Clifford). Como consecuencia, variando el ángulo de rotación se obtiene que $SO(n)$ es conexo por arcos.

En términos algebraicos, en el caso $n = 3$ cualquier rotación no trivial (diferente de la identidad) tiene un único vector propio con valor propio igual a 1; dicho vector propio representa el eje de rotación ℓ_R sobre cuyo complementario actúa $SO(2)$ a través de una representación inducida por el grupo de rotaciones del plano ortogonal al eje de rotación.

De este modo se obtiene una descomposición espectral que corresponde precisamente al toro maximal $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ en $SO(3)$. Nótese que $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1$ y

¹² Este argumento es válido para cualquier dimensión, aunque el elemento $R \in SO(n)$ no se pueda interpretar como una rotación en el espacio n -dimensional

que la aplicación que lleva cada componente en el grupo es un *carácter del grupo*. Los toros maximales juegan un papel esencial en Teoría de Representación¹³.

Ejercicio.- Extiende los argumentos presentados en este ejemplo a los grupos $SO(n)$ y $SU(n)$

Los casos $U(n)$ y $SL(n)$ son similares; el primero realizando la traslación obvia de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, y el segundo mostrando que 0 es el único valor crítico de la aplicación determinante $\det : \text{End}(V^n) \rightarrow \mathbb{R}$

2.1.3. El grupo pseudo-ortogonal

Para cualquier partición (p, q) de n , el grupo pseudo-ortogonal se define como

$$O(p, q) = \{A \in GL(n; \mathbb{R}) \mid {}^T A I_{p,q} A = I_{p,q}\}$$

En particular, para $(p, q) = (3, 1)$ se obtiene el grupo de Minkowski que conserva la métrica $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$. Una matriz es ortogonal si su inversa coincide con su transpuesta. La caracterización para matrices pseudo-ortogonales es ligeramente diferente:

Ejercicio.- Demuestra que $A^{-1} = I_{p,q} {}^T A I_{p,q}$.

Nota.- Las matrices ortogonales son siempre diagonalizables. Sin embargo, las matrices del grupo $SO(p, q)$ no son necesariamente diagonalizables, ni siquiera para la partición más simple $(1, n-1)$. Este hecho está relacionado con la existencia de elementos idempotentes en su álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n-1, 1)$, aunque la demostración no es elemental.

El grupo $O(p, q)$ contiene a un subgrupo cerrado de *isometrías pseudo-ortogonales*:

$$SO(p, q) = \{A \in O(p, q) \mid \det(A) = 1\}$$

que tiene dos componentes conexas. A la componente conexa del elemento neutro $e = I$ se le denota mediante $SO^e(p, q)$ ¹⁴

Ejercicio (avanzado).- Demuestra que $SO(p, q) = SO(p) \times SO(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ (*Indicación:* Ver Knapp)

2.1.4. Geometría de Lorentz

Para fijar ideas, nos restringimos al caso $SO(3, 1)$ con *producto de Lorentz*

$$\langle u, v \rangle = \langle \mathbf{u}, t \rangle \langle \mathbf{v}, t' \rangle := \mathbf{u}\mathbf{v} - tt'$$

que da lugar a tres tipos de vectores:

¹³ En la última sección se formaliza este enfoque en el marco de la Teoría de Representación

¹⁴ En ocasiones también se denota mediante $SO_0(p, q)$ que puede dar lugar a confusiones entre 0 y O , por lo que evitaremos esta notación

- *tipo espacio* si $\langle u, u \rangle > 0$, es decir, $\|u\|^2 > t^2$
- *tipo tiempo* si $\langle u, u \rangle < 0$, es decir, $\|u\|^2 < t^2$
- *tipo isótopos* si $\langle u, u \rangle = 0$, es decir, $\|u\|^2 = t^2$

que corresponden a las regiones en las que el cono de luz (conjunto de vectores isótopos) descompone al espacio 4-dimensional. Para más detalles y aplicaciones ver [Nei83]¹⁵

2.2. Espacios tangentes de otros grupos clásicos

El cálculo del espacio tangente $T_e G$ en el elemento neutro e para cada grupo clásico G se lleva a cabo en términos del conjunto de los vectores tangentes X a todas las *curvas continuas* $A(t)$ contenidas en dichos grupos que pasan por I , es decir, tales que $A(0) = I$. Las imágenes de estas curvas son subgrupos uniparamétricos de G . En primer lugar, se calcula la forma que tienen estos vectores y a continuación se demuestra que cualquier vector tangente es de esa forma.

Debería observarse que este procedimiento es estrictamente *local*, pues no todo punto de la componente conexa del elemento neutro se puede conectar con e mediante un camino *continuo*, pero basta para la descripción del espacio tangente en $e \in G$ (la proyección de G sobre $T_e G$ es un difeomorfismo local).

Ilustraremos esta construcción local con algunos ejemplos tomados de grupos clásicos

2.2.1. El espacio tangente $T_I GL(m; \mathbb{R})$

Sea $A(t)$ una curva en $GL(m; \mathbb{R})$ tal que $A(0) = I$. Entonces, $T_I GL(m; \mathbb{R})$ es el espacio vectorial generado por todos los vectores de la forma $X := \dot{A}(t)|_{t=0}$. Recíprocamente, para t suficientemente pequeño, la curva $A(t) = I + tX \subset GL(m; \mathbb{R})$ verifica que $A(0) = I$ y que $\dot{A}(0) = X$. En consecuencia, $T_I GL(m; \mathbb{R}) = \text{End}(\mathbb{R}^M)$.

2.2.2. El espacio tangente $T_I SL(m; \mathbb{R})$

Podemos ver $SL(m; \mathbb{R})$ como el lugar de ceros de la aplicación

$$f : M(m; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad | \quad A \mapsto \det(A) - 1$$

Tomando coordenadas euclídeas en el espacio ambiente $\mathbb{R}^{m^2}$ de $M(m; \mathbb{R})$, e interpretando f como la ecuación de una hipersuperficie en $GL(m; \mathbb{R})$, es inmediato que la aplicación f es *regular* en un punto si y sólo si existe x_{ij} tal que $\frac{\partial f}{\partial x_{ij}} \neq 0$.

¹⁵ B.O'Neil: *Semi-Riemannian Geometry and applications to Relativity*, Academic Press, 1983

Sea $A(\lambda)$ una curva en $SL(m; \mathbb{R})$ tal que $A(0) = I$. Entonces, $\det(A(\lambda)) = 1 \forall \lambda$. Por tanto,

$$0 = \frac{d}{d\lambda}(\det A(\lambda))|_{\lambda=0} = \text{traza}\left(\frac{d}{d\lambda}A(\lambda)\right)|_{\lambda=0} = \text{tr}(\dot{A}(0)) = 0.$$

Recíprocamente, si $X \in M(m; \mathbb{R})$ verifica que $\text{tr}(X) = 0$, entonces la curva $A(\lambda) = I + \lambda X$ verifica que

$$\det A(\lambda) = \det(I + \lambda X) = 1 + \lambda(\text{tr}(X)) + o(\lambda^2) = 1 + o(\lambda^2),$$

por lo que X es tangente a $SL(m; \mathbb{R})$ en I . En consecuencia,

$$T_I(SL(m; \mathbb{R})) = \{X \in M(m; \mathbb{R}) \mid \text{tr}(X) = 0\}.$$

El cálculo es idéntico si reemplazamos $\mathbb{C}$ en lugar de $\mathbb{R}$.

2.2.3. El espacio tangente $T_I O(m; \mathbb{R})$

Sea $A(\lambda)$ una curva en $O(m; \mathbb{R})$ tal que $A(0) = I$ y $\dot{A}(0) = X$. Entonces, ${}^T A(\lambda).A(\lambda) = I$ para cualquier λ . Calculando la derivada en el origen, obtenemos

$$0 = \frac{d}{d\lambda}({}^T A(\lambda)A(\lambda))|_{\lambda=0} = {}^T \dot{A}(0).A(0) + {}^T A(0).\dot{A}(0) = {}^T X + X.$$

Recíprocamente, si X verifica ${}^T X = -X$, y tomamos una curva genérica $A(\lambda) = I + \lambda X$ pasando por I , obtenemos

$${}^T(I + \lambda X)(I + \lambda X) = I + \lambda({}^T X + X) + \lambda^2 {}^T X.X = I + \lambda^2 {}^T X.X,$$

por lo que, como esta curva tiene contacto de orden ≥ 2 con $O(m; \mathbb{R})$, es tangente a $O(m; \mathbb{R})$ en I . En consecuencia,

$$T_I(O(m)) = \{X \in M(m; \mathbb{R}) \mid {}^T X = -X\}.$$

De hecho, este resultado se puede obtener de forma sintética usando que si ${}^T X + X = 0$, entonces $A := \exp(X) \in O(m; \mathbb{R})$ pues en este caso, se tiene que

$${}^T A.A = {}^T(\exp(X)).(\exp(X)) = \exp({}^T X + X) = I.$$

Como $SO(m; \mathbb{R}) = O(m; \mathbb{R}) \cap SL(m; \mathbb{R})$, se tiene que $T_I SO(m; \mathbb{R}) = T_I O(m; \mathbb{R}) \cap T_I SL(m; \mathbb{R})$. Por ello, los elementos X del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(m; \mathbb{R})$ del grupo especial ortogonal están caracterizados por las condiciones

$${}^T X = -X, \quad \text{tr}(X) = 0.$$

El cálculo del espacio tangente en I para los grupos unitario y simpléctico es idéntico y se deja como ejercicio. Describe una base para $\mathfrak{so}(2; \mathbb{R})$ y para $\mathfrak{so}(3; \mathbb{R})$.

2.2.4. El espacio tangente $T_I Sp(m)$

2.3. Homomorfismos e isomorfismos entre grupos de Lie

La comparación entre grupos G o subgrupos H (así como su extensión a álgebras $\mathfrak{g} := T_e G$ y subálgebras $\mathfrak{h} = T_e H$) de Lie se lleva a cabo en términos de C^r -homomorfismos. En el caso más estricto, dichos homomorfismos son isomorfismos y proporcionan el criterio básico de clasificación. Esta construcción permite asimismo introducir algunas cuestiones básicas relacionadas con la Teoría de Representación que se desarrollan con más detalle en la última sección de este capítulo.

2.3.1. Homomorfismo entre grupos de Lie

Definición.- Sean G y H dos grupos (matriciales) de Lie. Diremos que $\phi : G \rightarrow H$ es un *homomorfismo de grupos de Lie* si

1. ϕ es un homomorfismo de grupos, es decir,

$$\phi(g * g') = \phi(g) * \phi(g') \quad \forall g, g' \in G$$

2. ϕ es de clase C^r

La segunda condición es técnica. En el caso más general $r = 0$ se supone que ϕ se requiere que ϕ sea continua; en las categorías diferenciable, algebraica o analítica se requiere que ϕ verifique asimismo dicha condición. Inicialmente, se adopta la condición más débil correspondiente a la categorías C^0 . En la práctica es muy difícil dar un homomorfismo que no sea continua, pues si un homomorfismo $\phi; G \rightarrow H$ entre grupos es medible (condición muy débil), entonces es automáticamente continua.

2.3.2. Isomorfismo entre grupos de Lie

Definición.- Sean G y H dos grupos (matriciales) de Lie. Diremos que un homomorfismo de grupos de Lie $\phi : G \rightarrow H$ es un *isomorfismo de grupos de Lie* si, además de las condiciones que caracterizan a un homomorfismo se tiene que

1. ϕ es biyectiva.
2. ϕ^{-1} es continua.

Si $\phi : G \rightarrow H$ es un isomorfismo de grupos de Lie, escribimos simplemente $G \simeq H$

2.3.3. Un ejemplo significativo

Ejemplo trivial.- La aplicación exponencial $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ es un homomorfismo entre el grupo aditivo de los reales y el grupo multiplicativo de los reales, verificando que $\exp(s+t) = \exp(s)\exp(t)$.

Este ejemplo es significativo pues proporciona el primer ejemplo de representación del grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ como grupo multiplicativo $\mathbb{R}^*$. Además y lo que es más importante, contiene el germen de aplicación exponencial que permite relacionar el álgebra de Lie $\mathfrak{g} := T_e G$ de un grupo matricial de Lie G con G . En efecto, la aplicación exponencial está dada por

$$\exp : M(n; \mathbb{R}) \rightarrow GL(n; \mathbb{R}) \mid \exp(A) = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

que converge para $\|A\| < 1$. La aplicación exponencial está bien definida para cualquier grupo matricial de Lie, pero no para grupos de Lie arbitrarios. Para resolver este problema se utiliza una parametrización local en términos de grupos uniparamétricos que extiende el ejemplos trivial presentado al comienzo del apartado.

En virtud de la integración local de campos (ver final del módulo 1), cualquier campo vectorial 1-dimensional es integrable dando lugar a una curva integral parametrizada por $\mathbb{R}$. Por ello, cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ induce una aplicación lineal entre los espacios tangentes $\mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g}$ que lleva 1 en $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ (de hecho es un homomorfismo entre las álgebras de Lie, como veremos más abajo. Como $\mathbb{R}$ es un grupo simplemente conexo, la aplicación exponencial induce un *homomorfismo entre grupos de Lie*

$$\phi_{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow G \mid \phi_{\mathbf{v}}(s+t) = \phi_{\mathbf{v}}(s) * \phi_{\mathbf{v}}(t) \quad \forall s, t \in \mathbb{R},$$

donde $*$ representa el producto en G que representa la aplicación exponencial. Por ello, esta adaptación de la construcción llevada a cabo al final del módulo 1 proporciona una parametrización local de G en términos de subgrupos uniparamétricos que no depende del carácter matricial para G .

Ejercicio.- Demuestra que la aplicación ϕ así definida es un difeomorfismo local de un entorno de $0 \in \mathbb{R}$ en un entorno de $e \in G$.

Como la aplicación exponencial es suprayectiva, a una colección de generadores $\mathbf{v}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G se les llama *generadores infinitesimales de $\mathfrak{g}$*

En particular, para álgebras de Lie matriciales se tiene un difeomorfismo local entre un entorno de la $n \times n$ -matriz idénticamente nula en $M(n; \mathbb{R}) = \text{Edn}(V)$ y un entorno (de la componente conexa) de I_n en $GL(n; \mathbb{R}) = \text{Aut}(V)$ donde V es un espacio vectorial n -dimensional sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio.- Demuestra que el difeomorfismo local inducido por la aplicación exponencial $End(V) \rightarrow Aut(V)$ se restringe de forma natural a cualquier subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g} = End(V)$, proporcionando un difeomorfismo local entre $\mathfrak{h}$ y la componente conexa H^e del elemento neutro $e \in H \subset G$.

2.4. El espacio recubridor del grupo de rotaciones

Un “ejemplo” particularmente interesante de homomorfismos entre grupos de Lie está relacionado con la topología de los grupos de Lie presentada al final de la sección anterior. De una forma más explícita afecta a la construcción del recubrimiento universal del grupo de rotaciones del espacio ordinario.

Los elementos de $SO(3; \mathbb{R})$ están parametrizados por las rotaciones de una esfera $\mathbb{S}^2$ respecto a su centro. Esta es una patología de $\mathbb{R}^3$, pues en el caso $m = 4$, el grupo $SO(4; \mathbb{R})$ tiene dimensión 6, mientras que la esfera $\mathbb{S}^3$ es 3-dimensional y es una variedad paralelizable.

2.4.1. Relación con el grupo de Moebius

Si quitamos un polo (típicamente el polo norte N de $\mathbb{S}^2$) y llevamos a cabo la proyección estereográfica sobre el plano tangente a la esfera en el otro polo (típicamente el polo Sur S), cada rotación induce una aplicación del plano $\mathbb{R}^2$ en sí mismo. Por otro lado $\mathbb{R}^2$ es difeomorfo a la recta compleja $\mathbb{C}^1$. En términos de la variable compleja z , la aplicación asociada (via el difeomorfismo) a la rotación mencionada más arriba, es una *transformación lineal fraccionaria* del tipo

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con} \quad ad - bc \neq 0$$

a la que también se llama *transformación de Moebius* de la recta compleja; desde el punto de vista real es composición de traslaciones, dilataciones e inversiones del plano ordinario $\mathbb{R}^2$ que generan las llamadas *transformaciones conformes* del plano caracterizadas por la conservación de los ángulos (verificado como ejercicio).

Se obtiene la misma transformación si se multiplican todos los coeficientes por un mismo factor. Por ello, podemos suponer que $ad - bc = 1$. Esto equivale a proyectivizar el espacio soporte, por lo que el grupo pasa a ser $\mathbb{P}SL(2; \mathbb{C})$ cuya versión real es de uso frecuente en la Geometría Proyectiva Elemental del plano real $\mathbb{RP}^2$ que podemos visualizar como homografías de la recta proyectiva compleja $\mathbb{CP}^1$.

Esta construcción permite parametrizar las transformaciones $f(z)$ de la recta compleja $\mathbb{C}^1$ mediante elementos de $SL(2; \mathbb{C})$ ó, si los consideramos salvo escala (multiplicando por un escalar arbitrario) de la recta proyectiva compleja $\mathbb{CP}^1$ mediante la acción de $\mathbb{P}SL(2; \mathbb{C})$). Desde un punto de vista más formal, la construcción anterior proporciona un epimorfismo de $SL(2; \mathbb{C})$ sobre las transformaciones lineales fraccionarias cuyo núcleo es $\pm I$ ¹⁶.

¹⁶ En el §4,5 volveremos sobre este tipo de cuestiones en relación con el problema de la

2.4.2. Reinterpretando las transformaciones conformes

Por otro lado, la condición para que una transformación lineal fraccionaria corresponda a una rotación en la esfera equivale a que la matriz representante sea unitaria, es decir, debe ser de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Esto da una sucesión exacta de grupos de Lie

$$0 \rightarrow \pm I \rightarrow SU(2) \rightarrow SO(3; \mathbb{R}) \rightarrow 0,$$

que nos permite interpretar los elementos de $SU(2)$ como puntos de la esfera unidad $\mathbb{S}^3$ en el 4-espacio $\mathbb{R}^4$. En efecto, basta tomar $a = a_1 + ia_2$ y $b = b_1 + ib_2$; la condición $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$ equivale a que el punto (a_1, a_2, b_1, b_2) esté en $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$

2.4.3. El grupo unitario como recubridor universal

Desde el punto de vista de la Teoría de Homotopía, el espacio recubridor universal de $SO(3)$ es $Spin(3)$ en virtud de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \pi_1(SO(3)) \rightarrow Spin(3) \rightarrow SO(3) \rightarrow 0,$$

hecho que tiene importantes consecuencias en relación con la interacción débil y su unificación con la electromagnética (esta unificación se etiqueta como electrodébil en la literatura física).

De forma alternativa, podemos adoptar un *enfoque geométrico* (relacionada con la sucesión exacta mostrada al final del apartado anterior) que facilita una reinterpretación más intuitiva. Para ello, basta complexificar la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$ que es la recta proyectiva compleja $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ que parametriza las líneas ℓ que pasan por $\underline{0} \in \mathbb{C}^2$. La acción transitiva (aunque no fiel) del grupo lineal general $GL(2; \mathbb{C})$ da lugar por paso al cociente al grupo de las transformaciones conformes (Moebius) de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ o bien sobre $\mathbb{S}^2$ como el modelo real ¹⁷

La acción de $U(2)$ sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ no es fiel pues factoriza a través del grupo unitario proyectivo, ignorando las transformaciones de escala. De hecho, cualquier elemento de $U(2)$ es producto de un múltiplo escalar de la identidad y un elemento de $SU(2)$. Por ello, podemos limitarnos a estudiar $SU(2)$ tal y como se hace en la interacción débil, p.e.. En general, cualquier elemento de $SU(n)$ tiene una base ortonormal de vectores propios de norma unidad; en particular, para $n = 2$ se tienen sólo 2 valores propios conjugados, por lo que cualquier elemento de $SU(2)$ es conjugado de un elemento de la forma

$$\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}.$$

clasificación topológica de grupos de Lie

¹⁷ De hecho, cualquier subgrupo compacto de $GL(2; \mathbb{C})$ es conjugado de un subgrupo del grupo unitario $U(2)$ (como subgrupo compacto maximal del grupo lineal general)

En consecuencia $SU(2)$ es conexo por arcos y la expresión anterior muestra una representación elemental de los toros maximales $\mathbb{T}^2$ en $SU(2)$. Para terminar de entender desde el punto de vista geométrico la sucesión exacta planteada al final del apartado anterior, hay que resolver el ejercicio siguiente:

Ejercicio.- ¿Qué elementos de $SU(2)$ actúan como rotaciones de la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$ y qué elementos como el núcleo del morfismo suprayectivo?

Indicación: Utiliza la proyección estereográfica).

3. Álgebras de Lie

De la misma forma que el fibrado tangente TM de una variedad proporciona una aproximación lineal a la variedad M , cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ proporciona una aproximación lineal al grupo de Lie G . El objetivo de esta sección consiste en mostrar algunas propiedades estructurales básicas de las álgebras de Lie que simplifican su manipulación. La noción de álgebra de Lie es extremadamente útil en las aplicaciones, pues la estimación directa de una transformación $A \in G$ es muy difícil, por lo que debemos recurrir a la estimación de una aproximación de primer orden (el vector tangente X a un camino $A(t)$ que pasa por A), calcular el elemento $A(t)$ como $\exp(tX)$ y evaluar A haciendo $t = 0$.

Desde un punto de vista algebraico las exponenciales proporcionan homeomorfismos locales que se pueden interpretar como desplazamientos infinitesimales sobre las soluciones de EDO. Los “paquetes” de soluciones forman congruencias de curvas solución que “fibran” localmente entornos de cada punto $p \in M$ de la variedad sobre la que se integra. Esta idea ya era conocida a finales del s.XIX y S.Lie (1885) fue el primero en estudiar las transformaciones que llevan una soluciones en otras que escribía originalmente como

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_m; a_1, \dots, a_m) \quad 1 \leq i \leq m$$

donde las f_i son analíticas en las variables $x_1, \dots, x_m$ y en los parámetros $a_1, \dots, a_m$. La unificación de los métodos de integración sobre variedades fue posible gracias al descubrimiento de S.Lie (1885, 1891) de la integrabilidad entre dichas ecuaciones y las propiedades de los grupos de transformaciones infinitesimales, y que, por tanto, proporcionan integrales de la distribución de campos vectoriales en una terminología más moderna.¹⁸

El propósito inicial de Lie era estudiar las propiedades algebraicas de dichas transformaciones, incluyendo en particular, su estructura de grupo analítico y su “variación” dependiendo del punto base elegido (1891). La primera cuestión pretendía abordarla como una extensión de la Teoría de Galois, algo que se reveló como sorprendentemente difícil y que no se reformula correctamente hasta la segunda mitad del s.XX. La segunda cuestión la reformula el propio S.Lie en términos de una aproximación tangencial al grupo que corresponde a lo que ahora llamamos álgebra de Lie. Por ello, la clasificación de las soluciones de EDO se traduce algebraicamente en términos de la clasificación de álgebras de Lie; este último problema fue casi resuelto por W.Killing para el caso semisimple (ver sección 4) y completado por E.Cartan en su tesis (1896).

De una manera sintética y desde el *punto de vista analítico*, podría decirse que a finales del s.XIX el problema era doble: encontrar métodos de integración de Ecuaciones Diferenciales basados en la G -invariancia de un operador con respecto a un grupo de Lie G e investigar qué medidas permanecen invariantes

¹⁸ La integrabilidad de distribuciones se ha presentado al final del módulo 1; la demostración del Teorema Fundamental (Frobenius) es más sencilla para la formulación en términos de sistemas de formas diferenciales y se presenta en el módulo 4. Al final de este módulo se muestra el enfoque de Lie-Cartan

por la acción del grupo G . Desde el *punto de vista algebraico*, a finales del s.XIX el problema también era doble: Clasificar los grupos abstractos subyacentes a todos los grupos de transformaciones locales o infinitesimales y estudiar todas sus representaciones sobre espacios (inicialmente de) dimensión finita.

La transformación del álgebra en el grupo a través de la aplicación exponencial puso de manifiesto no sólo el transvase de información entre ambas ¹⁹, sino el papel jugado por el espacio vectorial V subyacente al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G . La representación del álgebra sobre dicho espacio recibió el nombre de representación adjunta del grupo. La reducción al caso semisimple (ver sobre todo la subsección 4) mostró que bastaba con clasificar los endomorfismos asociados a todas las aplicaciones de la forma $ad(X)$ donde $X \in \mathfrak{g}$, es decir, bastaba con clasificar los sistemas de raíces de la ecuación característica $\det(\lambda I_n - ad(X)) = 0$.

Este problema fue resuelto por Killing (1892) para las 4 series de grupos clásicos A_n (correspondiente a $SU(n+1)$), B_n (correspondiente a $SO(n+1)$ ó $Spin(2n+1)$), C_n (correspondiente a $Sp(n)$) y D_n (correspondiente a $SO(2n)$ ó $Spin(2r)$; asimismo, introdujo alguno de los grupos excepcionales. Esta clasificación fue completada y sistematizada por E.Cartan en su tesis (1894) con la lista de singularidades excepciones E_6 , E_7 , E_8 , G_2 y F_4 para las álgebras de Lie semisimples que ahora conocemos. Una pequeña introducción a las cuestiones básicas relacionadas con los aspectos integrales y la Teoría Algebraica de la Representación se muestra al principio de la sección 4. ²⁰

Al tratarse de un Curso introductorio, en esta subsección sólo se presentan las nociones fundamentales y algunos resultados muy básicos de tipo algebraico, tratando de mostrar las conexiones con los aspectos geométricos presentados en capítulos anteriores del Curso. Por ello, sólo se pone acento en la caracterización de álgebras de Lie y algunos aspectos relacionados con el lenguaje de las derivaciones (sobre todo las G -invariantes) que es realmente el único aspecto no estrictamente algebraico que resulta necesario para construir y manipular álgebras de Lie en un contexto absolutamente general.

3.1. Definiciones y Ejemplos

3.1.1. Variedad paralelizable

Definición.- Diremos que una variedad M es *paralelizable* si su fibrado tangente TM es isomorfo a un fibrado trivial $\varepsilon^r \simeq M \times \mathbb{R}^m$ de rango $m = \dim(M)$.

3.1.2. Ejemplos

En el capítulo 1 del módulo 2 hemos visto que

¹⁹ Este transvase es de hecho un difeomorfismo local para grupos simplemente conexos

²⁰ En el módulo 5 se dan más detalles; algunas conexiones con la Física Teórica se muestra en el módulo 7. Las relaciones con la clasificación de singularidades y sus relaciones con la Mecánica Analítica se presentan en los módulos 3 y 4 de Topología Diferencial.

- Cualquier espacio vectorial es paralelizable.
- Las esferas $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^7$ son paralelizables.
- El producto de variedades paralelizables es paralelizable. En particular, el toro n -dimensional es una variedad paralelizable.

3.1.3. Paralelizabilidad de grupos de Lie

Proposición Cualquier grupo de Lie es paralelizable.

Demostración La aplicación traslación por un elemento arbitrario g_0 de G es un difeomorfismo local. En virtud del Teorema de Función Inversa, dicho difeomorfismo induce un isomorfismo

$$df_{g_0} : T_{g_0}G \longrightarrow T_{g \cdot g_0}G$$

entre los espacios tangentes en g y $g \cdot g_0$ (en particular, podemos tomar $g := g_0^{-1}$). Este isomorfismo es la fibra de un morfismo de fibrados

$$\Phi : TG \longrightarrow G \times T_e G \mid (g, v) \mapsto (g, (df_g)(v))$$

sobre la variedad base G , lo cual concluye la demostración.

Ejercicio.- Supongamos que X es un espacio G -homogéneo por la acción de un grupo de Lie G . Como G es paralelizable, ¿implica ello que X es paralelizable?. Razona tu respuesta, incluyendo contraejemplos si la respuesta es negativa.

3.1.4. Caracterización local de morfismos

Corolario.- Un morfismo entre grupos de Lie *conexos* está determinado por su diferencial en el elemento identidad.

Demostración En efecto, pues en virtud de la *Prop. 1.5.11*, la aplicación exponencial da un difeomorfismo local que se extiende por la trivialidad del fibrado tangente del grupo (es decir, via traslaciones en el grupo) a la componente conexa del elemento neutro. Como ambos grupos son conexos, dicha extensión describe completamente el comportamiento en todo el grupo.

3.2. Algebras de Lie. Nociones básicas

El álgebra de Lie es, por definición, el espacio tangente $T_e G$ en el elemento neutro $e \in G$ dotado de un producto interno $[\cdot, \cdot]$ al que se llama *corchete de Lie*. Las propiedades de este corchete se pueden motivar a partir de propiedades similares asociadas al álgebra de matrices que representan los endomorfismos

$\text{Edn}(V)$ de un espacio vectorial m -dimensional V . Sin embargo, se presenta una definición formal para facilitar su aplicabilidad para álgebras de Lie que no son representables matricialmente.

La homogeneidad de G con respecto a la acción de G permite calcular el fibrado tangente de un grupo de Lie “propagando” el comportamiento del espacio tangente en un punto. Para que esta “propagación” alcance todos los puntos de G es necesario que G sea conexo. Por ello, para calcular el fibrado tangente τ_G a un grupo de Lie *conexo* G basta calcular su fibra $T_e G$ en el elemento neutro $e \in G$. Esta construcción se aplica de forma inmediata a la componente conexa del elemento neutro en todos los casos descritos al final de la primera sección.

El espacio tangente $T_e G$ aparece dotado con una forma bilineal antisimétrica que le dota de la siguiente estructura:

3.2.1. Corchete de Lie

Definición.- Llamamos *álgebra de Lie* de un grupo de Lie G , y la denotamos por $\mathfrak{g}$ a un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con una forma bilineal antisimétrica,

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},$$

a la que se llama *corchete de Lie* verificando las propiedades siguientes:

- Anticonmutatividad: $[X, Y] = -[Y, X] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$.
- Identidad de Jacobi: $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

3.2.2. Morfismos entre álgebras de Lie

Definición 2.5.19 Diremos que ϕ es un *morfismo de álgebras de Lie*, si es un homomorfismo entre los espacios vectoriales subyacentes que conserva los corchetes de Lie, es decir,

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

Definición.- Diremos que ϕ es un *isomorfismo de álgebras de Lie* si es un homomorfismo de álgebras de Lie biyectivo.

Ejercicio.- Construye el fibrado tangente a un grupo de Lie clásico no-conexo, extendiendo el comportamiento del espacio tangente a las componentes que no contienen al elemento neutro. *Indicación:* Razona sobre $GL(n; \mathbb{R})$ (introduciendo una reflexión, p.e.) y extiende este argumento a cualquier subgrupo clásico.

3.2.3. Algunas propiedades básicas

- La diferencial en $e \in G$ de un morfismo $f : G \rightarrow G'$ entre grupos de Lie es un homomorfismo $d_e f : \mathfrak{g} := T_e G \rightarrow \mathfrak{g}' := T_e G'$ entre álgebras de Lie.
- La noción de homomorfismo de álgebras de Lie permite definir el concepto de *subálgebra de Lie*, como un subespacio vectorial cerrado respecto a la estructura de Lie de $\mathfrak{g}$ inducida por la aplicación restricción.
- El producto de álgebras de Lie es un álgebra de Lie con la estructura producto, pero el cociente de dos álgebras de Lie no tiene por qué ser un álgebra de Lie. Para ello, necesitamos la noción de *ideal*.

3.2.4. Constantes de Estructura

Un procedimiento efectivo para verificar si dos álgebras de Lie son isomorfas, consiste en verificar si tienen las mismas *constantes de estructura*, módulo $\mathbb{K}^*$. Si $\{e_i\}_{i \in I}$ es una base para $\mathfrak{g}$, entonces

$$[e_i, e_j] = \sum_{k \in I} c_{ij}^k e_k, \quad \forall i, j \in I$$

Llamamos *constantes de estructura* a los coeficientes c_{ij}^k que aparecen en las expresiones anteriores. Las formas más simples que pueden presentar estas constantes de estructura es el punto de partida para la clasificación de las álgebras de Lie. Este enfoque fue iniciado algebraicamente por Killing (1889) y E.Cartan (1893), y geoméricamente por Bianchi (quien clasificó las álgebras de Lie 3-dimensionales; para una descripción geométrica detallada, ver p.e. [D+F+N], p.227).

Usando las constantes de estructura podemos describir las formas más simples que pueden presentar las álgebras de Lie. El caso trivial corresponde a las álgebras de Lie *abelianas*, es decir, aquellas tales que $[X, Y] = 0$ para cualquier $X, Y \in \mathfrak{g}$. Estas álgebras están caracterizadas por tener nulas todas las constantes de estructura. La idea original de la clasificación pasa por encontrar la forma más simple que pueden presentar las matrices que representan las constantes de estructura.

Además, las álgebras de matrices ocupan un lugar privilegiado dentro de esta teoría, pues cualquier álgebra de Lie de un grupo de Lie sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ es un álgebra de matrices (este es esencialmente el *Teorema de Ado*). En este Curso no abordaremos la clasificación de grupos y álgebras de Lie (no obstante, más abajo presentamos una nota donde mostramos algunas de algunas ideas relevantes para este problema).

3.3. Ejemplos y Observaciones

3.3.1. Álgebra Especial Ortogonal

Las álgebras de Lie correspondientes a $\mathbb{R}^3$ con el producto exterior y al grupo $SO(3)$ de rotaciones están generadas por

$$\mathfrak{so}(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

son isomorfas.

3.3.2. Álgebra Unitaria especial

A continuación se describen los generadores del álgebra de Lie real del grupo $SU(2)$

$$\mathfrak{su}(2) = \left\langle e_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\rangle$$

Este álgebra $\mathbb{C}$ -isomorfa al álgebra de Lie del grupo $SL_2(\mathbb{R})$ que escribimos

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \left\langle X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

pero estas álgebras no son $\mathbb{R}$ -isomorfas. De hecho, los que acabamos de describir son los dos únicos modelos reales no isomorfos de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (no es trivial).

A continuación se analizan con más detalle la correspondencia entre elementos del grupo y del álgebra sobre un ejemplo especialmente significativo

3.3.3. Rotaciones y Rotaciones Infinitesimales

Este ejemplo muestra la correspondencia entre los campos vectoriales (generadores infinitesimales del álgebra asociada a $SO(3)$) y los subgrupos uniparamétrico definidos sobre el grupo de rotaciones $SO(3; \mathbb{R})$. Para fijar ideas, consideremos el campo vectorial $\xi := x(\partial/\partial y) - y(\partial/\partial x)$ que corresponde a una rotación infinitesimal respecto al eje Oz y consideremos el grupo uniparamétrico en $SO(3, \mathbb{R})$ dado por

$$\rho_z : \mathbb{R} \rightarrow SO(3; \mathbb{R}) \quad | \quad \rho_z(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

que representa las rotaciones ordinarias de $\mathbb{R}^3$ que dejan invariante el eje Oz . El vector tangente a la imagen $\rho_z(t)$ en el elemento neutro $e = I_3$ está dado por

$$X_\xi := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\rho_z(t) - I_3) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Desarrollando en serie de Taylor cada una de las entradas de la matriz, se obtiene

$$X_\xi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\begin{pmatrix} (1 - \frac{t^2}{2!} + \dots) & -(t - \frac{t^3}{3!} + \dots) & 0 \\ (t - \frac{t^3}{3!} + \dots) & (1 - \frac{t^2}{2!} + \dots) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - I_3 \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La denominación dada a esta matriz procede de su relación con el campo correspondiente a la rotación infinitesimal. En efecto, observemos que

$$\xi := x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = (x \ y \ z) X_\xi \left(\frac{\partial}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial y} \ \frac{\partial}{\partial z} \right)^T.$$

Recíprocamente, si ahora partimos del vector X_ξ , ó si se prefiere del sistema lineal asociado $\dot{a}(t) = X_\xi a(t)$, es posible describir fácilmente la curva en $SO(3; \mathbb{R})$ cuyo vector tangente en el elemento neutro es dicho X_ξ . En efecto, la Teoría elemental de las EDO muestra que la solución de este sistema con dichas condiciones iniciales está dada por la exponencial de tX_ξ , que calculamos a partir de las potencias de la matriz X_ξ :

$$a(t) := \exp(tX_\xi) = I_3 + t \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

Reagrupando términos, podemos representar $a(t)$ (para un t suficientemente pequeño, donde la serie precedente sea convergente) mediante una única matriz que resulta ser

$$a(t) = \begin{pmatrix} (1 - \frac{t^2}{2!} + \dots) & -(t - \frac{t^3}{3!} + \dots) & 0 \\ (t - \frac{t^3}{3!} + \dots) & (1 - \frac{t^2}{2!} + \dots) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por ello, la integración de una rotación infinitesimal (como campo vectorial ó si se prefiere como vector en el álgebra de Lie $T_{I_3}SO(3; \mathbb{R})$) da una rotación en el sentido ordinario de $\mathbb{R}^3$. La extensión de este razonamiento a los otros dos campos vectoriales correspondientes a las rotaciones infinitesimales respecto a los ejes Oy y Ox es elemental y se deja como ejercicio. De este modo, obtenemos también una descripción explícita del difeomorfismo local entre un entorno del elemento neutro I_3 del grupo $G = SO(3; \mathbb{R})$ y un entorno del origen $0 \in \mathfrak{g} = T_{I_3}SO(3; \mathbb{R})$. Este ejemplo no es un caso aislado; al contrario, ilustra la situación general que aparece en la Teoría de Grupos de Lie.

3.3.4. Transformaciones euclídeas infinitesimales

El vector tangente a un camino $\gamma(\lambda)$ en el grupo euclídeo $SE(3)$ viene dado por

$$\frac{d}{dt}\gamma(\lambda) \big|_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix}.$$

El vector traslación $\mathbf{x}(t)$ se puede representar mediante $\mathbf{x}(t) = (I - A)\mathbf{u}(t) + \theta p \hat{\mathbf{v}}/2\pi$. El vector posición inicial $(\mathbf{p}(0), 1)^T$ se transforma en $(\mathbf{p}(\lambda), 1)^T$ a lo largo del camino $\gamma(t)$ por multiplicación a la izquierda. Identificamos la velocidad en coordenadas afines $(\dot{\mathbf{p}}(t), 0)^T$ con $\dot{\mathbf{p}}(t)$ que calculamos reemplazando el valor del vector traslación $\mathbf{x}(t)$ obteniendo

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \Omega(\mathbf{p} - \mathbf{u}) + \dot{\theta} \frac{p}{2\pi} \hat{\mathbf{v}}$$

donde el vector $(\mathbf{p} - \mathbf{u})$ representa el vector posición del punto $\mathbf{p}$ con respecto al eje del movimiento. Como la matriz Ω asociada a la rotación infinitesimal es antisimétrica, podemos escribirla como

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que su efecto sobre el vector $\mathbf{x}$ corresponde al producto vectorial

$$\Omega \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

siendo $\boldsymbol{\omega}$ el vector velocidad angular instantánea. Representando mediante $\dot{\theta} \frac{p}{2\pi} \hat{\mathbf{v}}$ a la velocidad instantánea de un punto sobre el eje del movimiento, podemos expresar globalmente la velocidad como un *twist* dado por el 6-vector de componentes

$$\mathbf{t} = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v})^T = (\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_x, v_y, v_z)^T$$

donde ahora el vector velocidad lineal asociado al movimiento viene dado por

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \dot{\theta} \frac{p}{2\pi} \hat{\mathbf{v}}$$

De una forma más sintética, expresamos la *transformación cinemática de un punto* $\mathbf{p}$ como

$$\dot{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} + \mathbf{v}$$

es decir, como la composición de una rotación instantánea representada por el área orientada $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$ y de una traslación infinitesimal representada por el vector velocidad $\mathbf{v}$. Esta observación proporciona el punto de partida para la aplicación de las Álgebras de Clifford a la Cinemática.

3.4. Derivaciones del Grupo

Estrictamente hablando, las derivaciones de un grupo G son los únicos datos de Geometría Diferencial necesarios para desarrollar una Teoría de Grupos y Álgebras de Lie que vaya más allá de las descripciones algebraicas introducidas en (sub)secciones anteriores.

Desde un punto de vista formal, las derivaciones también se pueden considerar como una herramienta algebraica; basta caracterizarlas por su comportamiento sobre las constantes y por la regla de Leibnitz. Sin embargo, aquí se adopta un enfoque más “pedestre”, utilizando en ocasiones coordenadas locales, algo que es exclusivo de las álgebras de Lie matriciales. En el módulo 3 de Topología Diferencial y a lo largo del Lie Seminar (impartido de forma conjunta con Javier Güemes a principios de los noventa) se desarrolla un enfoque algebraico más general donde sólo se utilizan propiedades formales.

El enfoque abstracto para el caso C^∞ se basa en la descripción del espacio tangente en un punto como el espacio generado por los vectores tangentes a las curvas que pasan por el punto “contenidas” en la C^r -variedad (en realidad, basta que tengan un contacto de orden 2 en el punto). Un enfoque abstracto facilita el desarrollo de propiedades formales del álgebra de Lie.

3.4.1. Subgrupos uniparamétricos

Los *grupos uniparamétricos* de $G = \text{Aut}(\mathfrak{g})$ permiten obtener derivaciones sobre $\mathfrak{g}$, a partir del vector tangente X_a a la imagen $a(t) \subset G$ evaluado en el elemento neutro e .

Recíprocamente, el conocimiento de una “buena base” de vectores tangentes X_a^i de $T_e G$, permite obtener por integración los grupos uniparamétricos $a_i(t) : \mathbb{R} \rightarrow G$, cuyos vectores tangentes en e son precisamente X_a^i . De este modo, obtenemos un sistema de *coordenadas canónicas* sobre G (E.Cartan) ²¹

3.4.2. Campos invariantes a un lado

La clave de esta construcción consiste en que el álgebra de Lie $T_e G$ está generada por campos vectoriales invariantes a la izquierda (ó a la derecha) por la acción del grupo G . La elección de una “buena base” (formada por campos vectoriales independientes) se justifica por la descripción global del fibrado tangente de un grupo de Lie G como producto directo del propio grupo G por su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ (cualquier grupo de Lie es paralelizable)

²¹ Este enfoque se desarrolla en el cap.7 del módulo 4 en relación con el cálculo diferencial exterior sobre grupos de Lie

3.4.3. El álgebra de las derivaciones

En general, un álgebra de Lie no es conmutativa ²². Por ello, es necesario desarrollar un formalismo diferencial sobre $\mathfrak{g} = T_e G$ de tipo no-conmutativo que permita gestionar las propiedades presentadas al final del módulo 1. En este apartado, se consideran algunas propiedades básicas.

La falta de conmutatividad para las derivaciones se traduce en una no-anulación del corchete de Lie asociado a las derivaciones. La representación de este fenómeno sobre variedades se expresa como una “holonomía” no-nula” (llamada también “defecto de holonomía”) ‘para la “traslación infinitesimal” asociada a una “conexión” (formalmente, una conexión representa una diferenciación covariante) . Este enfoque se desarrolla sobre todo en el módulo 5 de la asignatura.

La relación con la Teoría de Deformaciones (transversal a la Topología Diferencial, Geometría Algebraica y Geometría Analítica) presenta aún una gran cantidad de problemas abiertos. Desde el punto de vista geométrico, el caso mejor conocido corresponde a superficies analíticas complejas (ver el módulo 4 de Geometría Algebraica para más detalles).

Práctica avanzada.- Desarrolla el formalismo básico y aplícalo al álgebra de división de los cuaterniones. Conecta con el enfoque de la Geometría No-Conmutativa desarrollado por Connes.

3.4.4. El álgebra envolvente

En general, un álgebra de Lie no es necesariamente asociativa ²³. Una forma de resolver esta dificultad consiste en asociar de forma canónica un álgebra asociativa que permita “recuperar” alguna de las propiedades típicas para el caso asociativo. Este álgebra asociativa recibe el nombre de *Álgebra Envolvente Universal* y se denota mediante $U(\mathfrak{g})$.

Para construir $U(\mathfrak{g})$ se recurre al álgebra tensorial $\otimes \mathfrak{g}$ construida sobre $\mathfrak{g}$ (como espacio vectorial) conservando las propiedades asociadas a las diferentes representaciones de $\mathfrak{g}$. Para ello, se pasa al cociente del álgebra tensorial por el mínimo ideal bilátero correspondiente a la anulación de todas las expresiones en las que “falla la asociatividad”.

El álgebra tensorial de cualquier espacio vectorial tiene sus correspondientes parte simétrica y antisimétrica (esta descomposición es la generalización natural al álgebra tensorial del resultado bien conocido para matrices). En nuestro caso, si $\mathfrak{g}$ es conmutativa, el álgebra universal $U(\mathfrak{g})$ es el álgebra simétrica $Sim(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. Por ello, la “falta de conmutatividad” se traduce en la “adjunción” de componentes correspondientes a la parte antisimétrica de $\mathfrak{g}$. Los tópicos relacionados con álgebra tensorial se desarrollan en el módulo 3. Por ello, relegamos su desarrollo hasta el final de dicho módulo.

²² Los cuaterniones presentados en el capítulo 1 del módulo 2 proporcionan un primer ejemplo de álgebra no-conmutativa

²³ Los octoniones presentados en el capítulo 1 del módulo 2 proporcionan un primer ejemplo de álgebra no-asociativa

4. Una introducción a la Teoría de Representación

De una forma intuitiva, la Teoría de Representación de un grupo en un espacio vectorial consiste en un homomorfismo $\rho : G \rightarrow GL(V; \mathbb{K})$ sobre el grupo lineal de las transformaciones regulares de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Si la aplicación ρ es inyectiva, podemos visualizar las propiedades de G como si fueran transformaciones regulares de un espacio vectorial V . La Teoría de Representación de Grupos de Lie resulta muy simple cuando el grupo G es compacto. En este caso, cualquier representación unitaria irreducible es finito-dimensional (Teorema de Weyl).

4.1. La Representación adjunta

4.1.1. Algunos resultados básicos

Proposición.- Supongamos que un grupo de Lie G actúa a la izquierda sobre una variedad diferenciable M mediante $a : G \times M \rightarrow M$. Sea $p \in M$ un punto fijo para la acción de G . Entonces, la aplicación $\rho : G \rightarrow Aut(T_p M)$ dada por la asignación $g \mapsto (a_g)_*(p)$ es una representación de G .

Corolario.- El elemento neutro es un punto fijo de la acción de cualquier grupo de Lie G por los automorfismos interiores.

La representación adjunta de G en el espacio vectorial $\mathfrak{g}$, que denotaremos por $Ad : G \rightarrow Aut \mathfrak{g}$ está dada por la asignación $A \mapsto d_e \phi_A$, donde ϕ_A es la aplicación que describe la clase de conjugación de cada elemento en el grupo, es decir,

$$\phi_A : G \longrightarrow Aut(\mathfrak{g}) \mid \phi_A(B) := A.B.A^{-1} \quad \forall A \in G .$$

El Corolario anterior muestra que la aplicación $Ad : G \rightarrow Aut(\mathfrak{g})$ es una representación del grupo G en el espacio vectorial $\mathfrak{g}$.

4.1.2. La representación adjunta y las derivaciones

Un camino $\gamma : G \rightarrow G$ pasando por I se puede representar mediante $B_t = \gamma(t) = I + tY + t^2Q(t)$, donde $Y = \frac{d}{dt}\gamma(t) \mid_{t=0}$ es el vector tangente al camino $\gamma(t)$ en $t = 0$. La acción de G sobre $\gamma(t)$ está representada por la conjugación con A . Diferenciando esta acción y evaluando en el origen, encontramos que $ad(A)Y = AY A^{-1}$ para cualquier $A \in G$. Con más generalidad, tomando espacios tangentes, la representación adjunta de G en $\mathfrak{g}$ da un homomorfismo de álgebras de Lie que denotamos mediante

$$ad : T_e G = \mathfrak{g} \rightarrow End(\mathfrak{g}) \mid X \mapsto ad(X) \text{ donde } ad(X)(Y) := [X, Y] \quad \forall Y \in \mathfrak{g} .$$

La asignación $X \mapsto ad_X$ define una derivación sobre $\mathfrak{g}$, es decir,

$$ad(X)([Y, Z]) = [ad(X)Y, Z] + [Y, ad(X)Z] , \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} ,$$

ó si se prefiere $ad([X, Y]) = [ad(X), ad(Y)]$ (comprobadlo como ejercicio). Por ello, la asignación $X \mapsto ad(X)$ define un homomorfismo de Lie del álgebra $\mathfrak{g}$ en $Der(\mathfrak{g})$.

4.1.3. La representación adjunta de $SO(n)$

Deseamos calcular $\Omega' = A\Omega A^T$ para cualquier $A \in G = SO(3)$, donde $\Omega \in so(3)$ está representada por

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Como $A \in SO(3, \mathbb{R})$ sus columnas $\mathbf{a}_i$ están representadas por vectores ortonormales, es decir,

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$$

Como $\Omega \mathbf{v} = \omega \times \mathbf{v}$, obtenemos $A(\Omega A^T) = A(\omega \times \mathbf{a}_1 \mid \omega \times \mathbf{a}_2 \mid \omega \times \mathbf{a}_3)$ que desarrollamos en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{a}_1 \cdot (\omega \times \mathbf{a}_2) & \mathbf{a}_1 \cdot (\omega \times \mathbf{a}_3) \\ \mathbf{a}_2 \cdot (\omega \times \mathbf{a}_1) & 0 & \mathbf{a}_2 \cdot (\omega \times \mathbf{a}_3) \\ \mathbf{a}_3 \cdot (\omega \times \mathbf{a}_1) & \mathbf{a}_3 \cdot (\omega \times \mathbf{a}_2) & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1) & \omega(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) \\ \omega(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) & 0 & \omega(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2) \\ \omega(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3) & \omega(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{a}_3 \cdot \omega & \mathbf{a}_2 \cdot \omega \\ -\mathbf{a}_3 \cdot \omega & 0 & -\mathbf{a}_1 \cdot \omega \\ -\mathbf{a}_2 \cdot \omega & \mathbf{a}_1 \cdot \omega & 0 \end{pmatrix}$$

que es precisamente $A\omega$, es decir la representación adjunta sobre $SO(3)$ es la misma que la representación adjunta sobre $\mathbb{R}^3$. Este es un hecho aislado que no se extiende a dimensión superior ni tampoco a otros grupos.

4.1.4. La representación adjunta de $E(n)$

Para fijar ideas, nos restringimos al caso $n = 3$. Los cálculos realizados en el apartado anterior facilitan una expresión explícita de la representación de $SE(3)$ sobre $\mathfrak{se}(3)$. Para encontrarla, debemos calcular

$$\begin{pmatrix} \Omega' & \mathbf{v}' \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & -A^T \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\Omega A^T & A\mathbf{v} - A\Omega A^T \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix}$$

donde $-A\Omega A^T \mathbf{t} = (A\omega) \times \mathbf{t}$, en virtud del apartado anterior; esta expresión es clave en Visión Computacional (Reconstrucción 3D euclídea) y en Robótica (Análisis y control de movimientos, navegación interactiva). Por otro lado, si hacemos

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{pmatrix}$$

, interpretando $T\mathbf{x} = \mathbf{t} \times \mathbf{x}$ obtenemos

$$-A\Omega A^T \mathbf{t} = (A\omega) \times \mathbf{t} = TA\omega$$

Todo esto se puede escribir de una forma más compacta en terminos de vectores 6-dimensionales (interpretables como rectas en el espacio proyectivo) asociados a la expresión vectorial del álgebra de Lie $se(3)$ como

$$\begin{pmatrix} \omega' \\ \mathbf{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ TA & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

, por lo que el *efecto infinitesimal* de una rotación y una traslación en el espacio ordinario viene dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ TA & A \end{pmatrix}$$

. Estas matrices forman efectivamente un grupo pues

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ T_1 A_1 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ T_2 A_2 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_2 & 0 \\ (T_1 + A_1 T_2 A_1^T) A_1 A_2 & A_1 A_2 \end{pmatrix}$$

y por otro lado

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ TA & A \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ -A^T T & A^T \end{pmatrix}$$

Ambas propiedades son de gran interés para las aplicaciones a Robótica y a Visión Computacional en relación con problemas de estimación. Asimismo, admiten interpretaciones de gran interés en relación con la topología de variedades de banderas y sus aplicaciones a teoría de control en espacios estratificados (ver más abajo)

4.2. Una aproximación a Representaciones de Algebras de Lie

El ejemplo anterior muestra que un grupo abstracto se puede *realizar de formas diferentes* dependiendo del espacio sobre el que actúa. Esta observación conduce de forma natural al estudio de las *representaciones* como herramienta para visualizar acciones (algebraicas o infinitesimales) sobre espacios vectoriales (no necesariamente de dimensión finita) y, a continuación, abordar la clasificación de grupos y álgebras de Lie en términos de sus representaciones. El caso inicial corresponde a representaciones sobre espacios de dimensión finita.²⁴

²⁴ El caso general se aborda en el Seminario de Lie (con J.Güemes). Algunas aplicaciones a espacios ∞ -dimensionales se pueden ver en el módulo 4 de Topología Diferencial

4.2.1. Nociones básicas

Definición.- Una *representación de un grupo* G en un k -espacio vectorial V es un k -homomorfismo $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_k(V)$.

Una *representación de un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ sobre un k -espacio vectorial V de dimensión finita es una aplicación lineal $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ tal que

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Con más generalidad, si V es un espacio vectorial arbitrario (no necesariamente de dimensión finita), llamamos *representación de un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ sobre V a una aplicación lineal $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ que conserva los corchetes de Lie, es decir, $\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$.

El estudio de representaciones permite (entre otras cosas) abordar el problema de la clasificación de las álgebras de Lie, y por consiguiente de los grupos de Lie. No obstante, es preciso hacer notar por un lado que un álgebra de Lie puede ser el álgebra de diferentes grupos de Lie; además, un álgebra de Lie puede presentarse de formas muy diferentes, según el espacio de representación donde se esté visualizando la acción. El primer problema requiere algo más de topología, y posponemos su discusión hasta el §4,5?. El segundo es más sencillo, y puede ser abordado en términos de las constantes de estructura.

Se llama *grado de la representación* ρ y se denota por $\deg(\rho)$ a la dimensión del espacio V . si $\dim(V) = 1$ y $\rho(X) = 0$ para cualquier $X \in \mathfrak{g}$ se dice que ρ es la *representación trivial*. En este curso sólo se consideran representaciones sobre espacios vectoriales V de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ ²⁵. A continuación se comentan algunas cuestiones algebraicas relacionadas con la representación más usual.

4.2.2. Una introducción a la geometría de la aplicación momento

La formulación tradicional (Lagrange, Legendre, Hamilton, Jacobi) de la Mecánica Analítica se lleva a cabo en términos de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi. La invariancia de estas ecuaciones por la acción del grupo simpléctico, el papel jugado por la conservación de los invariantes fundamentales escalares (energía) y vectoriales (momento angular) sugieren un tratamiento unificado en términos de la aplicación momento. En este apartado se esboza una primera aproximación al problema en términos de la representación adjunta asociada al grupo $SO(n)$ y su recubrimiento universal.

Ejercicio.- Desarrollar según [Gui83]

²⁵ En el módulo 3 de Topología Diferencial (Singularidades de Aplicaciones) y en el módulo 4 de Geometría Algebraica (Variedades Complejas) se considera el caso general correspondiente a representaciones sobre espacios de dimensión infinita sobre $\mathbb{C}$

4.2.3. Algunas aplicaciones a Mecánica de Medios Continuos

El enfoque presentado en el apartado anterior plantea su posible extensión a la Mecánica de Medios Continuos (Liouville, Arnold, Marsden) que presenta múltiples aplicaciones a Física e Ingeniería. En este apartado se presenta una aproximación muy básica utilizando representaciones de $SL(n)$. Para fijar ideas, se considera sobre todo el caso $n = 2$.

Ejercicio.- Desarrollar según [Mar97]

4.3. La forma de Killing

4.3.1. Nociones básicas

Definición.- Un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una *forma de Killing* si el operador $ad(X)$ es antisimétrico para cualquier $X \in \mathfrak{g}$, es decir,

$$\langle ad(X)(Y), Z \rangle = - \langle Y, ad(X)Z \rangle, \forall Y, Z \in \mathfrak{g}$$

A partir de la identidad de Jacobi, construimos la *forma bilineal de Killing* dada por

$$K(X, Y) := \text{tr}(ad(X).ad(Y)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Como la traza del producto de 3 matrices es invariante por permutaciones cíclicas, se tiene la siguiente igualdad

$$K([X, Y], Z) = K(Y, [Z, X]) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

4.3.2. Descripción infinitesimal

La definición dada se puede justificar usando la representación adjunta asociada a los campos vectoriales más elementales (procedentes de subgrupos uniparamétricos). Así, si

$$Y_t := ad(\exp(tX))(Y) = Y + t[X, Y] + o(t^2) \Rightarrow \frac{d}{dt}(Y(t))_{t=0} = [X, Y] = ad(X)(Y).$$

Como los subgrupos uniparamétricos están dados topológicamente por difeomorfismos locales, inducen isometrías infinitesimales de la variedad. En particular, el producto interno debe ser invariante, es decir, $\langle Y_t, Z_t \rangle = \langle Y, Z \rangle$. Derivando con respecto a t en $t = 0$, obtenemos

$$\langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle = 0.$$

De forma más sintética, si $A \in G$, entonces cualquier vector tangente a G en A es de la forma $L_X(A)$ para algún $X \in \mathfrak{g}$, donde $L_X(A) := AX = A_0 \exp(tX)$.

4.4. Sobre el Problema de Clasificación de Álgebras de Lie

En esta subsección sólo se abordan algunas cuestiones elementales de tipo algebraico. Un enfoque más avanzado requiere resultados diferenciales que son consecuencia del Tercer Teorema de Lie ²⁶

En la clasificación algebraica de álgebras de Lie, se ve que si $\mathfrak{g}$ es *simple*, entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa al álgebra de Lie de las transformaciones lineales $ad(X)$, donde X recorre $\mathfrak{g}$. Por ello, la estrategia más natural (desde el punto de vista algebraico) consiste en tratar de encontrar las formas canónicas más elementales que pueden presentar las matrices $ad(X)$, cuando X recorre $\mathfrak{g}$ (este fue el punto de vista desarrollado inicialmente por Killing y Cartan a finales del siglo XIX).

4.4.1. Nociones básicas

Definición.- Diremos que $\mathcal{H}$ es una *subálgebra de Cartan* del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ si es una subálgebra maximal *abeliana* de $\mathfrak{g}$ y $ad(H)$ es un endomorfismo *diagonalizable* para cualquier $H \in \mathcal{H}$.

La demostración de la existencia de subálgebras de Cartan para $\mathfrak{g}$ no es elemental (requiere la prueba de los Teoremas de Lie y de Engel sobre álgebras solubles y nilpotentes, respectivamente).

El método para estudiar las formas canónicas que puede presentar $ad(X)$ está basado en el estudio de la *ecuación característica* $\det(\lambda I - ad(X)) = 0$. Los coeficientes de esta ecuación son invariantes; en particular, el doble del segundo coeficiente es $tr(ad(X)^2)$ que es el valor que toma la *forma de Killing* cuando $Y = X$ (esta es la aproximación original de Killing-Cartan).

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son las raíces, las propiedades del álgebra de Lie se pueden expresar en términos de ciertas propiedades aditivas de las raíces (Killing, 1889). Esto motivó la introducción de la (ahora llamada) *matriz de Cartan*, cuyo elemento general a_{ij} está dado por

$$-a_{ij} := \max\{q \in \mathbb{Z} \mid \alpha_i + q\alpha_j \text{ es una raíz}\}.$$

Alternativamente, la matriz de Cartan de un álgebra de Lie *semisimple* $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica cero se puede describir en términos de la forma de Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre $\mathfrak{g}$ mediante

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq r} = \left(2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \right)_{1 \leq i, j \leq r},$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ es un sistema de raíces simples de $\mathfrak{g}$ respecto a una subálgebra de Cartan prefijada $\mathcal{H}$.

De hecho, la matriz de Cartan es un *invariante de* $\mathfrak{g}$: no depende de la elección de la subálgebra de Cartan $\mathcal{H}$, ni del sistema de raíces simples relativo a $\mathcal{H}$. Asimismo, determina completamente el álgebra de Lie en el caso semisimple: Dos álgebras de Lie semisimples son isomorfas si, y sólo si tienen las mismas matrices de Cartan, salvo permutación de índices.

²⁶ Al final del módulo 4 se presenta una demostración basada en la versión del Teorema de Frobenius en términos del álgebra exterior.

Diremos que un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ es *simple* si y sólo si su matriz de Cartan es indescomponible, es decir, no se puede expresar como una matriz diagonal por bloques después de alguna permutación de índices.

4.4.2. Etapas de la clasificación algebraica

El *problema de la clasificación* de las álgebras de Lie tiene dos etapas:

- Caracterizar las matrices de Cartan (a_{ij}) indescomponibles que puedan aparecer y mostrar las clases de equivalencia verificando dicha caracterización (Killing, 1889; Cartan, 1892).
- Mostrar que para cada clase de equivalencia representada por una $A = (a_{ij})$ existe exactamente un álgebra de Lie simple, cuya matriz de Cartan (sobre C) es precisamente A (Cartan, 1892).

El *problema de la caracterización* (ó identificación) de las álgebras de Lie consiste en recuperar el álgebra a partir de generadores y relaciones. En el caso semisimple esto es posible gracias al resultado siguiente:

Teorema (Chevalley, Serre).- Para un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ existe un sistema de generadores linealmente independientes

$$e_i, f_i, h_i \in \mathfrak{g} \quad i = 1, \dots, r$$

al que se llama *base de Chevalley* verificando las relaciones

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \quad [h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j, \quad [h_i, h_j] = 0$$

Dos bases de Chevalley están relacionadas por un automorfismo de $\mathfrak{g}$. Además, los generadores e_i, f_j verifican las relaciones

$$(ad e_i)^{-a_{ij}+1} e_j = 0, \quad (ad f_i)^{-a_{ij}+1} f_j = 0 \quad i \neq j$$

Por último, los dos sistemas de relaciones que acabamos de mostrar para los generadores caracterizan al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Para más detalles sobre este tópico remitimos a la literatura especializada (Serre, 1966). Sería del máximo interés encontrar criterios similares para álgebras de campos vectoriales de dimensión infinita (ver tesis de T. Pérez para los casos asociados a singularidades simples).

5. Complementos

5.1. Algunos desarrollos adicionales

5.1.1. Una aproximación algebraica a aspectos topológicos

A lo largo de este apartado, suponemos que G es un Grupo de Lie Conexo cuya topología se desea estudiar desde un punto de vista algebraico.

El objetivo consiste en mostrar algunos resultados básicos de carácter topológico (demostración como ejercicio) que son las 4 proposiciones siguientes:

Subgrupos e ideales del álgebra de Lie.- Sea H un subgrupo de Lie conexo de G . Entonces, H es un subgrupo *normal* de G si y sólo si su álgebra de Lie $\mathcal{H}$ es un *ideal* de $\mathfrak{g}$.

Caracterización del centro.- Si G es un grupo de Lie conexo, entonces el centro $Z(G) = \text{Ker}(Ad)$.

Caracterización de Grupos y álgebras abelianas.- Sea G un grupo de Lie conexo. Entonces, G es abeliano si y sólo si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie abeliana.

Caracterización del toro como grupo.- Si G es un grupo de Lie compacto, conexo y abeliano, entonces G es un toro.

5.1.2. Elementos de la Teoría de Representación

La Teoría de Representación es la parte más estrictamente algebraica de la Teoría de Grupos y Álgebras de Lie. Permite estudiar propiedades de ambos objetos a través de morfismos definidos sobre grupos y álgebras de Lie construidos como transformaciones (algebraicas lineales o infinitesimales) dadas sobre un espacio vectorial con alguna estructura adicional. El caso inicialmente más “sencillo” corresponde a grupos compactos, aunque existe una analogía con el caso no-compacto descubierta por E.Cartan (1936) quien demuestra que si G es no-compacto, entonces es posible asociar de forma única a cada grupo *semisimple* un grupo compacto G cuyo álgebra de Lie coincide con el álgebra del grupo inicial (no compacto).²⁷

Se llama *radical* R_G de un grupo de Lie simplemente conexo G al mayor subgrupo invariante resoluble cerrado conexo de G . Cuando dicho radical se reduce al elemento neutro, se dice que G es *semisimple*. El *Teorema de Levi* afirma que, bajo las condiciones anteriores, el grupo G descompone como producto directo de su radical y de un grupo de Lie semisimple que es isomorfo a R_G . Por ello, basta conocer la table de las 4 series de grupos lineales clásicos ABCD para descomponer cualquier grupo de Lie en producto directo de sus subgrupos invariantes cerrados simplemente conexos y casi-simples.

²⁷ Estas cuestiones se abordan con más detalles al final del módulo 6 en relación con la clasificación de espacios homogéneos y simétricos.

El desarrollo del caso correspondiente a un grupo de Lie compacto G tiene lugar desde principios del siglo XX con aplicaciones casi inmediatas para el estudio de propiedades en Física de Partículas. Buena parte del desarrollo inicial se debe a H.Weyl quien proporciona los elementos fundamentales para su aplicación a la Mecánica Cuántica a lo largo de la tercera década del siglo XX.

La unificación de los métodos infinitesimal e integral se inician con el resultado de E.Cartan (1930) quien demostró que cualquier álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie ²⁸. Esta unificación inaugura el estudio global algebraico de los grupos de Lie (ver refs [Che49], [Hel78] al final del capítulo).

De hecho, si G es un grupo de Lie *simplemente conexo* se obtiene un diccionario perfecto entre propiedades de grupos y de álgebras de Lie; esto pone de manifiesto el interés de calcular el espacio recubridor universal de los grupos de Lie. El diccionario “perfecto” consiste en los dos resultados siguientes:

- $G \simeq G'$ si y sólo si $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'$
- Si $\dim(\mathfrak{g}) < \infty$, entonces existe un grupo de Lie simplemente conexo G cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}$.

Sin embargo, la situación para un grupo de Lie conexo (no necesariamente simplemente conexo) la situación es algo peor. No obstante, también se cuenta con construcciones generales que permiten abordar el problema desde un punto de vista topológico: Si K es un subgrupo compacto conexo maximal de G entonces G es homeomorfo a $K \times \mathbb{R}^s$ y además existen s subgrupos cerrados uniparamétricos $H_1, \dots, H_s$ (es decir isomorfos a $\mathbb{R}$) tales que G es isomorfo como grupo a $K \times H_1 \times H_s$ (Malcev 1945; Iwasawa, 1949).

Un *ejemplo básico* de esta descomposición está dada por la expresión de un cualquier matriz $A \in GL^+(n; \mathbb{R})$ como producto de una matriz ortogonal y una matriz simétrica; el caso complejo es similar, reemplazando la condición de ser ortogonal por la condición de ser unitaria. Como el conjunto de las matrices simétricas es un espacio vectorial (y, por tanto, contractible), esta descomposición muestra que el grupo lineal general es contractible al grupo ortogonal, es decir, cualquier base se puede ortogonalizar (Gram-Schmid).

La idea subyacente a la descomposición de Malcev-Iwasawa consiste en que las propiedades topológicas de un grupo de Lie conexo son esencialmente las de un subgrupo compacto maximal ó conexo maximal K . A la vista de estas descripciones, interesa obtener propiedades topológica (como p.e. ser cerrado o simplemente conexo) de los subgrupos a partir de propiedades algebraicas de los mismos y topológicas del “grupo ambiente”. Este enfoque se utiliza para la clasificación de los espacios riemannianos simétricos irreducibles que se presenta al final del módulo A_{16} .

²⁸ Este resultado se demuestra como consecuencia de la descomposición de Levi (ver más abajo)

5.1.3. Transformaciones Activas y Pasivas de Coordenadas

Según la terminología clásica, podemos interpretar los elementos de cada uno de los grupos clásicos como transformaciones que aplican una referencia asociada a un sistema en otra. Así por ejemplo, el grupo de Lorentz $O(3, 1)$ es el grupo asociado a la Relatividad Especial.

A partir de estos grupos Clásicos, podemos construir (mediante operaciones algebraicas) otros más complicados que son los apropiados para describir la dinámica de un sistema. El ejemplo típico de esta situación está dado por el grupo inhomogéneo de Galileo asociado a la dinámica de un cuerpo rígido que se desplaza en el espacio. Con más generalidad, el grupo de la Relatividad General permite describir simultáneamente los fenómenos descritos por la acción del grupo de Galileo y del grupo de Lorentz.

En cualquier caso, estos grupos actúan siempre sobre *referencias inerciales*, que son bases del espacio tangente de una cierta variedad M (en los modelos antes citados, esta variedad es un modelo de espacio-tiempo). El hecho de que el fibrado tangente TM sea una "buena aproximación" del espacio-tiempo para los fenómenos que intentamos describir, implica la existencia de estas referencias inerciales.

Pero puede haber efectos que no podamos detectar en términos de estas referencias inerciales, como por ejemplo, las fuerzas centrífugas que aparecen en un sólido en rotación. El modelo clásico no se altera esencialmente cuando incorporamos estas fuerzas, porque el cuerpo sobre el que actúan se supone indeformable (un sólido, según la terminología usual). Sabemos que esto no siempre es así, por lo que debemos ampliar tipo de transformaciones con las que trabajamos, incluyendo (como haremos más abajo) la acción de grupos de difeomorfismos (esto nos permitirá de paso, conectar con la Mecánica de Medios Continuos).

Por otro lado, la existencia de invariantes algebraicos por la acción de cada uno de estos grupos (hasta ahora hemos descrito el momento lineal, el momento angular y la energía) es consecuencia de ciertos principios de Relatividad General (según la aproximación teológica propia de un matemático). Por ello, debemos ser capaces de detectar invariantes en términos de las transformaciones generalizadas que estemos introduciendo.

Para fijar ideas, consideraremos una situación que aparece frecuentemente en varios contextos de Física Teórica, pero que reformulamos de acuerdo con las nociones introducidas en el §2,2. El lector debería intentar concretar esta descripción para alguno de los grupos clásicos mostrados al principio de este §2,3.

En el §2,2,18 comentábamos algunas ideas relacionadas con las transformaciones pasivas y activas de coordenadas definidas en un fibrado vectorial ξ sobre un modelo de espacio-tiempo M . En este número revisitamos estas ideas incorporando la estructura y el lenguaje que facilitan los fibrados principales (la referencia para este apartado es [Gui83]).

Si en lugar de considerar un fibrado vectorial, consideramos un fibrado prin-

principal $P_H \rightarrow M$ sobre M , las TPC están dadas por *difeomorfismos* ϕ de P_H que conmutan con la acción del grupo estructural H sobre la fibra, es decir,

$$\phi(z * h) = \phi(z) * h \quad \forall z \in P_H, \forall h \in H$$

A estas transformaciones se les llama *automorfismos de P_H* y constituyen un grupo al que se denota mediante $Aut(P_H)$. Como dichos automorfismos llevan fibras en fibras, inducen difeomorfismos $D(\phi)$ del espacio total P_H dados por

$$D(\phi)(\pi z) := \pi D(\phi)(z) \quad \forall z \in P_H,$$

por lo que tenemos un homomorfismo de grupos (una representación) que se denota:

$$D : Aut(P_H) \rightarrow Diff(M).$$

Se llama *grupo gauge del fibrado principal P_H* al núcleo del homomorfismo anterior D y se denota mediante $Gauge(P_H)$. Por ello, *las transformaciones gauge dan simetrías internas del sistema*, mientras que *los automorfismos del fibrado principal P_H combinan simetrías internas y externas*.

5.1.4. Un ejemplo básico de Fibrado Principal

Supongamos que el fibrado principal P_H es trivial sobre M , es decir, $P_H = M \times H$. En este caso, cualquier difeomorfismo ψ de M define un automorfismo $\tilde{\psi} \in Aut(P_H)$ mediante

$$\tilde{\psi}(m, h) := (\psi(m), h) \quad \forall m \in M, \forall h \in H.$$

De la misma forma, a partir de cualquier aplicación $f : M \rightarrow H$, podemos construir

$$\hat{f}(m, h) := (m, f(m)h),$$

por lo que obtenemos un elemento $\hat{f} \in Gauge(P_H)$. Además, $\forall h \in H$ tenemos

$$\tilde{\psi} \circ \hat{f} \circ \tilde{\psi}^{-1}(m, h) = \tilde{\psi}(\hat{f}(\psi^{-1}(m), h)) = \tilde{\psi}(\psi^{-1}(m), f(\psi^{-1}(m)h)) = (m, f(\psi^{-1}(m))h),$$

Por ello, la acción de los automorfismos $\tilde{\psi}$ del fibrado principal P_H (procedentes de los difeomorfismos ψ de la variedad base M) induce una transformación en cada aplicación $f : M \rightarrow H$ que se transforma de acuerdo con la regla

$$\tilde{\psi} \circ \hat{f} \circ \tilde{\psi} = \hat{f},$$

donde hemos hecho $g := f \circ \psi^{-1}$. De una manera más formal: *se tiene un isomorfismo del producto semidirecto $Diff(M) \times \mathcal{F}(M, H)$ en el grupo de los automorfismos $Aut(P_H)$ del fibrado principal P_H .*

Razonando análogamente, obtenemos que el álgebra de Lie de $Aut(M \times H)$ está dada como el producto semidirecto $Vect(M) \times \mathcal{F}(M, H)$ de los campos vectoriales sobre M con las aplicaciones definidas sobre M a valores en H .

En el caso general, sólo podemos garantizar que esta descripción se verifica *localmente*, es decir, para cada punto $x \in M$ se tiene un abierto $U \subset M$ de trivialización del fibrado principal P_H tal que existe un *homomorfismo inyectivo*

$$Diff_c(M) \times \mathcal{F}_c(M, H) \rightarrow P_H$$

(donde el subíndice $_c$ indica soporte compacto), y en particular sobre $\mathfrak{g} := Aut_c(P_H)$. El álgebra de Lie está dado en este caso por un producto semidirecto de campos sobre M con soporte compacto por el conjunto de aplicaciones (con soporte compacto) definidas sobre M a valores en H .

Un problema abierto de gran interés para la Teoría de Singularidades de Aplicaciones es la formulación de resultados similares al que acabamos de exponer, pero relativos a cierres de órbitas eventualmente con singularidades.

5.2. Ejercicios

Insertar en el texto

5.2.1. El grupo ortogonal

- Comprobar que el grupo ortogonal $O(2)$ tiene dos componentes conexas parametrizadas por

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

correspondientes a las rotaciones ordinarias y las reflexiones con respecto a la línea $x_2 - x_1 \tan \frac{\theta}{2} = 0$.

- Extender la descripción del apartado anterior a $n \geq 3$.

5.2.2. El grupo especial ortogonal

Verificad que la aplicación $\mathbb{RP}^3 \rightarrow SO(3)$ dada por la asignación

$$(w : x : y : z) \mapsto \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} w^2 + x^2 - y^2 - z^2 & 2(xy - wz) & 2(xz + wy) \\ 2(xy + wz) & w^2 - x^2 + y^2 - z^2 & 2(yz - wx) \\ 2(xz - wy) & 2(yz + wx) & w^2 - x^2 - y^2 + z^2 \end{pmatrix}$$

con $\Delta = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$, define un homeomorfismo entre el espacio proyectivo real tridimensional y el grupo $SO(3)$. Comprobar que la matriz así definida es ortogonal.

Indicación: A partir de una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in SO(3)$ construir una inversa local de la asignación anterior mediante

$$A \mapsto (1 + a_{11} + a_{22} + a_{33} : \frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}) : \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}) : \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}))$$

Nótese que el plano $w = 0$ no está en la imagen, por lo que debemos utilizar cartas para "pegar" aplicaciones locales definidas de forma similar. Por ello, sobre el abierto afín $D_+(1 + a_{11} + a_{22} + a_{33})$ de $\mathbb{RP}^3$ utilizamos las asignaciones

■

$$A \mapsto (\frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}) : 1 + a_{11} - a_{22} - a_{33} : \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12}) : \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31}))$$

definida sobre $D_+(1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}) \cap D_+(1 + a_{11} - a_{22} - a_{33})$.

■

$$A \mapsto (\frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}) : \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12}) : 1 - a_{11} + a_{22} - a_{33} : \frac{1}{2}(a_{32} + a_{23}))$$

definida sobre $D_+(1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}) \cap D_+(1 - a_{11} + a_{22} - a_{33})$.

■

$$A \mapsto \left(\frac{1}{2}(a_{21} - a_{12} : \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31} : \frac{1}{2}(a_{32} + a_{23} : 1 - a_{11} - a_{22} + a_{33} :) \right)$$

definida sobre $D_+(1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}) \cap D_+(1 - a_{11} - a_{22} + a_{33})$.

que coinciden sobre las intersecciones comunes de abiertos y recubren todo $\mathbb{RP}^3$ (verificarlo). Por ello, proporcionan el homeomorfismo requerido.

5.2.3. Algunos resultados básicos de álgebras de Lie

- Demuestra que el álgebra de Lie del grupo unitario es

$$T_I(U(n)) = \{X \in M(n; \mathbb{C}) \mid {}^T \bar{X} = -X\}.$$

De hecho, este resultado se puede obtener de forma sintética usando que si ${}^T \bar{X} + X = 0$, entonces $A := \exp(X) \in U(n)$.

- Demuestra que el álgebra de Lie del grupo simpléctico está dado por

$$T_I(Sp(n)) = \{X \in M(n; \mathbb{C}) \mid {}^T X.J + J.X = 0\}.$$

- Si g es la métrica de Minkowski, demostrad que

$$T_I(SO(3, 1)) = \{X \in M(4; \mathbb{R}) \mid {}^T Xg + gX = 0\}.$$

5.2.4. Isomorfismos entre grupos y álgebras de Lie

Dos grupos de Lie G_1 y G_2 son isomorfos si existe un isomorfismo de grupos $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ que es de clase C^∞ . Demostrar que

- El grupo $U(1)$ es isomorfo al grupo $SO(2)$. *Indicación:* Utiliza la asignación

$$\cos\theta + i\sin\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- El grupo de los cuaterniones unitarios es isomorfo a $SU(2)$. *Indicación:* Utiliza la asignación

$$a + bi + cj + dk \mapsto \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}$$

- $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$. *Indicación:* Utiliza la asignación dada por

$$\begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(bc + ad) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Nótese que $\varphi(A) = \varphi(-A)$ para cualquier $A \in SU(2)$ (comprobarlo para $A = I$ y extenderlo). Por tanto, la aplicación diferenciable φ descrita es un doble recubrimiento no trivial de $SO(3)$ (de hecho, el recubrimiento universal). Topológicamente corresponde al fibrado no trivial aplicación $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$ (nótese que no es posible encontrar una sección continua $s : SO(3) \rightarrow SU(2)$ que sea la inversa *global* de φ (la esfera $\mathbb{S}^3$ no es topológicamente equivalente a dos copias de $\mathbb{RP}^3$)).

- El grupo simpléctico $Sp(2; \mathbb{R})$ es isomorfo a $SL(2)$. *Indicación:* Nótese que el grupo simpléctico verifica la condición

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que simplificando obtenemos $\det(A) = ad - bc = 1$, es decir, $A \in SL(2)$. ¿Es posible extender este argumento a dimensión superior?.

- $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(1, 2) \otimes \mathbb{C}$.
- $\mathfrak{su}(4) \simeq \mathfrak{so}(6, \mathbb{R})$.

5.2.5. Espacios recubridores de grupos de Lie

Aunque las álgebras de Lie de $SU(2)$ y de $SO(3; \mathbb{R})$ sean isomorfas, sin embargo, $\pi : SU(2) \rightarrow SO(3; \mathbb{R})$ es un recubrimiento con un número infinito de hojas (*Indicación:* ver *Schultz*, p.103).

5.2.6. Constantes de estructura de álgebras de Lie

Calcula las constantes de estructura c_{ij}^k de las álgebras de Lie correspondientes a los grupos clásicos que aparecen sobre espacios de dimensión 2 y 3 sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5.2.7. Topología local de grupos de Lie

Ejemplo. - La matriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ está en la componente conexa de la identidad de $G = GL(2; \mathbb{R})$ pero no está en ningún subgrupo uniparamétrico de G (demuéstralo como ejercicio).

Este ejemplo muestra que el estudio local de un grupo de Lie a partir de los subgrupos uniparamétricos es insuficiente incluso para la componente conexa de la identidad. Este problema desaparece cuando trabajamos con grupos compactos. En efecto, si G es un grupo de Lie compacto, entonces cualquier elemento g está en un grupo uniparamétrico, es decir, existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $g = \exp(X)$ (no probaremos este resultado, que se enmarca en la teoría de clasificación algebraica).

5.2.8. Derivaciones sobre álgebras de Lie

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G con corchete $[\cdot, \cdot]$, diremos que D es una derivación de $\mathfrak{g}$, si $D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$ cualesquiera que sean $X, Y \in \mathfrak{g}$. En este caso, lo representaremos mediante $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$.

En el §2,5,23

Mas arriba se ha mostrado cómo la representación adjunta del grupo da automorfismos internos, y al pasar al espacio tangente, la representación adjunta del álgebra da derivaciones internas. Demostrar directamente (usando grupos uniparamétricos) que el álgebra de Lie de los automorfismos de $\mathfrak{g}$ es efectivamente el conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}$.

Indicación.- Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ un grupo uniparamétrico de automorfismos de $\mathfrak{g}$. Tomamos la derivación

$$D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad | \quad D(X) := \left. \frac{d}{dt} \gamma(t)X \right|_{t=0}$$

dada por el vector tangente a la curva en cada $X \in \mathfrak{g}$ y observamos que

$$D([X, Y]) = \left. \frac{d}{dt} ([\sigma(t)X, \sigma(t)Y]) \right|_{t=0} = \left[\left. \frac{d}{dt} \sigma(t)X \right|_{t=0}, \sigma(t)Y \right] + [\sigma(t)X, \left. \frac{d}{dt} \sigma(t)Y \right|_{t=0}]$$

Recíprocamente, si D es una derivación, la exponencial $t \mapsto \exp(tD)$ es un grupo uniparamétrico de transformaciones de $\mathfrak{g}$. De hecho, como D es una derivación, se tiene que el grupo uniparamétrico obtenido pertenece al grupo $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ (compruébalo como ejercicio).

5.3. Prácticas

Se presentan 3 prácticas a modo de ejemplo, aunque hay otras muchas que se pueden desarrollar en términos de las notas precedentes o de otros tópicos que sólo aparecen esbozados en secciones anteriores. Al final se incluye una bibliografía comentada que muestra diferentes caminos a seguir, dependiendo de los intereses de cada uno.

5.3.1. Práctica: Elementos de Mecánica Hamiltoniana Equivariante

El grupo simpléctico $Sp(n)$ actúa sobre las fibras del fibrado cotangente T^*M de una variedad M . La condición de dejar invariante a la matriz J es equivalente a dejar invariante las ecuaciones de Hamilton. Por ello, *las órbitas por la acción de este grupo son las soluciones de las ecuaciones de Hamilton*. La Mecánica Analítica Hamiltoniana estudia la geometría de las soluciones de estas ecuaciones (en particular, de las "lagrangianas" que son las subvariedades integrales de dimensión maximal).

Recíprocamente, *cualquier grupo uniparamétrico del grupo simpléctico procede de un observable*. Recordemos que (según la notación de §1,6,8) los observables se expresaban en términos de "funciones" f tales que $\{f, H\} = 0$, donde H es un hamiltoniano. Estas funciones reciben el nombre de *simetrías obvias* del sistema (en contraposición con otras de las que no hemos hablado, que son las simetrías "ocultas").

De este modo, veámos que la anulación de estos corchetes daba lugar a su vez a simetrías infinitesimales del Hamiltoniano. Ahora sabemos que, como $Sp(n)$ es un grupo compacto, cualquier elemento está en un subgrupo uniparamétrico. Por ello, en el caso clásico *podemos recuperar el hamiltoniano a partir de sus simetrías infinitesimales, ó si se prefiere de los observables, asociados a dicho hamiltoniano* (este punto de vista se encuentra ya en Whittaker, 1944, y es la base para el enfoque que desarrollaremos en el §2,6).

En particular, la órbita de un planeta está completamente determinada por dos observables no triviales como la energía y el momento angular, por ejemplo.

Afortunadamente hay "más observables de los que hacen falta". Basta pensar que las funciones constantes son soluciones obvias de las ecuaciones de Hamilton, por lo que generan un subgrupo uniparamétrico del grupo simpléctico que corresponde a la transformación identidad (verificarlo). En consecuencia, la asignación que a cada observable le envía en un subgrupo uniparamétrico no es inyectiva. Por ello, debemos pasar al cociente modulo el centralizador.

Esta situación es mucho más interesante cuando la acción del grupo que consideramos es unipotente, pues en ese caso se tiene una descomposición del espacio de órbitas atendiendo a la dimensión del centralizador de cada elemento. El prototipo de esta situación en el caso clásico está relacionado con los operadores que aparecen en Mecánica Cuántica. Otras situaciones más accesibles (matemáticamente hablando), proceden de las acciones nilpotentes dadas por

álgebras de Lie que actúan sobre singularidades de aplicaciones ó sobre datos asociados a su linealización ²⁹

5.3.2. Una nota sobre el grupo simpléctico y polinomios cuadráticos invariantes

Para simplificar, consideremos el grupo simpléctico $Sp(2)$ que actúa sobre $\mathbb{R}^2$ conservando las ecuaciones de Hamilton que escribimos en forma matricial (según §1,4,10) como

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} & \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

El campo vectorial hamiltoniano asociado a una función H está dado (según §1,6,7) por

$$\xi_H := \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}$$

Tomando como hamiltonianos las funciones cuadráticas en las variables q, p y operando de forma elemental obtenemos el siguiente cuadro (tomado de [Gui83]):

Hamiltoniano Cuadrático H	Campo Vectorial	Matriz
$\frac{1}{2}p^2$	$p \frac{\partial}{\partial q}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{2}q^2$	$-q \frac{\partial}{\partial p}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
pq	$q \frac{\partial}{\partial q} - p \frac{\partial}{\partial p}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{2}(p^2 + q^2)$	$p \frac{\partial}{\partial q} - q \frac{\partial}{\partial p}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

donde la cuarta fila corresponde al oscilador armónico hamiltoniano y es una consecuencia obvia de las dos primeras. De hecho, las tres primeras filas del cuadro precedente contienen implícitamente diferentes versiones (en espacios de funciones, campos vectoriales y matrices) de una representación de $sl(2)$. Esta afirmación es una obviedad cuando observamos la tercera columna, pues las matrices que aparecen en las tres primeras filas forman la base natural del álgebra de Lie del grupo $SL(2; \mathbb{R})$. Comprobarlo en las otras dos columnas como ejercicio. Generalizar estos argumentos al grupo $Sp(n)$.

Lejos de ser un ejemplo de variedades diferenciables, la Teoría de los grupos de Lie proporciona la herramienta fundamental para abordar la mayor parte de las cuestiones relacionadas con la integrabilidad de ecuaciones que aparecen en Mecánica (Analítica, Cuántica y de Medios Continuos). Ello se debe a que el espacio de las fases (correspondiente al fibrado cotangente en el caso de la

²⁹ Esta situación se trata de forma más sistemática en la materia A_4 (Topología Diferencial) donde se introduce la Teoría Diferencial de Invariantes sobre espacios de jets como marco general.

Mecánica Analítica) se puede identificar con el dual $\mathfrak{g}^*$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dotado de una estructura de Lie-Poisson:

$$\{X_i, X_j\} = c_{ij}^k X_k$$

(más detalles en Arnold (1974) ó Kirillov (1972) desde perspectivas completamente diferentes, por parte rusa; y Konstant y Weinstein (1983), por parte americana)

Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie (funcionales que podemos definir sobre G). La conjugación define una aplicación de clase C^∞ sobre G ; fijada la primera componente, obtenemos

$$\varphi_g : G \rightarrow G \quad | \quad \varphi_g(h) := ghg^{-1}$$

que deja fijo el elemento neutro $e \in G$; la diferencial de esta aplicación en $h = e$ da lugar a la *representación adjunta*

$$Ad(g) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad | \quad Ad(g)[Y] := [X, Y]$$

(donde $\exp(X) = g$); la aplicación dual de esta última es la *representación coadjunta*.

Si $f \in \mathfrak{g}^*$, la acción de las transformaciones coadjuntas $Ad^*(g)$ sobre f (cuando g recorre G) da lugar a la órbita coadjunta $\mathfrak{o}_f$ de f . Sobre esta órbita coadjunta la estructura de Lie-Poisson es no-degenerada y determina una 2-forma cerrada no-degenerada $\omega_{\mathfrak{o}_f}$ a la que se llama la *forma de Kirillov*.

El grupo G actúa transitivamente sobre la órbita $\mathfrak{o}_f$ dejando la 2-forma $\omega_{\mathfrak{o}_f}$ invariante. Por ello, a cada elemento $\xi \in \mathfrak{g}$ le podemos hacer corresponder un campo vectorial hamiltoniano X_ξ sobre $\mathfrak{g}^*$ inducido por la función hamiltoniana asociada H_ξ . Además, es posible “arreglar” esta correspondencia $\xi \mapsto H_\xi$ de modo que obtengamos un homomorfismo como álgebras de Lie

$$H_{[\xi, \eta]} = [H_\xi, H_\eta]$$

entre $\mathfrak{g}$ y el álgebra de Lie de las funciones con respecto al corchete de Poisson. Decimos entonces que el grupo es *hamiltoniano* (una acción de Poisson, en la terminología de Arnold, 1974). El resultado siguiente pone de manifiesto la importancia de la formulación equivariante en Geometría Analítica.

Teorema (Kirillov, 1972).- Cualquier variedad simpléctica homogénea cuyo grupo de movimientos es un grupo de Lie conexo G es localmente isomorfa a una órbita coadjunta del grupo G ó de su extensión central mediante $\mathbb{R}$

Ejercicio.- Desarrollar y mostrar aplicaciones

El paso siguiente consiste en la extensión del enfoque geométrico de la Mecánica Analítica a la formulación de las interacciones entre partículas en términos de la Mecánica Cuántica. Para ello, necesitamos desarrollar una reformulación geométrica de la Mecánica Cuántica. Esta reformulación fue iniciada por Von Neumann en torno a los años cuarenta del siglo XX desde el punto de vista del Análisis Funcional (extendiendo el formalismo de variedades a los

espacios de Hilbert). A la vista del carácter parcialmente independiente y más avanzado de estos tópicos, la reformulación geométrica de la Mecánica Cuántica se muestra en el capítulo 3 del módulo 7.

5.3.3. Práctica sobre Cuaterniones (enfoque homogéneo)

Más arriba hemos introducido los cuaterniones H mediante

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Se tiene un embebimiento canónico del cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos en el álgebra de división de los cuaterniones $\mathbb{H}$ dado por la asignación

$$\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H} \mid c \mapsto \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -\bar{c} \end{pmatrix}.$$

Comprobad como ejercicio que el centro de $\mathbb{H}$ está dado por

$$Z(\mathbb{H}) := \{z \in \mathbb{H} \mid zh = hz \forall h \in \mathbb{H}\} = \mathbb{R}$$

Usando la representación matricial, podemos describir una base de $\mathbb{H}$ como $\mathbb{C}$ -espacio vectorial:

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{donde } j^2 = -1 \text{ y } zj = j\bar{z} \forall z \in \mathbb{C}$$

lo cual permite construir un isomorfismo como $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales

$$\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{H} \mid (a, b) \mapsto a + bj := \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

Del mismo modo que en el caso de $\mathbb{C}$ con respecto a $\mathbb{R}$, se tiene que existe un *antiautomorfismo de conjugación*

$$i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \mid h := a + bj \mapsto i(h) := \bar{h} = \bar{a} - j\bar{b}.$$

Sea h un elemento de $\mathbb{H}$ que interpretamos como una matriz compleja en $GL(2; \mathbb{C})$. Entonces definimos la *adjunta de h* y la denotamos mediante *h como la imagen $i(h)$ por el anti-automorfismo de conjugación precedente.

La conjugación así definida es $\mathbb{R}$ -lineal, coincide con la conjugación compleja sobre $\mathbb{C}$ y además verifica que $i^2 = id$ y la propiedad $i(h.k) = i(k).i(h)$ (obsérvese que el orden cambia).

La norma de un cuaternión

$\|h\|_{\mathbb{H}}$ se define como la norma hermitica sobre $\mathbb{C}^2$ del par de números complejos que le representa, es decir, $\|h\|_{\mathbb{H}} := h.\bar{h} = \bar{h}.h$ (a veces también se le denota por $N(h)$). Comprueba que

$$\|a + bj\|_{\mathbb{H}} = |a|^2 + |b|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

En particular, si $h \in \mathbb{C}$ se tiene que $\|h\|_{\mathbb{H}} = |h|^2 = h.\bar{h} = \det(h)$

Veamos ahora cuál es la *estructura real* subyacente a $\mathbb{H}$. El álgebra de los cuaterniones tiene dimensión 4 sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Un sistema de generadores está dado por

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}},$$

con las reglas obvias de multiplicación dadas por las expresiones

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

Según esta representación real de los cuaterniones, descomponemos $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ en

$$\mathbb{R} \oplus \{\text{cuaterniones puros } \mathbf{q}\} = \oplus \{\mathbf{bi} + \mathbf{cj} + \mathbf{dk} \mid b, c, d \in \mathbb{R}\} \simeq_{\mathbb{C}\mathbb{R}} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$$

lo cual da un isomorfismo como espacios vectoriales reales

$$\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \quad | \quad (a, b, c, d) \mapsto a + \mathbf{bi} + \mathbf{cj} + \mathbf{dk}$$

(con las reglas antes mencionadas para $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$). Con esta forma real para los cuaterniones, podemos escribir el antiautomorfismo de conjugación $i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ mediante

$$i(r + \mathbf{q}) = r - \mathbf{q} \Rightarrow \|r + \mathbf{q}\| = r^2 - \mathbf{q}^2.$$

En particular, si $\mathbf{q}$ es un *cuaternión puro* (es decir con parte real nula), entonces se tiene que $\|\mathbf{q}\| = -\mathbf{q}^2$. Además, el cuadrado h^2 de un número cuaterniónico arbitrario está dado en términos de su representación real por $h^2 = r^2 + \mathbf{q}^2 + 2r\mathbf{q}$. Por ello,

$$h^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow r = 0 \text{ ó } \mathbf{q} = 0$$

(en particular, $h^2 \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow r = 0$), lo cual muestra la relación con la norma euclídea sobre $\mathbb{R}^4$. Por último, del mismo modo que los números complejos de norma unidad se pueden representar mediante el grupo $SO(2; \mathbb{R})$, cuando usamos su representación real, tenemos un análogo para el caso de los cuaterniones de norma 1 que dan lugar al *grupo cuaterniónico* ó *simpléctico 1-dimensional* (sobre $\mathbb{H}$):

$$Sp(1) = \{h \in \mathbb{H} \mid \|h\| = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) \mid |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \simeq SU(2)$$

Por ello, desde el punto de vista de los grupos de Lie clásicos, obtenemos un doble recubrimiento $Sp(1) \simeq \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(3)$ cuyo centro es $Z(Sp(1)) = \{\pm 1\}$ (recuérdese de §2,5,14? que $SU(2)$ es el doble recubrimiento de $SO(3; \mathbb{R})$). La forma usual de describir el homeomorfismo entre $Sp(1) = SU(2)$ y la variedad

$\mathbb{S}^3$ está basada en los *ángulos de Euler* χ, θ, φ que describen las coordenadas de esta última variedad:

$$a = e^{\frac{1}{2}(\chi+\varphi)} \cos \frac{\theta}{2} \quad , \quad b = e^{\frac{1}{2}(\chi-\varphi)} \sin \frac{\theta}{2} \quad .$$

Estas observaciones justifican a posteriori las identificaciones llevadas a cabo usualmente en topología donde se interpreta la esfera n -dimensional cuaterniónica

$$\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^n := \{h \in \mathbb{H}^{n+1} \mid \|h\| = 1\} =_{\mathbb{R}} \mathbb{S}_{\mathbb{R}}^{4n+3}$$

(por analogía con la situación compleja donde la esfera compleja $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^n \simeq \mathbb{S}_{\mathbb{R}}^{2n+1}$). Asimismo, se identifica el grupo de los automorfismos de $\mathbb{H}^{n+1}$ que conservan la norma cuaterniónica con $Sp(n+1)$, es decir,

$$Sp(n+1) = \{A \in Aut_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{n+1}) \mid \|Ah\| = \|h\|\}$$

(de hecho esta igualdad se ha presentado como una definición en el §2,5,3,9 y §2,5,4,5 para evitar este tipo de disquisiciones).

5.4. References

La selección del “mejor” texto introductorio a Grupos y Álgebras de Lie no es elemental, debido a la multiplicidad de motivaciones, contextos y posibles aplicaciones.

En el marco de la presente asignatura, es decir, desde el punto de vista de la Geometría Diferencial, el libro de Warner (1983) es aceptable, aunque los ejemplos son realmente escasos (por no decir nulos salvo los triviales) y las aplicaciones inexistentes, algo que sólo se puede entender por la manía bourbakista de la época, en la que era necesario borrar todas las pistas al pasado, a la historia o las posibles aplicaciones.

En realidad, para aprender los aspectos básicos de grupos y álgebras de Lie no es imprescindible tener conocimientos de Geometría Diferencial, pues la teoría es esencialmente algebraica y, en menor medida, topológica. Por ello, los excelentes libros de Bourbaki, Humpreys, Serre ó Springer llevan a cabo una introducción algebraica, pero presentan el mismo inconveniente que el señalado más arriba en relación con [War83].

Para entender bien de qué se está hablando es necesario “bajar a la arena” del cálculo matricial que luego se recupera vía la Teoría de Representación en un contexto más amplio. Una muy buena referencia moderna es [Hal03], aunque existen otras clásicas con aún más detalles como [Jac62] ó [Mne86].

Una aproximación próxima en espíritu a cuestiones de Geometría y Topología Diferencial se puede ver en [Bro85]. Algunas excursiones hacia aplicaciones menos frecuentes, pero de gran interés en relación con grupos discretos aparecen en [Oni90]

El manual [Ful91] presenta un enfoque mucho más intuitivo y amigable que las aproximaciones formales llevadas a cabo entre los años cincuenta y ochenta. Además, está escrito por dos de los mejores expertos en Geometría Algebraica, lo cual garantiza la aplicabilidad a aspectos geométricos de gran interés para aplicaciones recientes en Física Teórica.

Algunas excelentes referencias están relacionadas con diferentes aspectos de la *Mecánica Clásica* en el marco de la Geometría Simpléctica [Gui82], la Mecánica de Medios Continuos [Mar09], las extensiones usando el método de órbitas [Kir04] ó las más recientes vinculados a cuestiones de Gran Unificación en Física Teórica [Don11].

Las *aplicaciones a Robótica* se pueden ver en [Mur94] con desarrollos adicionales en trabajos de J.Burdick o de J.Otrowski de finales de los noventa; algunas aplicaciones relacionadas con robots la cinemática de robots con patas se presenta en el módulo 3 de mi Curso sobre Robótica.

Las *aplicaciones a la Visión Computacional* se pueden ver en [Ma03]; algunas contribuciones adicionales relacionadas con algoritmos en tiempo real se pueden ver en los capítulos finales de los módulos 2 (en relación con la Reconstrucción 3D en tiempo real), 3 (en relación con la Navegación asistida por Visión) y 4 (donde se aplican grupos y álgebras de dimensión infinita para modelos de

deformación en Reconocimiento) del CEViC (materia B_3 en mi página web).

5.4.1. Referencias para grupos y álgebras de Lie

- [Bou98] N. Bourbaki: *Lie groups and Lie algebras. Chapters 1-3*, Springer-Verlag 1998; *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4-6*, Springer, Berlin, 2002;
- [Bum04] D. Bump: *Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 225, Springer, New York, 2004
- [Bro85] T. Bröcker, T. tom Dieck : *Representations of Compact Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 98, Springer, New York, 1985.
- [Che49] C. Chevalley: *Theory of Lie Groups*, Princeton Univ. Press, 1949
- [Jac62] N. Jacobson : *Lie algebras*, Republication of the 1962 original. Dover Publications, Inc., New York, 1979.
- [Mne86] R. Mneimné, et F. Testard : *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann eds, Coll. Méthodes, 1986.
- [Ser77] J.-P. Serre : *Linear representations of finite groups*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977
- [Ser92] J.-P. Serre : *Lie algebras and Lie groups*, 1964 lectures given at Harvard University, Second edition. LNM 1500. Springer-Verlag, Berlin, 1992
- [War83] F. Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

5.4.2. Tópicos avanzados

- [Don11] S.K. Donaldson: *Lectures on Lie groups and geometry*, 2011 (available in the web)
- [Ful91] W. Fulton and J. Harris: *Representation Theory. A First Course*, GTM, Springer-Verlag, 1991.
- [Hal03] B. Hall: *Lie Groups, Lie algebras and Representations*, GTM, Springer-Verlag, 2003.
- [Hel78] S. Helgason: *Differential Geometry, Lie groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.
- [Hum73] J. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, New York: Springer, 1973.
- [Kir04] A. A. Kirillov: *Lectures on the orbit method*, Graduate Studies in Mathematics, 64. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [Oni90] A. L. Onishchik, E. B. Vinberg: : *Foundations of Lie Theory*, in : *Lie Groups and Lie Algebras II*, Enc. Math. Sci., vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1990
- [Ser87] J.-P. Serre : *Complex semisimple Lie algebras*, Springer-Verlag, 1987 (2nd ed 2001).
- [Spr98] T. A. Springer : *Linear algebraic groups* (2nd ed). Progress in Mathematics, 9. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.

5.4.3. Aplicaciones a otras áreas

[Gui83] V. Guillemin and S. Sternberg: *Symplectic techniques in physics*, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Mar97] J. Marsden: *Lectures on Mechanics* (2nd ed), London Math. Soc., Cambridge Univ. Press, 1997.

[Ma03] Y. Ma, S. Soatto, J. Kosecka and S. Sastry: *An Invitation to 3-D Vision From Images to Models*, Springer Verlag, 2003.

[Mur94] R.M. Murray, Z. Li and S.S. Sastry: *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, 1994.