2.3 Inmersiones y Embebimientos

Javier Finat

Índice

En este capítulo del módulo 2 y en el siguiente se muestran diferentes procedimientos que permiten describir y estudiar subvariedades de una variedad dada. Para ello, se dispone de dos procedimientos que consisten esencialmente en "sumergir" el conjunto en una variedad ambiente más simple cuya estructura se supone conocida (producto de espacios euclídeos ó proyectivos, de esferas, grassmannianas, típicamente) ó, alternativamente, obtener el conjunto que se desea estudiar como cierta "fibra regular" de una función (como una "especie de rodaja" ó de superficie de nivel) ó, con más generalidad, de un morfismo verificando ciertas condiciones de regularidad. En este capítulo se desarrolla el primer método en el contexto de inmersiones o. con más precisión, embebimientos; el estudio del segundo se aborda en el capítulo siguiente §2,4 en el contexto de submersiones.

Los fibrados vectoriales y los morfismos entre fibrados proporcionan un marco general para abordar el estudio de propiedades de variedades. Una justificación intuitiva de esta aparente complicación consiste en que cada fibrado permite representar y gestionar formalmente propiedades, funcionales ó sistemas dinámicos que se superponen a las variedades. Por ello, la primera sección está dedicada a presentar un formalismo mínimo sobre fibrados vectoriales que extiende algunas propiedades presentadas sobre el fibrado tangente.

1. Morfismos entre fibrados

En esta sección introducimos las nociones abstractas básicas relativas a morfismos entre objetos (fibrados vectoriales) para facilitar la gestión de la información global sobre variedades.

1.1. Sucesiones exactas de espacios vectoriales

La situación de espacios vectoriales es bien conocida. No obstante, resumimos algunos resultados significativos para la extensión al caso de fibrados vectoriales. Cada espacio vectorial representa la fibra $\pi^{-1}(b)$ en un punto base $b \in B$ de un fibrado vectorial $\xi = (E, \pi, B, F)$. En todos los casos, el objetivo es disponer de un formalismo que permita mostrar cómo pegar las fibras $\pi^{-1}(b)$ de manera consistente con la C^r-estructura del espacio base B.

Nótese que esta construcción se puede extender a otros tipos de estructuras en las que se disponga de sucesiones exactas como las de grupos G ó módulos M sobre un anillo base A. Esta extensión se desarrolla en el módulo 3 de Geometría Algebraica dedicado a Esquemas y proporciona soporte asimismo a la Geometría Analítica.

1.1.1. Núcleo de una aplicación lineal

Dada una aplicación lineal $\varphi : V \to W$ entre dos espacios vectoriales, llamamos *núcleo de* φ y lo representamos mediante $Ker(\varphi)$ al conjunto $\{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$. La aplicación $Ker(\varphi) \to V$ dada por la inclusión es inyectiva. Esta condición se representa mediante $0 \to Ker(\varphi) \to V$ y, en ocasiones, mediante $Ker(\varphi) >\!\!\to V$.

Recordemos que una aplicación lineal φ es inyectiva si y sólo si $Ker(\varphi) = \underline{0}$. Por ello, el núcleo $Ker(\varphi)$ mide el "defecto de inyectividad" de φ, es decir, en cuánto difiere φ de ser inyectiva, ó si prefiere, las relaciones entre los vectores del espacio de partida V asociadas a la imagen de φ.

1.1.2. Conúcleo de una aplicación lineal

Sobre el espacio vectorial de llegada W introducimos la relación de equivalencia siguiente:

$$w_1 \sim w_2 \;\Leftrightarrow \exists v \in V \;\mid\; w_1 - w_2 = \varphi(v) \ .$$

Al cociente $W/\sim$ del espacio vectorial W por esta relación de equivalencia se le llama el *conúcleo de* φ y se le representa mediante $Coker(\varphi)$ (ó de forma más tradicional, mediante $W/Im(\varphi)$).

Intuitivamente, el conúcleo de un morfismo en una categoría es el "mayor objeto" que anula la imagen de dicho morfismo. La aplicación $W \to Coker(\varphi)$ dada por la proyección es obviamente suprayectiva. La condición se representa mediante $W \to Coker(\varphi) \to 0$ y, en ocasiones mediante $W \to\!\!> Coker(\varphi)$.

Recordemos que una aplicación lineal φ es suprayectiva si y sólo si $CoKer(\varphi) = \underline{0}$. Por ello, el conúcleo $CoKer(\varphi)$ mide el "defecto de suprayectividad" de φ, es decir, en cuánto difiere φ de ser suprayectiva, ó si prefiere, las relaciones entre los vectores del espacio de llegada W procedentes de la aplicación φ.

1.1.3. Aplicaciones biyectivas: Caracterización intrínseca

Una aplicación lineal $\varphi : V \to W$ entre dos espacios vectoriales es biyectiva si y sólo si $Ker(\varphi) = Coker(\varphi) = \underline{0}$. El isomorfismo resultante $V \simeq E$ se denota también mediante

$$0 \;\to\; V \;\to\; W \;\to\; 0\ .$$

1.1.4. Sucesión exacta larga

Un morfismo definido sobre una colección a lo sumo numerable de espacios vectoriales $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una colección de aplicaciones lineales $\varphi_i : V_i \to V_{i+1}$ para $i \in \mathbb{N}$. Asociada a la colección de morfismos φ_i se tiene una sucesión

$$\ldots \to V_{i-1} \to V_i \to V_{i+1} \to \ldots$$

Diremos que la sucesión es *exacta en* i si $Im(\varphi_{i-1}) = Ker(\varphi_i)$. Diremos que la sucesión es *globalmente exacta* si es exacta en i para cualquier i. Para cada espacio vectorial V_i podemos considerar una sucesión

$$0 \to Ker(\varphi_i) \to V_i \to Coker(\varphi) \to 0$$

que es exacta por construcción.

Ejercicio.- Extiende las nociones anteriores al caso de grupos o módulos sobre un anillo. Esboza un procedimiento para pegar estos datos utilizando la C^r-estructura del espacio base B para un fibrado o, con más generalidad, una fibración sobre B.

1.2. Morfismos de fibrados vectoriales

El objetivo de esta subsección es extender las construcciones de espacios vectoriales al caso global de morfismos entre fibrados vectoriales.

1.2.1. Morfismo entre fibrados vectoriales

Un morfismo $\Phi : \xi \to \eta$ entre dos fibrados vectoriales $\xi = (E, \pi_E, M, F_\xi)$, $\eta = (F, \pi_F, M, F_\eta)$ *sobre una misma C^r-variedad M* es una C^r-aplicación $E \to F$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & = & M \end{array}$$

cuya restricción a la fibra $E_p \rightarrow F_p$ da una aplicación lineal compatible con las C^r-estructuras asociadas a los fibrados ξ, η.

1.2.2. Ejemplo

Dada $f \in C^r(N, P)$ entre dos variedades lisas N y P, veremos que $f^*(\tau P)$ es un fibrado vectorial sobre N, al que se llama imagen recíproca del fibrado tangente τP de P. La aplicación diferencial df de f induce una aplicación $\tau N \rightarrow f^*(\tau P)$ que es un morfismo entre dos fibrados dados sobre N. Las propiedades de f se describen en términos del álgebra lineal asociada a los morfismos entre fibrados vectoriales sobre N.

1.2.3. Primera Aproximación a la noción de núcleo y conúcleo

Intuitivamente, podríamos definir el núcleo $Ker(\Phi)$ y el conúcleo $Coker(\Phi)$ mediante la colección de los núcleos y conúcleos de las fibras, es decir, conjuntistamente

$$\begin{array}{ccccccc} Ker(\Phi) & := & \{Ker_p(\Phi) & := & Ker[\Phi_p : \xi_p \rightarrow \eta_p] & \mid & p \in M\} \\ Coker(\Phi) & := & \{Coker_p(\Phi) & := & Coker[\Phi_p : \xi_p \rightarrow \eta_p] & \mid & p \in M\} \end{array}$$

Lamentablemente, el núcleo y el conúcleo de un morfismo entre fibrados vectoriales *no tiene por qué ser un fibrado vectorial*, pues puede fallar la condición de trivialidad local. En efecto, consideremos el morfismo (ejemplo tomado de Husemoller, p.34):

$$\varphi : [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1] \times \mathbb{R} \ \mid \ \varphi(t,x) \ := \ (t, tx) \ .$$

Entonces, $ker_t(\varphi) = 0$ para $t \neq 0$ y $ker_0(\varphi) = \mathbb{R}$, mientras que $coker_t(\varphi) = 0$ para $t \neq 0$ y $coker_0(\varphi) = \mathbb{R}$. La condición de trivialidad local no puede verificarse porque la dimensión de la fibra sobre el origen "salta". Otros ejemplos más sofisticados que no abordaremos, proceden de la Teoría de Operadores Elípticos entre espacios de secciones de fibrados vectoriales (los operadores de Fredholm entre espacios de Banach son un caso particular de aquéllos).

Este tipo de ejemplos pone de manifiesto que parece razonable imponer al menos que el morfismo tenga "rango constante", es decir, que el rango de la aplicación lineal $\Phi_p : \xi_p \rightarrow \eta_p$ dada por la restricción de Φ a las fibras sea constante:

1.3. Sucesiones Exactas de Fibrados Vectoriales

Dada una colección de fibrados vectoriales $\{\xi_i\}$ sobre una misma C^r-variedad M y morfismos $\Phi_i : \xi_i \to \xi_{i+1}$ entre fibrados, interesa caracterizar bajo qué condiciones podemos "pegar" los datos relativos a núcleos y conúcleos de las aplicaciones lineales $\Phi_i \mid_p : (\xi_i)_p \to (\xi_{i+1})_p$ obtenidas al restringir el morfismo a las fibras respectivas.

La condición crucial para construir un objeto global con estructura de fibrado vectorial consiste en que el morfismo tenga *rango constante*.

1.3.1. Caracterización

Proposición.- Si un morfismo $\Phi : \xi \to \eta$ entre fibrados vectoriales sobre un mismo espacio base M, tiene rango constante, entonces $ker(\Phi)$, $Im(\Phi)$ y $Coker(\Phi)$ son fibrados vectoriales sobre M.

En particular, si Φ es un monomorfismo de fibrados, es decir, si la familia de núcleos $\{Ker_x(\Phi)\}_{x\in M}$ *tiene rango constante*, entonces $Ker(\Phi)$ es un fibrado vectorial sobre M. Análogamente, si Φ es un epimorfismo de fibrados, es decir, si la familia de conúcleos $\{Coker_x(\Phi)\}_{x\in M})$ *tiene rango constante*, entonces $Coker(\Phi))$ es un fibrado vectorial sobre M.

Demostración.- Basta comprobar la condición de trivialidad local para un entorno U suficientemente pequeño de cada punto $p \in M$. Supongamos que e (respectivamente f) denota el rango del fibrado vectorial ξ (respectivamente, η). Expresamos el morfismo $\Phi : \xi \to \eta$ mediante una colección de aplicaciones parametrizada por $p \in M$:

$$\phi : M \times \mathbb{R}^e \to M \times \mathbb{R}^f \ \mid \ \phi(p, v) \ := \ (p, \Phi_p(v)) \ ,$$

donde $\Phi_p : \mathbb{R}^e \to \mathbb{R}^f$ representa una sección (es decir, el morfismo Φ se puede representar mediante una sección asociada $M \to Hom(\mathbb{R}^e, \mathbb{R}^f)$ del fibrado $HOM(\xi, \eta)$). Para cada punto base $p \in M$, descomponemos la aplicación lineal que aparece en la fibra según el rango:

$$\mathbb{R}^e \simeq \xi_p = Ker(\Phi_p) \oplus V \ \to \ Im(\Phi_p) \oplus W \simeq \mathbb{R}^f \ ,$$

donde (en virtud de los teoremas usuales de isomorfía para espacios vectoriales) $dim(V) = dim(Im(\Phi_p)) = k$. Por ello, $dim(ker(\Phi_p) = e-k$ y $dim(Coker(\Phi_p)) = f - k$ son constantes. A partir de estos datos es fácil obtener un isomorfismo entre espacios vectoriales

$$\Psi : Ker(\Phi_p) \oplus V \oplus W \ \to \ Ker(\Phi_p) \oplus Im(\Phi_p) \oplus W \ ,$$

de dimensión $e + f - k$. Como los isomorfismos forman un abierto en el conjunto de las aplicaciones lineales, la aplicación lineal precedente se extiende a los puntos de un abierto U de $p \in M$ suficientemente pequeño. Por ser un isomorfismo entre las fibras que depende continuamente del punto base $p \in M$, se tiene que la inversa depende también continuamente del punto base $p \in M$

Por ello, la asignación dada por $p \mapsto \phi(p, v)$ define efectivamente una *sección continua* del conjunto de morfismos entre los fibrados vectoriales ξ y η

Ejercicio.- Visualizad la asignación precedente en términos de las grassmannianas de k-planos dados como imágenes de los morfismos $\Phi_p : \xi_p \to \eta_p$, cuando $p \in M$).

Indicación: Con la notación anterior, la fibra $ker(\Phi_p : \xi_p \to \eta_p$ de $ker(\Phi)$ sobre el punto p está dada por el conjunto de pares $(p, v) \in M \times \mathbb{R}^e$ tales que $v = v_1 + v_2 \in Ker(\Phi_p) \oplus V$ con $v_1 = 0$, por lo que $ker(\Phi_p) = \Psi(Ker(\Phi_p))$. Este isomorfismo entre las fibras y la continuidad de la sección mostrada más arriba, dan la C^r-equivalencia $U \times Ker(\Phi) \simeq E(ker\Phi\mid_U)$ requerida.

El razonamiento para $Coker(\Phi)$ es similar y se deja como ejercicio.

1.3.2. Sucesión exacta de morfismos entre fibrados vectoriales

Definición.- Dada una colección de morfismos $\Phi_i : \xi_i \to \xi_{i+1}$ entre fibrados vectoriales, diremos que forman una sucesión exacta de fibrados vectoriales sobre M, si el núcleo y el conúcleo de cada Φ_i está definido como fibrado vectorial sobre M y si $Im(\Phi_i) = Ker(\Phi_{i+1})$ para cualquier i.

Estamos interesados sobre todo en la situación relativa a sucesiones exactas *cortas* de fibrados vectoriales sobre una variedad M. La situación inicial mejor conocida procede de la linealización de aplicaciones:

1.4. Linealización de una aplicación y fibrados tangentes

En el capítulo anterior se ha mostrado que el espacio total TM del fibrado tangente τ_M sobre una C^r-variedad base M tiene estructura de C^r-variedad. Esta estructura se obtiene pegando las C^r-estructuras asociadas a los abiertos de trivialización U gracias a las C^r-equivalencias $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^m$. El mismo argumento se utiliza para demostrar que el espacio total de cualquier fibrado vectorial ξ sobre una variedad base B tiene asimismo estructura como C^r-variedad.

En muchas aplicaciones interesa estudiar la linealización de las aplicaciones proyección del fibrado o bien linealizar los morfismos entre fibrados; un caso particularmente importante concierne a aplicaciones entre variedades que, en el caso más sencillo, son inmersiones o submersiones [1]

Para motivar la linealización de aplicaciones entre fibrados, empezamos recordando el caso básico correspondiente a la variación de la información tangencial. Habitualmente, dada una aplicación $f \in C^r(M, N)$, no existe isomorfismo entre T_pM y $T_{f(p)}N$. Para medir la "falta de exactitud" se introduce la sucesión exacta de espacios vectoriales

[1] Este análisis proporciona una motivación simplificada para desarrollos que se llevan a cabo en GAGA en términos de diferenciales relativas.

$$0 \ \rightarrow \ Ker(d_pf) \ \rightarrow \ T_pM \ \rightarrow \ T_{f(p)}N \ \rightarrow \ Coker(d_pf) \ \rightarrow \ 0 \ .$$

Los dos casos particulares más simples se presentan cuando la sucesión anterior es corta, es decir, cuando d_pf es inyectiva, en cuyo caso diremos que f es una *inmersión local en* $p \in M$, ó cuando d_pf es suprayectiva, en cuyo caso, diremos que f es una *submersión local en* $p \in M$. En el §2,4 estudiaremos estas últimas. El resto del §2,3 esta dedicado al estudio de las inmersiones. La comparación entre estos datos y su variación conduce de forma natural al estudio de fibrados verticales (a lo largo de la fibra) y sus morfismos. La posible variación en el rango de las aplicaciones consideradas motiva la introducción de espacios de k-jets (clases de polinomios de Taylor formales truncados en grado k)

1.4.1. Fibrado Tangente Vertical

La aplicación de trivialización local $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$ de un fibrado es la restricción de la aplicación proyección $\pi : R \rightarrow B$ de un fibrado vectorial ξ sobre una C^r-variedad base B para $r \geq 2$. Como el espacio total $E(\xi)$ tiene estructura de C^r-variedad tiene sentido hablar de la diferencial $d\pi$ de π

Definición.- Llamamos fibrado tangente vertical al núcleo $Ker(d\pi)$ de π

La interpretación geométrica es casi trivial: El fibrado tangente vertical "colapsa" la variación de primer orden de los datos tangenciales a lo largo de la fibra (aunque no necesariamente los de orden superior). Por ello, proporciona una aproximación de primer orden a la variación infinitesimal de las fibras; esta noción tiene gran interés en relación con fibraciones de variedades en GAGA y proporciona una motivación (de hecho, la versión ingenua) del lugar de anulación correspondiente a la ramificación de un morfismo suprayectivo (no necesariamente con el mismo rango). Una motivación conocida de la Teoría de Funciones de una Variable Compleja aparece en relación con el comportamiento de la ramificación de aplicaciones entre superficies de Riemann. Otras motivaciones más cercanas a aplicaciones prácticas aparecen en relación con el análisis de texturas en Visión Computacional.

Ejercicio avanzado.- Supongamos que M es una membrana elástica deformable en las direcciones normales (exterior o interior). Modela las transformaciones que afectan a la superficie que no generan deformaciones normales. Aplícalo a la visualización del comportamiento de tejidos (ropa, piel) en animación por computador.

Nota avanzada.- Esboza un modelo para el comportamiento de un fluido estacionario sumergido en un medio casi-homogéneo en términos del fibrado tangente vertical. Â¿Qué representa la falta de trivialidad del fibrado?

1.4.2. Relación entre fibrados verticales

Sea $f : N \rightarrow P$ un embebimiento de N como subvariedad de P. Entonces, la imagen recíproca $f^{-1}\tau_P$ del fibrado tangente a P es un fibrado vectorial sobre N. En este caso, el embebimiento f induce un morfismo inyectivo de τ_N en $f^{-1}\tau_P$. Cada una de las aplicaciones proyección $\pi_{P,N} : f^{-1}\tau_P \to N$ y $\pi_N : \tau_N \to N$ tiene un fibrado tangente vertical correspondiente a la anulación de las variaciones de primer orden de los vectores tangentes del espacio ambiente P y de la subvariedad N. Por ello, se tiene una inclusión natural $Ker(d\pi_N) \subset Ker(d\pi_{P,N})$.

Ejercicio.- Extiende la construcción descrita para fibrados tangentes a un morfismo cualquiera $(F, f) : \xi \to \eta$ entre dos fibrados vectoriales.

1.4.3. Una reformulación en términos de espacios de jets

En presencia de singularidades complicadas (que no sean cruzamientos normales) la aproximación basada en una evaluación del comportamiento de primer orden es insuficiente. Nótese que la cáustica (envolvente de las normales) correspondientes a una lente parabólica da una cúspide ordinaria (llamada parábola semicuspidal por I.Newton a principios del s.XVIII). De hecho, este es el caso más simple, pues *todas* las cáusticas tienen singularidades complicadas, algo que ya era conocido por Lagrange a principios del s.XIX, aunque aún no tuvieran herramientas para clasificar y resolver los problemas asociados a la propagación en medios continuos (no necesariamente isótropos). Para fijar ideas, es necesario empezar por el caso local, es decir, en lugar de trabajar con aplicaciones $f \in C^r(N, P)$, se trabaja con $f \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ que se denota abreviadamente como $f \in C^r(n, p)$

Por ello, es importante disponer de un formalismo que permita abordar el estudio de fibraciones más generales que las consideradas en los apartados anteriores. De una manera intuitiva, un k-jet de una aplicación $f \in C^r(n, p)$ para $r \geq k + 1$ es (el germen de) un desarrollo de Taylor formal truncado en grado k. En particular, para $r = 1$ obtenemos esencialmente la misma información topológica que para la diferencial df de f.

Ejercicio (avanzado).- Extiende la noción de espacio tangente vertical al contacto vertical de orden 2 para la matriz hessiana $Hess(f)$ de una función $f \in C^r(n, 1)$. Â¿Cómo controlas la falta de regularidad (determinante nulo para la matriz hessiana) de la condición de contacto? Â¿Puedes extender esta idea a contacto de orden superior? [2]

1.4.4. Algunas extensiones y aplicaciones

La noción de fibrado tangente vertical permite relacionar la topología de los espacios base y total de un fibrado a través de la topología de la fibra. Para ello, utiliza invariantes topológicos globales (clases de cohomología) que relacionan dichas topologías. En Topología Diferencial Global se muestra que existe un

[2] Estos tópicos se desarrollan con más detalle en el módulo sobre Clasificación de Aplicaciones de Topología Diferencial

isomorfismo (R.Thom) entre las topologías de los espacios bases y total que extiende el enfoque de KÃ$\frac{1}{4}$nneth mostrado en Topología Algebraica.

Este isomorfismo se extiende a fibraciones con condiciones menos estrictas (como las que aparecen en GAGA); para ello, es necesario desarrollar un formalismo de Sucesiones Espectrales (Leray) que permiten relacionar los invariantes topológicos asociados a espacios base, fibras y estructuras (haces) superpuestas al espacio base [3]

El cálculo explícito de invariantes topológicos (clases de cohomología) ha permitido desarrollar aplicaciones de este enfoque a Física Teórica desde los años setenta del s.XX. Estos tópicos se abordan en el módulo 7 de este Curso en el contexto de las Teorías de Unificación de interacciones electromagnética, débil y fuerte.

[3] En Bott and Tu: *Differential Forms in Algebraic Topology*, GTM, Springer-Verlag se puede ver una excelente aproximación a este difícil formalismo algebraico que conecta el enfoque diferencial con el topológico

2. Inmersiones

La condición de ser variedad diferenciable es a menudo demasiado estricta y conviene disponer de herramientas para describir el comportamiento de objetos que presentan "cruzamientos" ó "aristas". Una restricción natural para controlar estas propiedades es la noción de transversalidad

En esta sección se presentan las nociones básicas relacionadas con inmersiones (incluyendo la forma local), ejemplos básicos, algunas aplicaciones a otras Geometrías y elementos de transversalidad entre variedades.

2.1. Nociones básicas

2.1.1. Inmersión local

Definición.- Diremos que $f : M \to N$ es una inmersión local en $p \in M$ si $d_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ es inyectiva.

Nota.- Por construcción, cualquier parametrización local es una inmersión. Sin embargo, una inmersión puede presentar singularidades debidas

2.1.2. Inmersión global

Diremos que $f : M \to N$ es una *inmersión* si es una inmersión local en p para cualquier $p \in M$, es decir, si d_pf es inyectiva $\forall p \in M$.

2.1.3. Ejemplos avanzados

La botella de Klein admite una inmersión en $\mathbb{R}^3$ que no es un embebimiento.

2.1.4. Reconocimiento y clasificación

El reconocimiento afecta a construir la transformación que lleva la forma actual en la forma canónica usando transformaciones entre las ecuaciones que definen la variedad. La clasificación de aplicaciones es un tópico importante en Topología Diferencial y sus aplicaciones a las diferentes Geometrías. Las herramientas son completamente diferentes para los casos local y global.

- El caso local se aborda en términos de la clasificación de gérmenes de C^r-aplicaciones que se representan mediante la clase del desarrollo formal de Taylor de orden k al que se llama k-jet de la aplicación. Este tópico se aborda en el módulo 3 del Curso de Topología Diferencial.
- El caso global se aborda en términos de las formas locales de una aproximación lineal a la aplicación en términos de inmersiones o submersiones.

En la subsección siguiente se aborda el caso correspondiente a la forma local de una inmersión.

2.2. Forma Local de una inmersión

La versión inyectiva del Teorema de las Funciones Implícitas (ver §1,2,8 para detalles), muestra la forma que presenta una *inmersión local* $f : M \to N$ para un entorno suficientemente pequeño del punto $p \in M$ en términos de la aplicación identidad. En otras palabras, si f es una inmersión local, existe un cambio de coordenadas tal que la inmersión local g escrita en el nuevo sistema local de coordenadas $\underline{y}$ está dada localmente por

$$(y_1, \dots, y_m) \;\to\; (y_1, \dots, y_m), g_{m+1}(y_1, \dots, y_m, \dots g_n(y_1, \dots, y_m))$$

por lo que la diferencial $d_{p)}g$ se representa mediante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_2} \\ & & \dots & 0 & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Como el Teorema de las Funciones Implícitas es local, si f es una inmersión local en p, entonces f es una inmersión local para un entorno suficientemente pequeño U de p.

2.2.1. Observaciones sobre la definición

- Una aplicación de clase C^r no tiene por qué ser una inmersión, aunque globalmente sea inyectiva.
- La imagen de una inmersión puede ser un denso en el espacio de llegada, aunque su dimensión sea estrictamente menor

El resto de la subseccion se aplica sobre todo en Geometría Algebraica o Geometría Analítica, por lo que sólo se incluye a titulo informativo.

Ejercicio.- Muestra ejemplos de las dos afirmaciones anteriores (*Indicación:* Spivak, Vol.1, pp.2.26 y ss.).

2.2.2. Singularidades ordinarias de hipersuperficies

El *lugar singular de una hipersuperficie* dada localmente por $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ en $\mathbb{K}^n$ está dado por

$$f(\underline{x}) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

Las *singularidades ordinarias* de una hipersuperficie irreducible H están caracterizadas por una unión de componentes no-singulares A_i con $1 \leq i \leq r$ tales que

- $H = A_1 \cup \ldots A_r$
- La intersección $A_i \cap A_j$ es normal (ó bien vacía) para $1 \leq i < j \leq r$.

Dichas componentes reciben el nombre de *ramas*.

Ejercicio.- Comprueba que la forma local normal de una singularidad ordinaria de una curva plana es de la forma $f(x, y) = xy$ y recibe el nombre de punto doble ó nodo. *Ejemplo:* La curva nodal típica es $f(x, y) = y^2 - x^2 + x^3 = 0$ cuyo cono tangente en el origen (forma inicial) es de la forma $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ (diagonales de cuadrantes equivalentes a l unión de los dos ejes)

2.2.3. El caso de superficies

Las *singularidades ordinarias de superficies* son ejemplo de inmersiones de uno de los tipos siguientes:

- *Curva doble:* con forma local normal dada por $f = xy = 0$ con ramas $x = 0$ e $y = 0$ que corresponden al lugar de anulación del ideal jacobiano $Jac(f) = (f_x, f_y) = (y, x)$ de la forma normal.
- *Puntos triples:* con forma local normal dada por $xyz = 0$ con ramas $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ que corresponden al lugar de anulación del ideal jacobiano $Jac(f) = (f_x, f_y, f_z) = (yz, xz, xy)$ de la forma normal.
- *Puntos pinzados:* con forma local normal dada por $x^2 - y^2 z = 0$ con ramas $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ con dos hojas cortándose normalmente a lo largo del eje Oz que es el lugar de anulación del ideal jacobiano $Jac(f) = (f_x, f_y, f_z) = (x, yz, y^2)$ de la forma normal.

Los puntos pinzados (llamados cross-caps en la literatra anglosajona) también se llaman paraguas de Whitney ó sombrilla de Cartan

Ejercicio.- Comprueba que las *singularidades ordinarias de sólidos tridimensionales* son ejemplo de inmersiones de uno de los tipos siguientes:

- *Superficie doble:* con forma local normal dada por $f = xy = 0$ con ramas $x = 0$ e $y = 0$ que corresponden al lugar de anulación del ideal jacobiano $Jac(f) = (f_x, f_y) = (y, x)$ de la forma normal.
- *Curva de Puntos triples:* con forma local normal dada por $xyz = 0$ con ramas $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ contenidas en el lugar de anulación del ideal jacobiano $Jac(f) = (f_x, f_y, f_z) = (yz, xz, xy)$ de la forma normal.
- *Puntos cuádruples:* con forma local normal dada por $xyzw = 0$ con ramas $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $w = 0$ contenidas en el lugar de anulación del ideal jacobiano $Jac(f) = (f_x, f_y, f_z, f_w) = (yzw, xzw, xyw, xyz)$ de la forma normal.

- *Curva de puntos pinzados:* con forma local normal dada por $x^2 - y^2z = 0$ con ramas $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ con dos hojas cortándose normalmente a lo largo del eje Oz que es el lugar de anulación del ideal jacobiano $Jac(f) = (f_x, f_y, f_z) = (x, yz, y^2)$ de la forma normal.
- *Puntos estacionarios* correspondientes a la intersección de la curva de puntos triples y de la curva de puntos pinzados.

2.2.4. Complementos

El primer caso no elemental en Geometría corresponde al estudio de curvas algebraicas contenidas en superficies. Inicialmente se supone que dichas curvas son no-singulares, es decir, están dadas como la imagen de un embebimiento. Interesa identificar qué curvas son equivalentes entre sí.

Para ello se definen diferentes relaciones de equivalencia (algebraica, racional, homológica, numérica) sobre una superficie y se estudian las clases de equivalencia por dichas relaciones a las que se llama ciclos. Estos tópicos se abordan en el módulo 4 de Geometría Algebraica. [4] Dos extensiones naturales de este enfoque motivan el estudio de tópicos tales como

- Superficies en 3-folds algebraicas, que es relativamente "fácil" pues se trata de clases de hipersuperficies (por alguna de las relaciones de equivalencia mencionadas más arriba).
- Curvas en Variedades de dimensión 3 (incluyendo como caso particular curvas algebraicas en $\mathbb{P}^3$) ó con más generalidad, subvariedades de codimensión 2 de una variedad algebraica.

Ambos tópicos son altamente no-triviales y presentan una gran cantidad de problemas abiertos que se abordan en el módulo 4 de Geometría Algebraica.

2.3. Inmersiones de variedades proyectivas

Un caso especialmente importante de inmersiones corresponde a variedades algebraicas proyectivas. En este caso, el lugar de ceros de una colección finita de polinomios define una variedad compacta en el proyectivo, por lo que la aplicación es *propia* de forma automática.

2.3.1. Inmersión de curvas racionales

Un ejemplo típico de inmersiones aparece en relación con proyecciones de la curva racional normal sobre el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$. La curva racional normal $\mathcal{C}^d$ de grado d se define como la imagen de la d-ésima aplicación de Veronese:

$$i_V^d : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d \quad | \quad [t_0 : t_1] \mapsto [t_0^d : t_0^{d-1}t_1 : \ldots : t_0 t_1^{d-1} : t_1^d]$$

[4] Ver D.Mumford: *Algebraic Curves on Surfaces*, para un análisis más detallado.

Las coordenadas proyectivas $[x_0 : x_1 : \ldots : x_d]$ de un punto del espacio de llegada satisfacen las ecuaciones correspondientes a la anulación de todos los menores de tamaño 2×2 de una matriz persimétrica que escribimos como

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_1 \end{pmatrix}_2$$

ó como una intersección de cuádricas $x_i x_j - x_{j-1} x_{i+1} = 0$ para $0 \leq i < j \leq d$ que se puede visualizar en forma continua como

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \ldots = \frac{x_{d-1}}{x_d}$$

Si se proyecta $\mathcal{C}^d$ desde un punto cualquiera de la curva se obtiene una curva singular. Para fijar ideas, en el apartado siguiente se analiza con más detalles el caso más simple no-trivial.

2.3.2. Ejemplo: Cúbica racional normal

La cúbica racional normal $\mathcal{C}^3$ se define como $i_V^3(\mathbb{P}^1)$; es intersección de las cuádricas

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3}$$

Como la intersección de dos cualesquiera de dichas cuádricas es la unión de la curva $\mathcal{C}^3$ y una recta (disjunta con respecto a las otras dos rectas obtenidas por el mismo procedimiento), son necesarias las tres cuádricas para definir globalmente $\mathcal{C}^3$ aunque localmente (fuera de un cerrado que contiene a cada recta) bastan dos. Por otro lado, se construyen

- La *variedad 1-secante*

$$Sec(1, \mathcal{C}^3) \ := \ \{p \in \mathbb{P}^3 \mid p \in \overline{q_0 q_1} \textbf{ con } q_0, q_1 \in \mathcal{C}^3$$

- La *variedad 1-tangente* (de hecho el espacio total del fibrado tangente)

$$Tg(1, \mathcal{C}^3) \ := \ \{p \in \mathbb{P}^3 \mid p \in \ell = tg_q \mathcal{C}^3 \textbf{ con } q \in \mathcal{C}^3$$

Por cómputo de parámetros es inmediato ver que $Sec(1, \mathcal{C}^3)$ es una variedad 3-dimensional en $\mathbb{P}^3$ que contiene a la variedad 2-dimensional $Tg(1, \mathcal{C}^3)$ (que se obtiene cuando $q_0 = q_1$). En particular y desde un punto de vista conjuntista se tiene que $Sec(1, \mathcal{C}^3) = \mathbb{P}^3$. Por ello, a través de cualquier punto $\mathbf{C} \in \mathbb{P}^3$ pasa (al menos) una recta secante (llamada "cuerda" en la terminología de la Geometría Algebraica Italiana del s.XIX) que da lugar a un nodo sobre la imagen por la proyección central $\pi_{\mathbb{C}} : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2$. Algunas consecuencias son

- Cualquier proyección de la curva racional normal $\mathcal{C}^3$ presenta nodos como singularidades genéricas.

- Si el centro de proyección $\mathbb{C}$ está sobre la variedad 1-tangente, entonces la imagen $\pi_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}^3)$ presenta cúspides.

El argumento es similar cuando se proyecta la curva racional normal $\mathcal{C}^d$ de grado d sobre el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ mediante la composición de $d-2$ proyecciones centrales desde puntos "en posición general" con respecto a la curva.

Ejercicio.- Analiza qué tipo de singularidad se presenta si el centro de proyección $\mathbb{C}$ pertenece a la cubica racional normal $\mathcal{C}^3$

2.3.3. Inmersiones del plano proyectivo

El plano proyectivo no se puede sumergir en un espacio 3-dimensional sin singularidades. Existen diferentes candidatos que permiten visualizar el plano proyectivo como la imagen de una inmersión con diferentes tipos de singularidades ordinarias.

Sea $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación dada por $f(x : y : z) := (yz, xz, xy)$. La imagen de esta aplicación recibe el nombre de *superficie de Steiner*.

Ejercicio.- Verifica que la imagen de la superficies de Steiner tiene 6 cúspides, por lo que *no es una inmersión*. La superficie resultante proporciona una visualización local de la transformación de Cremona estándar del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ (ver mis notas del Curso de Geometría Algebraica Clásica para detalles y complementos).

Un estudio más detallado del contexto geométrico de este ejemplo se presenta al final de este §2,3 en relación con la Geometría Algebraica Proyectiva Compleja Clásica.

2.3.4. Superficies B-splines

De una forma intuitiva, una superficie B-spline de bigrado (d_1, d_2) es un producto de curvas racionales algebraicas lisas de grados d_1 y d_2, respectivamente. Para fijar ideas, se considera inicialmente la parametrización dada por la curva racional normal de grado d que está determinada por $d+1$ puntos a los que se asignan "pesos" dados por los coeficientes del triángulo de Tartaglia.

En las aplicaciones más frecuentes se toma $d_1 = d_2 = d$; el primer caso no-trivial corresponde a bicúbicas con $d = 3$ de uso extendido en modelado mecánico y, con más generalidad, de objetos deformables (incluyendo la posibilidad de animación basada en imagen, video o volúmenes deformables). Para estos últimos aspectos más avanzados interesa estudiar el comportamiento "en familia" de este tipo de superficies, incluyendo la posibilidad de que puedan adquirir singularidades (representadas como inmersiones locales) [5]

[5] Para más detalles ver los capítulos sobre modelado en los módulos 2, 4 y 5 del CEViC

2.4. Elementos de curvas en superficies

El estudio de curvas C en superficies S es uno de los tópicos centrales en cualquiera de las Geometrías Diferencial, Algebraica y Analítica. Este estudio es el primer caso a desarrollar antes de abordar el estudio de subvariedades de codicmensión ≥ 1. Inicialmente se supone que la aplicación (inmersión o embebimiento) $f : C \to S$ está fija y se estudian las propiedades que relacionan ambos objetos a través de la sucesión exacta que relaciona los fibrados tangentes τ_C y $f^*\tau_S = \tau_S \mid_C$ en el caso liso con el fibrado normal como conúcleo de la aplicación.

El estudio en el marco GAGA es similar, pero es necesario reemplazar los módulos de derivaciones por haces de diferenciales debido a la posible aparición de singularidades; en el caso algebraico o analítico, el haz de las diferenciales relativas juega el mismo papel que el fibrado normal en el caso suave. El objeto análogo en GAGA a los fibrados tangentes para curvas y superficies está representado por los haces de diferenciales y los lugares jacobianos que presentan un comportamiento bastante más complicado que el descrito para el caso suave.

En el marco GAGA, las relaciones de (in)dependencia se evalúan integrando las diferenciales sobre ciclos, lo cual motiva el desarrollo de herramientas cohomológicas más avanzadas que las presentadas en este Curso. En el caso complejo, las diferenciales a lo largo de ciclos no son directamente integrables pero presentan relaciones de periodicidad que facilitan el estudio de las propiedades cualitativas que son invariantes por deformación. En este caso, el objeto clave para llevar a cabo este estudio es la $(2g \times g)$-matriz de períodos cuyos aspectos básicos de tipo geométrico se abordan en términos de Grasmmannianas $Grass(g, 2g)$ y que reaparecen más adelante (ver capítulo 7 de este módulo) como variedades lagrangianas.

De forma análoga a lo que ocurre en el caso suave, una primera cuestión a resolver es si es posible recuperar una curva algebraica a partir de su jacobiana. Este problema tiene una larga historia que va desde los primeros resultados (Teoremas de Abel y de Jacobi, en el primer cuarto del s.XIX) hasta el Teorema de Torelli a mediados del s.XX. La extensión de este tipo de argumentos a variedades complejas compactas de dimensión arbitraria es el origen de la Teoría de Picar-Lefschetz que se desarrolla a principios del s.XX y se reformula a mediados del s.XX de forma netamente cohomológica por W.Hodge. En la actualidad, sigue siendo un tópico importante de investigación.

Estos desarrollos ponen de manifiesto la mayor dificultad del caso GAGA con respecto al caso suave. Por ello y para fijar ideas, sólo consideraremos el caso suave. Además de los materiales contenidos en los módulos 3 y 4 de mi Curso sobre Geometría Algebraica, una referencia para el caso algebraico sigue siendo [Mum64] [6]

Una vez identificadas las propiedades básicas de curvas en superficies, la estrategia habitual consiste en imponer condiciones adicionales (como la de ser geodésicas, con respecto a una métrica en el caso riemanniano,, p.e.) o bien

[6] D.Mumford: *Lectures on Curves on Algebraic Surfaces*, mimeographed notes, 1963-64

el estudio de las deformaciones de dichas curvas, manteniendo las restricciones ligadas a estar contenidas en superficies.

Estos tópicos son más avanzados que los correspondientes a un curso introductorio, por lo que sólo se presenta una pequeña introducción a cada uno de los tópicos mencionados.

2.4.1. Propiedades básicas

2.4.2. Geodésicas en superficies riemannianas

2.4.3. Deformaciones sobre el fibrado normal

3. Embebimientos

Motivación La imagen de una inmersión no tiene por qué ser una C^r-subvariedad. En efecto, la versión inyectiva del Teorema de la Función Implícita sólo permite garantizar que la imagen de cada punto tiene un entorno "parametrizable", que no tiene por qué ser necesariamente un abierto de N. En particular, puede presentar cruzamientos con tangentes distintas (nodos) ó puede aplicar puntos "próximos al infinito" en pequeñas regiones de la imagen (ver ejercicios). Estos comportamientos "patológicos" se evitan añadiendo condiciones a f:

Recordemos de la Topología Conjuntista que una aplicación se dice que es *propia* cuando la imagen inversa de un compacto es un compacto. La forma práctica de verificar esta condición se lleva a cabo en términos de convergencia de sucesiones de puntos contenidos en un compacto.

3.1. Embebimientos

Se muestra la definición y se reconvierte la descripción al estudio de funciones suaves definidas sobre una variedad.

3.1.1. Noción de embebimiento

Diremos que una aplicación $f : M \to N$ de clase C^r es un C^r-*embebimiento* si f es una inmersión *inyectiva* y *propia*, en cuyo caso lo representaremos mediante $M \hookrightarrow N$.

Nota.- Desde el punto de vista diferencial, una variedad M y su imagen por un embebimiento $e(M)$ son indistinguibles; en otras palabras, tienen los mismos espacios de funciones de clase C^∞. Ello se traduce en que el objeto intrínseco a estudiar es dicho espacio $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Ejercicio.- Sea $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ un embebimiento. Demostrad que para cualquier $\underline{x} \in i(M)$ existe un sistema de coordenadas locales $x_1, \dots, x_N$ tal que $i(M)$ está dado por $f_i(x_1, \dots, x_N) = 0$ para $i = 1, \dots N - m$ con $rang(Jac(F))(\underline{x}) = N - m$ (*Indicación:* Utilizad el Teorema de las Funciones Implícitas)

3.1.2. Observaciones

Cualquier curva cerrada simple (es decir, sin auto-intersecciones) $\mathcal{C}$ es imagen por un embebimiento vía φ de una circunferencia $\mathbb{S}^1$; por ello, se la puede considerar como equivalente a $\mathbb{S}^1$. La métrica sobre la circunferencia induce una métrica sobre $\mathcal{C}$ que permite introducir una noción de proximidad entre los embebimientos φ [7].

[7] La formalización de esta idea intuitiva no es elemental y se lleva a cabo en el módulo 4 del CEViC en términos de la métrica de Peterson-Weil sobre el espacio de moduli

Más adelante (módulo 6) se analiza la compatibilidad entre estructuras métricas en términos en *embebimientos isométricos*, es decir, aplicaciones $f : (M,g) \to (N,h)$ entre variedades riemannianas que conservan la métrica, es decir, tales que $g = f^*h$. De una forma más explícita se tiene que

$$g(\xi,\eta) \;=\; h(df(\xi), df(\eta)) \qquad \forall \xi,\eta \in T_xM$$

La condición de ser un embebimiento es, en ocasiones, muy estricta y conviene "relajarla" en términos de inmersiones isométricas que permiten "cruzamientos normales" entre "ramas". En particular, una *inmersión isométrica* es una inmersión entre variedades riemannianas que conserva la métrica y, en particular, la longitud de las curvas.

Un *problema abierto* importante es extender los argumentos anteriores sobre proximidad a inmersiones; este problema presenta una dificultad que crece exponencialmente con el aumento de dimensión de las variedades que se analizan.

- Cualquier inmersión es *localmente* un embebimiento.
- Globalmente, la afirmación precedente deja de ser cierta y es necesario contar con criterios efectivos que permitan comparar las inmersiones.

Estas consideraciones motivan el análisis del espacio de las inmersiones isométricas o, con más generalidad de las conexiones que permiten "trasladar" objetos geométricos sobre una variedad sin que se modifiquen sus propiedades globales [8]

Ejercicio.- Verifica que el nodo ordinario ó la lemniscata son inmersiones localmente pero no globalmente (ver *Ejercicio 2.3.13.2* para más detalles).

3.1.3. Embebimiento de (productos de) esferas

El embebimiento del torno se realiza en términos de funciones suaves (de clase C^∞) sobre el toro.

- El embebimiento estándar del toro $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^3$ se realiza mediante la rotación de una circunferencia en torno a un eje. *Ejercicio.-* Verificad que las coordenadas cartesianas son funciones suaves sobre el toro.
- Para cualquier $p < q$ describir un embebimiento estándar $\mathbb{S}^p \hookrightarrow \mathbb{S}^q$.
- Existe un embebimiento estándar $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \hookrightarrow \mathbb{R}^{p+q+1}$.

Ejercicio.- Â¿Es posible realizar un embebimiento del toro $\mathbb{T}^2$ en la esfera $\mathbb{S}^2$? Nótese que la aplicación que a cada punto $p \in \mathbb{T}^2$ le lleva en un vector normal al toro de norma unidad (cuyo afijo es un punto de $\mathbb{S}^2$) es una aplicación suave.

[8] Estos tópicos se abordan en el módulo 6 del Curso de Geometría Diferencial

El resultado siguiente permite dar una caracterización directa (en términos de aplicaciones) de la noción de subvariedad sin recurrir a la descripción de restricciones de C^r-estructuras:

3.1.4. Transversalidad y embebimientos propios

La noción de embebimiento de variedades se extiende de forma natural a variedades con borde. Para ello, es necesario introducir la noción de transversalidad; este tópico se desarrolla con más detalle en el capítulo siguiente, por lo que en este apartado sólo se presenta una versión débil.

La noción de transversalidad es la opuesta de la noción de tangencia entre variedades ó con más generalidad de "contacto" entre gérmenes de aplicaciones. Frecuentemente, se presenta el espacio normal $N_{\underline{x}}M$ en cada punto $\underline{x} \in M$ como el "ortogonal"; sin embargo, la condición de ortogonalidad es demasiado estricta y requiere una métrica o al menos un producto interior no-degenerado sobre la variedad.

Definición.- Diremos que dos subvariedades N_1 y N_2 de una variedad M son *transversales en* $p \in M$ si y sólo si la intersección es vacía o bien

$$N_1 \pitchfork N_2 \;\Leftrightarrow\; T_pM = T_pN_1 + T_pN_2 \qquad \forall p \in N_1 \cap N_2$$

Nótese que la suma de espacios tangentes no tiene por qué ser directa. Así, si dos superficies en $\mathbb{R}^3$ son tangentes en p, entonces $T_pN_1 = T_pN_2 \simeq \mathbb{R}^2$ que está contenido estrictamente en $T_p\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$. Por el contrario, si $T_pN_1 \neq T_pN_2$, entonces $T_pN_1 + T_pN_2 = T_p\mathbb{R}^3$ y las superficies se cortan transversalmente en $p \in N_1 \cap N_2$

Definición.- Dada una C^r-aplicación $f : (N, \partial N) \to (P, \partial P)$ entre dos variedades con borde, diremos que es un *embebimiento propio* si

- $f(\partial N) = f(N) \cap \partial P$, y
- $f(N)$ es transversal a ∂P en cualquier punto de $f(\partial X)$.

es decir, la aplicación se "comporta bien" con respecto al borde o dicho más formalmente, es compatible con el Teorema de la Invariancia del Dominio en la C^r-categoría. La primera condición equivale a que

$$f(\partial N) \subseteq \partial P \quad \text{y} \quad f(N \setminus \partial N) \subseteq P \setminus \partial P$$

mientras que la segunda dice que $f(N)$ no es tangente al borde ∂P de P.

Nota avanzada.- El "buen comportamiento" con respecto al borde permite resolver problemas de optimización o de control para trayectorias singulares en las que a priori no son aplicables las técnicas usuales de optimización no-lineal. Para ello, basta identificar una variedad transversal a la singularidad (normal al cono tangente de la singularidad) y utilizar principios básicos asociados a las simetrías que "controlan" el comportamiento de las diferentes ramas en el entorno de una singularidad.

Esta idea tan simple se ha aplicado a diferentes cuestiones en Robótica en relación con el control de reciprocadores; el instante crítico a controlar corresponde al aterrizaje ó impacto contra el suelo. Los reciprocadores son dispositivos para ayudar a andar a personas parapléjicas para la locomoción. Dejando a un lado las cuestiones relacionadas con la mecatrónica de estos dispositivos, la singularidad más simple que aparece en la fase de aterrizaje es una cúspide ordinaria. La estabilización se lleva a cabo mediante pequeños impulsos asociados a simetrías infinitesimales en torno a las trayectorias esperadas; estas simetrías se traducen en mecanismos de anticipación y compensación [9]

3.2. Subvariedades y Embebimientos

El resultado central de esta subsección muestra que la imagen de un embebimiento es una subvariedad. Este resultado motiva la identificación habitual entre una variedad y su imagen por un embebimiento. Esta identificación es un abuso de notación, pues una variedad tiene una naturaleza intrínseca que "pierde" cuando se muestra como imagen de un embebimiento; en este último caso, "hereda" la C^r-estructura en la que está embebida. No obstante y para no complicar excesivamente la notación, se adopta esta identificación como "natural".

3.2.1. Embebimiento de subvariedades

Proposición.- La imagen de un C^r-embebimiento es una C^r-subvariedad, y recíprocamente, es decir, cualquier subvariedad P de N es imagen de un embebimiento $f : M \to N$.

Demostración.- En virtud de los resultados anteriores (razonad cuáles como ejercicio) basta comprobar que la imagen V de cualquier abierto U de M es un abierto de $f(M)$. Para verlo, supongamos contrariamente que $f(U)$ no es un abierto de $f(M)$. Entonces, existirían sucesiones de puntos

$$q_i \in f(M) - f(U) \ \mid \ q_i = f(p_i) \to q = f(p) \in f(U) \text{ cuando } i \to \infty$$

Como $\{p, p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ es compacto, entonces existe una subsucesión que converge hacia algún $r \in M$, por lo que $f(p_i) \to f(r)$ cuando $i \to \infty$. Pero, como f es inyectiva, tenemos $p = r$. Usando ahora que U es abierto, llegamos a que $p_i \in U$ para $i >> 0$, en contra de que $f(p_i) = q_i \notin f(U)$.

[9] Para más detalles ver las notas del Curso impartido en el Instituto J.Fourier y las del Caltech

3.2.2. Notas y comentarios

- Si M es *compacta*, entonces cualquier aplicación $f : M \to N$ es *propia*. En este caso, la condición para f de ser un embebimiento equivale a que f sea una *inmersión inyectiva*, lo cual es bastante más sencillo de verificar. Esta es la situación usual en Geometría Algebraica y muy frecuentemente en Geometría Analítica de Varias Variables Complejas; por ello, frecuentemente se define la noción de embebimiento en dichas Geometrías como una inmersión inyectiva, aunque ello represente un abuso de notación desde el punto de vista topológico.
- Si f es una aplicación inyectiva que es un difeomorfismo local $\forall p \in M$, entonces f es un *homeomorfismo global* sobre la imagen. Esta formulación corresponde de hecho al único criterio directo relativamente fácil de verificar cuando la variedad M tiene algún tipo de "homogeneidad" dada por la acción de algún grupo sobre M (ver final del §2,1 para una Introducción; volveremos sobre esta cuestión en repetidas ocasiones).
- Aplicando la versión inyectiva del Teorema de la Función Implícita, podemos dar una nueva caracterización de embebimientos en los términos siguientes: *f es un C^r-embebimiento si, y sólo si, f es una C^r-inmersión que aplica X homeomórficamente sobre su imagen.* Esta nueva descripción subraya el hecho de que la imagen de un C^r-embebimiento es un objeto *global*.

En el capítulo §2,5 se muestra la utilidad de los embebimientos para caracterizar algunos grupos clásicos (especial lineal, ortogonal, unitario) como subvariedades del grupo lineal general.

3.2.3. Elementos básicos de nudos

El estudio de los embebimientos de una variedad puede presentar una gran complejidad. Los embebimientos de $\mathbb{S}^1$ dan lugar a las curvas cerradas simples que son todas ellas topológicamente equivalentes entre sí. Sin embargo, los embebimientos de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^3$ dan lugar a la Teoría de Nudos, uno de los tópicos centrales de la Topología Geométrica. En este apartado sólo se comentan algunas ideas básicas relacionadas con la "presentación algebraica" de nudos "suaves".

3.3. Existencia de embebimientos

El resultado central de esta subsección es el Teorema de Severi-Whitney que muestra una cota minimal para la dimensión de embebimiento de una variedad compacta m-dimensional M en un espacio cartesiano $mathbbR^N$ de dimensión N suficientemente grande. Si la variedad es compacta se puede recubrir por un número finito de abiertos para los que la construcción local del embebimiento es sencilla: Basta sumergirla en un espacio de dimensión muy elevada y proyectar sobre subespacios de dimensión menor mientras no se produzcan singularidades al proyectar.

Por ello, la idea intuitiva consiste en evitar las singularidades que pueden aparecer al proyectar la variedad embebida en $\mathbb{R}^N$; dichas singularidades corresponden a las rectas que cortan en (al menos) dos puntos eventualmente coincidentes a la variedad trazadas desde el centro $\mathbf{C}$ de proyección. Por ello, "hay que evitar" los centros de proyección situados sobre "cuerdas", es decir, que se encuentran situados sobre las rectas $\overline{pq}$ que pasan por dos puntos $p, q \in M$ y su cierre en la grassmanniana de rectas. Para poder elegir centros de proyección que no estén sobre alguna cuerda, es necesario que la variedad de secantes (cierre de la unión de rectas) "no llene" todo el espacio ambiente $\mathbb{R}^N$. Por ello, el primer objeto a analizar es la variedad de secantes.

3.3.1. Variedad de secantes

Idea intuitiva (F.Severi, H.Whitney): La variedad de secantes $Sec(1, M)$ a una variedad compacta M

$$Sec(1, M) \ := \{z \in \overline{xy} \mid \ \forall (x, y) \in M \times M - \Delta_M\}$$

tiene, en general, dimensión $2m + 1$; si la dimensión es inferior a lo esperado, se dice que la M tiene una variedad de secantes "pequeña" (el estudio de este tipo de variedades tiene interés en Geometría Algebraica y en Combinatoria). Si $Sec(1, M)$ es una variedad propia, la proyección desde cualquier punto de $Sec(1, M)$ da lugar al menos a un nodo (correspondiente a la imagen común de los dos puntos definidos por la cuerda $\overline{xy}$. Por ello, la dimensión mínima esperada para el embebimiento es $2m + 1$; análogamente, la dimensión mínima esperada para una inmersión de una variedad genérica es $2m$ (aunque la mayor parte de espacios homogéneos admite una dimensión de embebimiento inferior).

Ejercicio.- Si $\mathcal{C}_n$ es la curva racional de grado n embebida en $\mathbb{P}^n$ por la *inmersión de Veronese* (de hecho un embebimiento) $i_1^V(n)$ de grado n de $\mathbb{P}^1$, verifica que

- Cualquier proyección de la cúbica racional normal $\mathcal{C}_3$ sobre $\mathbb{P}^2$ tiene siempre un nodo (como mínimo). *Indicación:* Comprobad que $Sec(1, \mathcal{C}_3) = \mathbb{P}^3$.
- La proyección genérica de la cuártica racional normal $\mathcal{C}_4$ sobre $\mathbb{P}^3$ no tiene singularidades. *Indicación:* Nótese que $Sec(1, \mathcal{C}_4)$ es una hipersuperficie cúbica en $\mathbb{P}^4$ (describirla) y tomar como centro $\underline{p}$ de la proyección π_p : $\mathbb{P}^4 \to \mathbb{P}^3$ cualquier punto $\in \mathbb{P}^4 \backslash Sec(1, \mathcal{C}_4)$ (abierto denso en $\mathbb{P}^4$).

Estos ejemplos básicos ponen de manifiesto que la clave para controlar las singularidades que aparecen al proyectar está en la construcción de la variedad de secantes para un embebimiento en un espacio de dimensión "suficientemente grande"

Esta subsección está dedicada a mostrar cómo refinar y formalizar este argumento.

3.3.2. Teorema de Severi-Whitney

Teorema.- Sea M una C^r-variedad *compacta Hausdorff*. Entonces, existe un C^r-embebimiento $M \hookrightarrow \mathbb{R}^q$ para un valor de q suficientemente grande.

Idea de la demostración (según Hirsch, 1976):

Denotemos mediante $D^m(\rho) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m \quad | \quad |\underline{x}| < \rho\}$ al disco de radio ρ en $\mathbb{R}^m$, donde $m = dim(M)$. Como M es compacta, existe un atlas finito $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i\}_{i=1}^k$ verificando que

$$\varphi_i(U_i) \supset D^m(2) \quad , \quad M = \cup Int\varphi_i^{-1}(D^m(1)) \ .$$

Denotemos mediante $\lambda : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ a una función de clase C^∞ igual a 1 sobre $D^m(1)$ y 0 sobre $\mathbb{R}^m - D^m(2)$ (a este tipo de funciones se les llama "funciones meseta" y son de uso frecuente en la construcción de las particiones de la unidad). Definimos ahora

$$\lambda_i : M \to [0,1] \quad \text{mediante } \lambda_i := \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda \circ \varphi_i & \text{sobre} & U_i \\ 0 & \text{sobre} & M - U_i \end{array} \right\}$$

Entonces, los conjuntos $B_i := \lambda_i^{-1}(1) \subset U_i$ recubren M. Por último, definimos las aplicaciones

$$f_i : M \to \mathbb{R}^m \quad \text{mediante } f_i := \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_i(x)\varphi_i(x) & \text{si} & x \in U_i \\ 0 & \text{si} & x \in M - U_i \end{array} \right\}$$

consideramos $g_i := (f_i, \lambda_i) : M \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{m+1}$ y definimos

$$G := (g_1, \ldots, g_k) : M \ \to \ \mathbb{R}^{m+1} \times \overset{k}{\ldots} \ldots \times \mathbb{R}^{m+1} \ = \ \mathbb{R}^{k(m+1)}$$

que es de clase C^r, es una inmersión en cada punto x (por serlo cada g_i y es inyectiva. Para verlo, supongamos que $x \neq y$ con $y \in B_i$. Hay dos posibilidades:

- $x \in B_i \Rightarrow g(x) \neq g(y)$ (pues $f_i \mid_{B_i} = \varphi \mid_{B_i}$).
- $x \notin B_i \ \Rightarrow \ \lambda_i(y) = 1 \neq \lambda_i(x) \ \Rightarrow \ g(x) \neq g(y)$.

La cota suministrada por el resultado precedente es "muy tosca", pues existen gran cantidad de variedades compactas que admiten embebimientos en espacios de dimensión inferior a la mostrada por este teorema (la esfera, el espacio proyectivo, las grassmannianas y, en general, cualquier espacio con una "cantidad suficiente" de simetrías). Por ello, el resultado siguiente es de utilidad. Además permite relacionar las nociones de inmersión y embebimiento con la construcción de las variedades de secantes y tangentes a una variedad dada.

3.3.3. Teorema débil de Severi-Whitney

Teorema.- Sea M una variedad real compacta Hausdorff de dimensión m. Entonces, existe un embebimiento de M en $\mathbb{R}^{2m+1}$.

.. ver demostración p.e. en Hirsch, 1976, pp.24-27...

3.4. Embebimientos de dimensión menor de lo esperado

Es obvio que existen variedades particulares que admiten embebimientos en espacios de dimensión más pequeña que la dada por el Teorema de Severi-Whitney, como por ejemplo la esfera m-dimensional $\mathbb{S}^m$ que admite embebimiento en $\mathbb{R}^{m+1}$, ó la suma conexa de toros 2-dimensionales que admite embebimiento en $\mathbb{R}^3$, ó el toro m-dimensional $T^m = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ embebible en $\mathbb{R}^{m+1}$ (describir ambas).

Más arriba (ver inmersión de Veronese) se ha mostrado un ejemplo correspondiente a la variedad de Veronese cuya variedad de secantes tiene dimensión una unidad inferior a la esperada. Mientras que en los espacios homogéneos (esfera, toro, espacio proyectivo, botella de Klein) la disminución de la dimensión se debe a la homogeneidad del espacio, en el caso de las variedades de Veronese, la disminución de la dimensión se debe a la homogeneidad en la acción del grupo simétrico que actúa sobre los monomios de grado d.

En otras palabras, las acciones de grupos (sobre variedades ó sobre funciones regulares) dan lugar a dimensiones inferiores a la esperada para la variedad de secantes, es decir, es posible llevar a cabo una mayor "compresión" de la información relativa a la variedad. De una forma intuitiva: cuantas más simetrías, mayor capacidad de compresión. En el caso "más simple" de funciones, el marco natural para abordar este tipo de cuestiones corresponde a las representaciones del grupo simétrico que no se consideran en este Curso (ver no obstante, MacDonald, Stanley, Knuth, etc para una aproximación "clásica")

Volviendo al contexto geométrico, la existencia de variedades con pequeñas variedades secantes, no invalida el resultado anterior, pues el Teorema de Severi-Whitney proporciona una cota *general*, a partir de la cual se puede estudiar si la variedad con la que trabajamos admite embebimiento en espacios afines de dimensión más pequeña. Estas variedades son muy interesentes en Geometría Algebraica donde reciben el nombre de variedades con "pequeñas" variedades secantes (ver mis notas de Geometría Algebraica para más detalles) que se comentan más abajo.

3.4.1. Variedades de secantes

La construcción presentada en la demostración del Teorema de Severi-Whitney muestra que el objeto a analizar para describir embebimientos es la *variedad de* *secantes*. En la demostración realizada hemos usado una C^r-variedad, dada por el cierre de

$$\{z \in \mathbb{R}^q \mid z \in \overline{xy} \quad , \qquad \text{donde} \ \ (x,y) \in M \times M - \Delta_M\} \ ,$$

donde $\Delta_M = \{(x,x) \in M \times M \mid x \in M\}$. Esta variedad parametriza el conjunto de puntos del espacio ambiente situados sobre rectas que cortan a M en al menos dos puntos (que pueden ser coincidentes ó no). Llamamos *rectas secantes a M* a $\overline{xy}$ donde $(x,y) \in M \times M - \Delta_M$.

La adherencia de la imagen de la aplicación que a cada par $(x,y) \in M \times M - \Delta_M$ le asocia la recta $\overline{xy}$ de la Grassmanniana da lugar a una subvariedad de la grassmanniana de rectas $Grass(1,q) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{q-1}$ que parametriza el cierre de las rectas secantes. Esta es una subvariedad algebraica de la Grassmanniana $Grass(1,q)$, a la que denotamos por $S_1(M)$ e incluye los puntos correspondientes a las rectas tangentes a M.

El conjunto de puntos de $\mathbb{K}^q$ situados sobre el cierre de las rectas secantes, es una variedad algebraica (en general, singular) de $\mathbb{K}^q$, a la que denotaremos por $Sec(1,M)$ cuya dimensión sobre $\mathbb{K}$ es menor ó igual que $2m+1$. La posibilidad de que M admita embebimiento en $\mathbb{K}^h$ para algún $h < 2m+1$, depende de la dimensión de $Sec(1,M)$ (a veces también se dice que la dimensión "esperada" para $Sec(1,M)$ es $2m+1$).

Recíprocamente, las "obstrucciones" a que una variedad M admita un embebimiento en un espacio $\mathbb{K}^q$ se manifiestan como singularidades que aparezcan al proyectar M sobre $\mathbb{K}^q$. Por tanto, estas singularidades proceden de rectas secantes ℓ (que cortan a la variedad original en los "puntos dobles aparentes") y de su adherencia, que reciben el nombre de secantes generalizadas (en particular, tangentes).

Así, por ejemplo una curva compleja algebraica lisa $\mathcal{C}$ admite un embebimiento en $\mathbb{CP}^3$; si la curva no es una cónica, la variedad de secantes es todo $\mathbb{CP}^3$. Por ello, a través de cualquier punto $\mathbf{O} \notin \mathcal{C}$ pasan secantes a $\mathcal{C}$ y, como la variedad de rectas tangentes a $\mathcal{C}$ es 2-dimensional, podemos elegir un centro de proyección $\mathbf{O} \notin t_p\mathcal{C}$ para cualquier $p \in \mathcal{C}$.

Denotemos mediante $C := \pi(\mathcal{C})$ la curva plana que es imagen de $\mathcal{C}$ via una proyección "genérica" (es decir, desde $\mathbf{O} \notin t_p\mathcal{C}$ para cualquier $p \in \mathcal{C}$) sobre un plano general $\Pi \subset \mathbb{CP}^3$. Entonces, C sólo tiene un número finito de nodos como singularidades (los nodos dejan de ser ordinarios, es decir, con dos ramas distintas, si la recta secante corta en más de dos puntos a la curva).

En general, las rectas secantes dan lugar a diferentes tipos de singularidades en la imagen que corresponden a familia de puntos en la fibra dadas por la intersección $\ell \cap M$, donde ℓ es una recta genérica variable que pasa por el centro de proyección $\mathbf{O}$, es decir, está parametrizada por la estrella proyectiva con vértice $\mathbf{O}$. Es posible formalizar estas ideas usando algunos rudimentos de Geometría Algebraica, pero ello excede la aproximación diferencial elemental que consideramos aquí, donde excluimos la aparición de singularidades.

3.4.2. Variedades con pequeñas variedades de secantes

Problema General: Estudiar las variedades M tales que $Sec(1, M)$ tienen dimensión *inferior* a la esperada (es decir, menor que $2m + 1$). A este tipo de variedades se les llama variedades con "pequeñas" variedades de secantes. Si X es una variedad algebraica proyectiva compleja de dimensión $n \leq 3$ se conoce una descripción completa de todas las variedades no-degeneradas cuya variedad de secantes tiene dimensión inferior a la esperada. Se ignora la solución de este problema en dimensión superior (1989).

Esta cuestión está estrechamente vinculada a las singularidades que aparecen al proyectar y que se pueden detectar en términos de las singularidades de las variedades de secantes. Es necesario un mejor conocimiento de los casos extremos. Para una curva racional normal $\mathcal{C}_n$ de grado n en $\mathbb{P}^n$ si $Sec(k+1, \mathcal{C}_n)$ es una subvariedad propia de $\mathbb{P}^n$ se tiene que $Sing(Sec(k+1, \mathcal{C}_n)) = Sec(k, \mathcal{C}_n)$. *Teorema (JF).-* Si la curva no es elíptica, entonces la inversa de la afirmación anterior es cierta, es decir, una curva cuyas variedades de secantes verifican la igualdad anterior es necesariamente equivalente a la curva racional normal.

Este resultado está motivado por la necesidad de encontrar un método constructivo a la resolución de la Conjetura Upper Bound realizada por R.Stanley a mediados de los ochenta.

4. Apéndice: Inmersiones en Geometría Algebraica

Nota previa: Toda esta sección debería ser saltada en una primera lectura ó bien omitida caso de impartirse un curso de Geometría Algebraica Clásica

El embebimiento de variedades algebraicas complejas proporciona un banco de "ejemplos" que es crucial para el estudio de variedades desde el punto de vista proyectivo. dicho embebimiento se puede abordar de forma conjuntista (imitando el análisis llevado a cabo en el contexto diferencial) ó bien en términos de (los haces de) las funciones regulares $f \in \mathcal{O}_X$ definidas sobre la variedad X. A diferencia del caso suave, en Geometría Algebraica Clásica cualquier variedad es compacta; por ello, la condición de ser propia es innecesaria para un morfismo; en otras palabras, cualquier aplicación inyectiva que sea una inmersión es un embebimiento.

La descripción conjuntista lleva a estudiar los casos inicialmente más simples en términos del embebimiento de $\mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}^d$ "más general posible" que viene dado por la curva racional normal de grado d. Este embebimiento se puede interpretar en términos de los polinomios homogéneos $\sum_{i=0}^{d} a_i x_0^{d-i} x_1^i$ de grado d en dos variables $[x_0 : x_1]$; la versión afín de esta construcción da los polinomios de grado d en una sola variable, ampliamente utilizados en Álgebra y en Análisis.

Esta idea tan simple hace aparecer la noción de "sistema lineal" d-dimensional asociado a los coeficientes $[a_0 : a_1 : \ldots : a_d]$ de los polinomios homogéneos que están parametrizados por el espacio proyectivo $\mathbb{P}^d$; la versión afín es similar reemplazando polinomios homogéneos por no-homogéneos $\sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ donde $t = x_1/x_0$ y corresponde a los embebimientos de una recta en el espacio d-dimensional mediante curvas de grado d. El embebimiento $e_1^d : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^d$ correspondiente a la curva racional normal de grado d tiene multitud de propiedades geométricas que son de gran interés para cuestiones algebraicas, combinatorias y topológicas (estas últimas en relación con la resolución de la conjetura Upper-Bound por parte de R.P.Stanley).

La construcción del embebimiento e_1^d se extiende en dos direcciones que afectan a

- La *inmersión de Veronese* $V_{n,d}$ de grado d del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ cuya imagen son todos los monomios $x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}$ con $i_0 + \ldots + i_n = d$ de grado d en $n+1$ variables $[x_0 : \ldots : x_n]$. Para cualquier polinomio homogéneo de grado d en $n+1$ variables, los coeficientes $a_{i_0 \ldots i_n}$ del polinomio (definidos salvo factor de proporcionalidad) definen un punto de un espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n_d}$

- La *inmersión de Segre* del producto de varios espacios proyectivos. El caso más simple corresponde al embebimeinto

  $$s_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \mid ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \mapsto [x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1]$$

  cuya imagen esl el hiperboloide de una hoja $z_{00} z_{11} - z_{01} z_{10} = 0$ siendo $z_{ij} = x_i y_j$ para $0 \leq i, j \leq 1$ las coordenadas proyectivoas de un punto de la imagen en $\mathbb{P}^3$. Este "ejemplo" parametriza las formas bilineales en dos variables para cada una de las entradas. La versión afin en $D_+(z_{00})$ está dada por las formas bilineales en $(1, x, y, xy)$ con la notación habitual $x = x_1/x_0$ e $y = y_1/y_0$ (nótese que $z_{01} \neq 0$ equivale a $x_0 \neq 0 \neq y_0$). Este "ejemplo"se generaliza a formas multilineales en cualquier número de variables y para cualquier grado. Esta generalización se expone con más detalle en el módulo 3 en relación con el cálculo tensorial.

De una forma extrínseca (dpendiente del embebimiento), la geometría de una variedad algebraica X se puede describir en términos de las (inter)secciones por "sistemas lineales" de hipersuperficies de grado d para $d >> 0$ (extendiendo el método de las secciones hiperplanas de la Geometría Proyectiva Lineal). De forma abstracta, dicha presentación geométrica está inducida por una (re)presentación en términos de la acción del grupo simétrico sobre n variables. De la misma forma que una matriz arbitraria descompone en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica, un tensor arbitrario descompone en suma de una componente simétrica y otra antisimétrica. Por ello, la presentación geométrica en términos de la inmersión de Segre es más general que la de realizada en términos de Veronese; obviamente, la componente complementaria de la simétrica (representada por polinomios homogéneos de grado d en n variables) es la correspondiente al álgebra alternada. En cosnecuencia, existen esencialmente dos formas para generar embebimientos de variedades algebraicas que están dadas por

- el álgebra simétrica basada en potencias de las formas lineales; en lenguaje moderno se representa mediante $\mathcal{O}_X(1)$ el haz de las secciones hiperplanas y mediante $\mathcal{O}_X(m) := \mathcal{O}_X(1)^{\otimes m}$ la m-ésima potencia de $\mathcal{O}_X(1)$;
- el álgebra antisimétrica basada en el cálculo diferencial exterior (formas diferenciales regulares u holomorfas segÂ´ñun contexto GAGA) definidas sobre una variedad X; esta presentación permite construir embebimiento que se expresan en términos del haz canónico $\mathcal{K}_X$ y sus potencias que se denotan (de forma aditiva) mediante $m\mathcal{K}_X$.

Para la descripción en términos de (haces de) funciones regulares, la noción clave para describir el embebimiento es la de *amplitud*. El significado intuitivo de esta noción es el de contar con "suficientes" secciones globales para la restricción de $\mathcal{O}_X(m)$ ó bien de $m\mathcal{K}_X$. Esta condición significa que es posible describir de una forma "completa" (sin excepciones) la geometría del objeto utilizando dichas secciones globales. De una forma intuitiva se puede interpretar dicha idea en términos de "sistemas lineales" de polinomios de grado fijo $k >> 0$, cuyas (inter)secciones con la variedad describen de forma completa la variedad. Si la variedad X es no singular, es obvio que un sistema de secciones hiperplanas corta un sistema lineal completo.

"Lamentablemente", la "mayor parte" de las variedades algebraicas tienen singularidades. Por ello, para describir la geometría de una variedad algebraica X es necesario describir cómo las singularidades imponen condiciones para las hipersuperficies utilizadas; en el lenguaje de la Geometría Algebraica Clásica de los italianos de la primera mitad del siglo XX se hablaba de diferentes tipos de hipersuperficies "adjuntas". El grado mínimo de las hipersuperficies adjuntas que cortan un sistema lineal completo sobre una variedad X es la llamada *cota de Castelnuovo-Mumford*. El caso de curvas se puede considerar como muy conocido (salvo algunas "patologías" correspondientes a característica positiva). Para superficies algebraicas se tiene bastante información en términos de diferentes tipos de adjuntas. El caso que presenta una mayor cantidad de "agujeros" es el caso tridimensional.

A continuación se presenta una descripción de algunos ejemplos básicos desde el punto de vista de la Geometría Algebraica Clásica (finales del s.XIX). La extensión de este enfoque (en términos de haces y esquemas) se aborda en cursos más avanzados de Geometría Algebraica.

4.1. La curva racional normal

La curva racional normal es una curva no-singular de grado n embebida en un espacio proyectivo de dimensión n que está definida como la *n-tupla inmersión de Veronese* de la recta proyectiva. Denotemos mediante $i_1(V_n)$ a la aplicación dada por

$$i_1(V_n) : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n \quad | \quad (x_0 : x_1) \mapsto (x_0^n : x_0^{n-1}x_1 : \ldots : x_1^n) \ .$$

A la imagen de esta aplicación se le llama la *curva racional normal de grado n*. Si $(z_i)_{0 \leq i \leq n}$ denotan las coordenadas homogéneas del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ de llegada, y $D_+(z_i) := \{\underline{z} \mid z_i \neq 0\}$, es claro que $i_1(D_+(x_0)) \subseteq D_+(z_0)$ y que $i_1(D_+(x_1)) \subseteq D_+(z_n)$. La parametrización afin usual de las imágenes de estos abiertos afines está dada por $(1, t, \ldots, t^n)$ y $(u^n, u^{n-1}, \ldots, u, 1)$. Comprobar que $i_1(V_n)$ es un embebimiento. *Indicaciones:*

Considérese la aplicación tangente $T(i_1(V_n)) : T\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to T\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ dada localmente por la asignación

$$[(1,t), 0, v] \mapsto [(1, t, \ldots, t^n), 0, (v, 2tv, 3t^2v, \ldots, nt^{n-1}v)] \ ,$$

donde la segunda componente hace referencia al abierto afin con el que estamos trabajando. Si $\phi_0 : D_+(x_0) \to \mathbb{C}$ y $\psi : D_+(z_0) \to \mathbb{C}^n$ denotan las cartas de trivialización, usando la expresión local de la aplicación tangente $D(\psi \circ i_1(V_n) \circ \phi_0^{-1})(\phi_0(1,t)(a))$, es fácil verificar que la diferencial es inyectiva (*detallad esta condición para los cambios de carta...*).

Comprueba que $i_1(V_n)$ es una aplicación biyectiva sobre su imagen y es continua (por serlo $\psi_i \circ i_1(V_n) \mid_{D_+(x_i)} \circ \phi_i^{-1}$ para $i = 1, \ldots$). Por ello, $i_1(V_n) : P^1_{\mathbb{C}} \to \mathcal{C}_n := Im(i_1(V_n))$ es un homeomorfismo. En particular, se obtiene que $\mathcal{C}_n$ es una variedad regular (no singular).

Verificad que si $(z_i)_{0 \leq i \leq n}$ son coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, entonces la curva racional normal $\mathcal{C}_n$ de grado n en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ está dada por

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \ldots & z_{n-1} \\ z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_n \end{pmatrix}_2 \ ,$$

donde esta expresión denota el ideal generado por todos los (2×2)-menores de la matriz que acabamos de mostrar.

En general, la construcción de la variedad de secantes usada en el *Teorema de Severi-Whitney* presenta cierta dificultad. No obstante, en este caso particular tenemos que la variedad de 1-secantes

$$Sec(1, \mathcal{C}_n) \; := \; \{z \in \mathbb{P}^n \;\mid\; z \in \overline{xy} \; \forall, y \in \mathcal{C}_n \; \}$$

a la curva racional normal $\mathcal{C}_n$ de grado $n \geq 4$ en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ está dada por

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \dots & z_{n-2} \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_{n-1} \\ z_2 & z_3 & z_4 & \dots & z_n \end{pmatrix}_3$$

(comprobadlo como "ejercicio"). Mostrar que $Sec(1, \mathcal{C}_n) = \mathbb{P}^n_C$ para $n = 2, 3$. Este razonamiento se extiende a la construcción de variedades de k-planos secantes a $\mathcal{C}_n$ en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ obteniéndose que

$$Sing(Sec(k, \mathcal{C})) = Sec(k-1, \mathcal{C}) \quad \text{para} k \geq 1$$

donde $Sec(0, \mathcal{C}) = \mathcal{C}$ (la igualdad anterior se refiere al caso en el que $Sec(k, \mathcal{C})$ es una subvariedad propia de $\mathbb{P}^n$ (la demostración no es elemental y sólo se usa en Geometría Algebraica).

Se ignoran extensiones de este resultado para embebimientos de espacios proyectivos $\mathbb{P}^r$ con $r > 1$. En la subsección siguiente se presenta el caso correspondiente a grado 2 que presenta una patología (menos acusada) sólo para la variedad de 1-secantes (tiene dimensión inferior a la esperada).

4.2. Embebimiento de Veronese

El embebimiento de Veronese $V_{d,n}$ de grado d para el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ corresponde a la representación geométrica de todos los polinomios homogéneos de grado d en $n+1$ variables como puntos de un espacio proyectivo; en particular, cuando $n = 1$ la imagen del embebimiento de Veronese $V_{d,1}$ es la curva racional normal de grado d en $\mathbb{P}^d$; los puntos del espacio imagen representan en este caso los polinomios homogéneos de grado d.

En el caso general, la imagen de $\mathbb{P}^n$ por $V_{d,n}$ es una variedad n-dimensional que parametriza las formas $(\sum_{i=0}^n a_i x_i)^d$ correspondientes a los hiperplanos $\sum_{i=0}^n a_i x_i = 0$ del espacio ordinario contados con multiplicidad d; estos hiperplanos se consideran como puntos de un espacio N_d cuya dimensión afín está dada por el número de permutaciones con repetición de $n+1$ elementos $x_0, \dots, x_n$ contados de d en d (razonarlo). Para fijar ideas, consideramos inicialmente la primera extensión del caso correspondiente a la curva racional normal $n = 1$, es decir, el caso $(d, n) = (2, 2)$. Este ejemplo proporciona varias pautas para diferentes extensiones que se desarrollan en la aproximación clásica a la Geometría Algebraica.

4.2.1. Cónicas del plano

Para fijar ideas, consideremos la *inmersión de Veronese de grado* 2 del *plano proyectivo* $\mathbb{P}^2$ Consideremos la aplicación

$$V^{2,2} : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}} \quad | \quad [x : y : z] \mapsto [x^2 : xy : xz : y^2 : yz : z^2]$$

correspondiente a *todos los monomios de grado* 2 en tres variables.

Fijada una referencia, cada cónica del plano $\mathbb{CP}^2$ está dada por su ecuación que podemos escribir en forma matricial mediante la 3×3-matriz simétrica $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq 2}$ cuyas entradas representan los coeficientes de la cónica. Diremos que una cónica es degenerada si $det(A) = 0$. En caso contrario diremos que la cónica es regular (ó no-degenerada). En términos matriciales, si llamamos rango de una cónica al rango de la matriz que la representa, entonces las cónicas regulares son de rango 3, mientras que las cónicas degeneradas tiene rango ≤ 2.

La inmersión de Veronese $V_{2,2}$ es la clave para *estimar una cónica.* En efecto, una cónica está determinada por una 3×3-matriz simétrica, por lo que depende de 5 parámetros (6 salvo factor de proporcionalidad). Por ello, una cónica proyectiva arbitraria $\mathcal{C}$ está unívocamente determinada por 5 puntos $\mathbf{p}_i = (x_i : y_i : z_i)$ en "posición general", es decir, no hay 3 alineados, no hay 4 circulares (Â¿qué ocurre si no están en posición general?). La condición para que $\mathbf{p}_i \in \mathcal{C}$ se expresa mediante una ecuación lineal en los coeficientes a_{ij} de la matriz de la cónica.

Ejercicio.- Describe el sistema 5×6-lineal correspondiente a que una cónica pase por 5 puntos en posición general y muestra un procedimiento efectivo para la resolución del sistema homogéneo resultante (nótese que la solución está definida salvo factor de proporcionalidad como corresponde a un punto del espacio proyectivo $\mathbb{P}^5$).

Las cónicas degeneradas forman un cerrado (tanto para la topología ordinaria como para la topología de Zariski) dado por la cúbica $det(A) = 0$ en $\mathbf{K}\mathbb{P}^5$, al que denotaremos mediante $C(V)$. Las cónicas degeneradas se pueden visualizar geométricamente como pares de rectas (en general distintas) que, a su vez pueden degenerar en una recta doble. El conjunto de las rectas dobles del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ forma un cerrado caracterizado en $\mathbf{K}\mathbb{P}^5$ por la anulación de todos los menores de orden 2 de la matriz A, es decir,

$$z_{00}z_{11} - z_{01}^2 = z_{00}z_{12} - z_{01}z_{02} = z_{01}z_{12} - z_{11}z_{02} = z_{01}z_{22} - z_{12}z_{02} = z_{11}z_{22} - z_{12}^2 = 0$$

y es la imagen de $\mathbb{P}^2$ por la inmersión de Veronese $V_{2,2}$ (verificadlo como ejercicio).

Interpretamos ahora los polinomios homogéneos de grado 2 en tres variables como el espacio $\mathbb{CP}^5$ de las cónicas del plano $\mathbb{CP}^2$. Se comprueba fácilmente que

1. $Im(V_{2,2}(\mathbb{CP}^2))$ es la variedad de cónicas degeneradas del plano
2. La aplicación $V_{2,2} : \mathbb{CP}^2 \hookrightarrow \mathbb{CP}^5$ es un embebimiento, al que se llama la "inmersión" de Veronese de grado 2 y a la imagen V se le llama la

superficie de Veronese (*Indicación:* La aplicación $\mathbb{CP}^2 \hookrightarrow \mathbb{CP}^5$ dada por la asignación

$$[x:y:z] \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+z^2}[x^2:xy:xz:y^2:yz:z^2]$$

es inyectiva y propia (el espacio proyectivo es compacto), y además tiene diferencial inyectiva).

3. Comprobad que la imagen $V_{2,2}(\mathbb{P}^2$ de $\mathbb{P}^2$ por la inmersión de Veronese i_V^2 está contenida en el hiperplano afín H dado por $\{\underline{z} \in \mathbb{P}^5 \mid z_0^2 + z_3^2 + z_5^2 = 1\}$. Por ello, $\mathbb{P}^2$ admite un embebimiento en un espacio euclídeo 5-dimensional $\mathbb{R}^5$; todas las demás inmersiones de $\mathbb{P}^2$ presentan algún tipo de singularidad:
4. La variedad de rectas secantes $Sec(1,V)$ de la superficie de Veronese es una cúbica 4-dimensional singular definida por $det(A)=0$ que representa las cónicas degeneradas, es decir, de rango ≤ 2 del plano proyectivo. En particular, l
   - La variedad de secantes a la superficie de Veronese tiene dimensión inferior a lo esperado.
   - $Sing(Sec(1,V)) = V$ (de forma análoga a lo que ocurre para la curva racional normal)
5. La restricción a la esfera $\mathbb{S}^2$ de la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $\varphi(\underline{x}) = \varphi(x,y,z) := (x^2-y^2, xy, xz, yz)$ verifica que $\varphi(\underline{x}) = \varphi(-\underline{x})$. Por ello, induce una aplicación $\mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ que es un embebimiento (comprobarlo).

ç

4.2.2. Hipercuádricas del espacio proyectivo

Toda esta construcción se extiende sin dificultad a dimensión superior, obteniéndose un doble embebimiento de Veronese $V_{2,n} : \mathbf{K}\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbf{K}\mathbb{P}^{N_2}$, donde $N_2 = \binom{n+1}{2} - 1$, cuya imagen parametriza las cuádricas degeneradas de rango 1 (es decir, los hiperplanos dobles).

Ejercicio.- Extender los resultados descritos para el caso de las cónicas del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ como puntos de $\mathbb{P}^5$ al caso de cuádricas proyectivas complejas n-dimensionales del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ como puntos de $\mathbb{P}^{N_2}$ para n arbitrario con $N_2 = \binom{n+1}{2} - 1$.

4.2.3. Práctica avanzada

Esta práctica sólo se sugiere para los interesados en Geometría Algebraica

Construid la inmersión de Veronese $V_{d,2}$ correspondiente a las curvas de grado d en el plano proyectivo complejo y analizar la geometría de $Im(V_{2,d})$ y de las "series lineales" asociadas a las intersecciones de las curvas de grado d con una curva proyectiva compleja plana cualquiera $C \subset \mathbb{P}^2$. Â¿Puedes mostrar alguna propiedad general para el caso $Im(V_{n,d})$ de las hipersuperficies de grado $d > 2$ en un espacio $\mathbb{P}^n$ como puntos de un espacio proyectivo N_d? (*Indicación:* Para una introducción ver Shafarevich: *Basic Algebraic Geometry*, GMW Springer-Verlag, 1976)

4.3. Embebimiento de Segre

La aplicación $s_{m,n} : \mathbb{RP}^m \times \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^{m+n+mn}$ dada por la asignación

$$([x_0 : x_1 : \ldots : x_m], [y_0 : y_1 : \ldots : y_m] \mapsto [x_0y_0 : x_0y_1 : \ldots : x_0y_n : x_1y_0 : \ldots : x_my_n]$$

es un embebimiento, al que se llama *embebimiento de Segre*, cuya imagen está definida como intersección no-singular de hipercuádricas lisas en las variables $z_{ij} = x_iy_j$ para $0 \leq i \leq m$ y $0 \leq j \leq n$

Para demostrarlo es conveniente recurrir inicialmente a la descripción geométrica del caso $m = n = 1$. En este caso, $Im(s_{1,1})$ es una hipersuperfice cuádrica $z_{00}z_{11} - z_{01}z_{10} = 0$. Razonad los casos $(m, n) = (1, 2)$ y $(m, n) = (2, 2)$ antes de abordar la demostración general.

Ejercicio.- Comparar el caso $m = 1$, $n = 2$ con el embebimiento de Veronese. Mostrar la relación con la construcción de variedades de secantes.

4.3.1. Una aplicación a la Geometría Epipolar en Visión Computacional

El modelo geométrico de cada vista $2D$ proporcionada por una cámara digital está dado por un plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$. La comparación entre dos vistas (datos contenidos en dos trozos de dos planos proyectivos) requiere realizar una puesta en correspondencia entre elementos homólogos de ambas vistas. La Visión Computacional proporciona criteriois para poder llevar a cabo de forma automática el proceso de puesta en correspondencia.

Si estos elementos homólogos son puntos, el espacio ambiente para la puesta en correspondencia está dada por el producto de Segre $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ de dos copias del plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ que es una variedad 4-dimensional en $\mathbb{RP}^8$ que se denota mediante $Im(s_{2,2})$.

El objetivo de la *Reconstrucción* $3D$ a partir de (al menos) dos vistas consiste en el diseño e implementación de algoritmos para la puesta en correspondencia automática entre los elementos homólogos de (al menos) dos vistas. La información redundante da lugar a errores en la estimación de puntos homólogos para pares de vistas; por ello, deben implementarse algoritmos de optimización sobre $Im(s_{2,2})$ que sean compatibles con las "restricciones estructurales" para la puesta en correspondencia (Geometría Epipolar).

Cuando se dispone de un número k de vistas, el modelo geométrico está dado por el producto $\mathbb{RP}^2 \times \ldots \times \mathbb{RP}^2$ de k copias del plano proyectivo que es una variedad $2k$-dimensional en un espacio proyectivo de dimensión $N = 3^k - 1$ (verificadlo como ejercicio). La descripción de las restricciones estructurales es intrínseca y está dada por tensores, es decir, objetos multilineales que no dependen de los sistemas de coordenadas elegidos. La estimación en tiempo real de los coeficientes de dichos tensores es un problema abierto.

4.4. Caracteres proyectivos y singularidades de proyecciones

En la Geometría de una variedad M, diremos que una propiedad es *intrínseca* cuando es independiente de cualquier embebimiento de M.

Por ejemplo, las *propiedades topológicas* de M como las relacionadas con la compacidad, la condición de ser Hausdorff, el número de componentes conexas, el número de asas (si se trata de superficies), la condición de tener borde ó no, la característica de Euler-Poincaré, etc, son propiedades intrínsecas. La condición de tener ó no campos vectoriales sin ceros es una propiedad intrínseca para una variedad. Un ejemplo más sofisticado procede del *índice de un operador elíptico* D dado sobre un espacio de funciones (que se define como $dim(Ker(D)) - dim(Coker(D))$).

Diremos que una *propiedad* es *extrínseca* si depende del embebimiento (ó de la inmersión) que damos de la variedad. Por ejemplo, en el caso de curvas, el grado ó el número de cruzamientos dependen del embebimiento ó de la inmersión concretas (respectivamente) que demos de la curva. Lo mismo podría decirse de la clase ó del número de cúspides que aparecen en una proyección.

En particular, los *caracteres proyectivos* de cualquier variedad inmersa en un espacio proyectivo son datos extrínsecos. Otro ejemplo más pertinente a la Geometría Diferencial estaría dado por la localización de los *ceros de un campo vectorial* ó por los caracteres asociados a dichos ceros. Asimismo, el *número de puntos críticos* de una función $f : M \to \mathbb{R}$ (con a lo sumo puntos críticos no-degenerados) y los invariantes asociados a ellos son datos extrínsecos. Todos ellos son fácilmente calculables en términos de Análisis Diferencial Local.

En la práctica, no es fácil determinar invariantes de Variedades, por lo que debemos calcularles en términos de caracteres más fácilmente observables ó extrínsecos. Por ello, uno de los objetivos de la Topología de Variedades consiste en *relacionar invariantes intrínsecos con caracteres extrínsecos*. La ventaja que proporcionan los embebimientos consiste en que si identificamos una variedad M con su imagen (via un embebimiento $f : M \hookrightarrow N$), podemos obtener información sobre invariantes de M en términos de los caracteres de $f(M)$ en N.

Las cúspides que aparecen al proyectar proceden de las rectas que pasan por el centro de proyección y son tangentes a la variedad. Utilizando la topología de la grassmanniana de rectas, cualquier recta tangente se puede interpretar como un límite de rectas secantes. Utliizando el mismo argumento (cómputo de parámetros) que en los párrafos anteriores, se tiene que la dimensión de la variedad que parametriza los espacios tangentes es $2m$. Por ello, si M es una variedad compacta embebida en $\mathbb{R}^{N+1}$ la proyección sobre un espacio N-dimensional no adquiere cúspides con tal que $N \geq 2m$.

4.4.1. El grado como invariante proyectivo

Ejercicio.- Demuestra que el grado de la proyección de una variedad proyectiva sobre un subespacio de dimensión más pequeña es el mismo que el de la variedad original.

4.4.2. El caso de curvas proyectivas complejas

En virtud (de la versión proyectiva) del Teorema de Severi-Whitney, si $\mathcal{C}$ es una curva proyectiva compleja, entonces existe un embebimiento en $\mathbb{P}^N$. Mediante proyecciones sucesivas podemos proyectar sobre $\mathbb{P}^3$ sin que la curva adquiera singularidades, pues la dimensión esperada de la variedad de 1-secantes $Sec(1, \mathcal{C})$ a $\mathcal{C}$ es 3. Sin embargo, cualquier proyección genérica $\pi_{\underline{p}}$ sobre un plano proyectivo arbitrario $\mathbb{P}^2$ da lugar a singularidades genéricas que pueden ser de diferentes tipos:

- *Puntos dobles ordinarios* ó *nodos* que proceden de las rectas secantes $\overline{xy}$ que pasan por dos puntos diferentes de $\mathcal{C}$ y por el centro de proyección $\underline{p} \in \mathbb{P}^3 \backslash \mathcal{C}$. Se denota mediante δ al número total de nodos que aparecen al proyectar
- *Cúspides* que proceden de las rectas tangentes $t_x\mathcal{C}$ que pasan por por el centro de proyección $\underline{p} \in \mathbb{P}^3 \backslash \mathcal{C}$. Se denota mediante κ al número total de nodos que aparecen al proyectar

Como la dimensión esperada de la variedad de secantes

$$Sec(1, \mathcal{C}) = \{z \in \overline{xy} \ \mid \ (x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} - \Delta_{\mathcal{C}}\}$$

es 3, cualquier proyección con centro en un punto da lugar a un número finito de nodos. Como la dimensión esperada de la variedad de tangentes

$$Tg(1, \mathcal{C}) = \{z \in t_x\mathcal{C} \ \mid \ x \in \mathcal{C}\}$$

es 2, podemos elegir de forma genérica (abierto de Zariski) un centro de proyección $\underline{p} \in \mathbb{P}^3 - Tg(1, \mathcal{C})$ de modo que la proyección sobre el plano $\mathbb{P}^2$ no tenga cúspides.

En la práctica, la información sobre cúspides es muy relevante para aplicaciones relacionadas con la propagación de la luz; así, p.e. las cáusticas (envolventes de las normales a un frente de ondas) siempre tienen cúspides (observación realizada por Newton en el s.XVIII). Por ello, es importante no descartar las proyecciones que puedan presentar cúspides.

La *Fórmula de Plücker* es el resultado fundamental que permite relacionar los diferentes caracteres es

$$d^* \ = \ d(d-1) - 2\delta - 3\kappa$$

que expresa la *clase* d^* (número de rectas tangentes que se pueden trazar desde un punto exterior) con el grado d (invariante proyectivo, es decir, independiente del espacio proyectivo en el que está inmersa la curva), el número δ de nodos y el número κ de cúspides ordinarias. Este resultado permite dar una primera clasificación de curvas (debida a PlÃ$\frac{1}{4}$cker) en términos de los caracteres proyectivos y es el primer resultado importante para la Dualidad en Geometría Algebraica.

Más importante aún es la expresión del *género* en términos de los caracteres proyectivos dada por la fórmula de Clebsch:

$$g \ = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \delta - \kappa$$

pues permite relación un invariante intrínseco g (independiente de la inmersión) con datos extrínsecos d, δ, κ es decir, asociados al espacio proyectivo en el que está inmersa la curva ó los caracteres asociados a una proyección genérica. El género es el invariante topológico fundamental de la superficie de Riemann compacta $M_{\mathcal{C}}$ asociada a la curva proyectiva compleja $\mathcal{C}$; representa el "número de agujeros" que tiene dicha superficie compacta cuando se sumerge en un espacio $3D$.

Este resultado es un antecedente de los Teoremas tipo Riemann-Roch (extensiones por Hirzebruch y Grothendieck en el contexto de la Geometría Algebraica) extendidos al contexto diferencial por Poincaré, Hopf, Lefschetz, Chern, Atiyah y Bott. Este tipo de resultados reciben el nombre de Teoremas del Índice (en alusión al índice de operadores elípticos) y se describen en el módulo de Topología Diferencial Global.

Ejercicio.- Demostrad las fórmulas de Plücker y de Clebsch.

4.4.3. El caso de superficies proyectivas complejas

Denotemos mediante X a una superficie algebraica general embebida en $\mathbb{P}^5$. Demostrar que

- La imagen de X por la proyección $\pi_p : \mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^4$ con centro en un punto genérico $\underline{p} \in \mathbb{P}^5$ adquiere un número finito de puntos singulares nodales como únicas singularidades
- La imagen de X por la proyección $\pi_\ell : \mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^3$ con centro en una línea genérica $\ell \subset \mathbb{P}^5$ adquiere una curva nodal, un número finito t de puntos triples (procedentes de las "cuerdas" que pasan el centro de proyección y por tres puntos de X) y un número finito κ de puntos pinzados (procedentes de las "cuerdas" que pasan el centro de proyección y son tangentes a un punto de X).

Las relaciones entre los invariantes intrínsecos (independientes del embebimiento) y los invariantes extrínsecos (asociados a la gteometría de las proyecciones genéricas) en el caso $2D$ es un tópico avanzado de la Geometría Algebraica de las Superficies Complejas al que dedicaron bastante atención Salmon, Cayley, Zeuthen y Pieri (a finales del s.XIX); una revisión de este trabajo en el contexto de la moderna Teoría de Intersección se puede ver en R.Piene (1977)

4.4.4. El caso de threefolds proyectivas complejas

Denotemos mediante X a una variedad algebraica tridimensional general (threefold) embebida en $\mathbb{P}^N$ para $N \geq 7$; para fijar ideas, supongamos que $N = 7$ (en aplicaciones a Física Teórica se toma habitualmente $N = 9$, pues "pocas threefolds" admiten embebimiento en $\mathbb{P}^7$). Demostrar que

- La imagen de X por la proyección $\pi_p : \mathbb{P}^7 \to \mathbb{P}^6$ con centro en un punto genérico $\underline{p} \in \mathbb{P}^5$ adquiere un número finito de puntos singulares nodales como únicas singularidades
- La imagen de X por la proyección $\pi_\ell : \mathbb{P}^7 \to \mathbb{P}^5$ con centro en una línea genérica $\ell \subset \mathbb{P}^7$ adquiere una curva nodal, un número finito t de puntos triples (procedentes de las "cuerdas" que pasan el centro de proyección y por tres puntos de X) y un número finito κ de puntos pinzados (procedentes de las "cuerdas" que pasan el centro de proyección y son tangentes a un punto de X).
- La imagen de X por la proyección $\pi_\ell : \mathbb{P}^7 \to \mathbb{P}^4$ con centro en un 2-plano genérico $L_0^2 \subset \mathbb{P}^7$ adquiere una superficie nodal, una curva T de puntos triples (procedentes de las "cuerdas" que pasan el centro de proyección y por tres puntos de X), una curva K de puntos pinzados (procedentes de las "cuerdas" que pasan el centro de proyección y son tangentes a un punto de X), un número finito q de puntos cuádruples (procedentes de las "cuerdas" que pasan el centro de proyección y por cuatro puntos de X) y un número finito s de puntos estacionarios (procedentes de la intersección de la curva T de puntos triples con la curva K de puntos pinzados).

Las relaciones entre los invariantes intrínsecos (independientes del embebimiento) y los invariantes extrínsecos (asociados a la gteometría de las proyecciones genéricas) en el caso $3D$ es un tópico avanzado de la Geometría Algebraica de las Superficies Complejas al que J.Roth dedicó atención (en torno a los años treinta del s.XX); algunas de las fórmulas que dió no son correctas y requieren una revisión más cuidadosa. Una reformulación de estos resultados en el contexto de la moderna Teoría de Intersección se puede ver en JF (1989), aunque la lista de relaciones entre invariantes intrínsecos y extrínsecos sigue estando incompleta.

Una motivación externa para Estos tópicos aparece en relación con la identificación de singularidades que aparecen asociadas a fenómenos de propagación en algunos modelos del espacio-tiempo. En este caso, la geometría de las rectas que dan lugar a estas singularidades admite diferentes interpretaciones en términos de rayos de luz o bien de “cuerdas” que vibran en el espacio y cuyas intersecciones / interferencias es preciso calcular (ver módulo 7 para más detalles).

Otra motivación más “pedestre” está relacionada con la versión real de objetos volumétricos en movimiento; como es habitual, la versión proyectiva compleja es bastante más sencilla, aunque aún haya un gran número de problemas abiertos a resolver desde el punto de vista del modelado cinemático (volúmenes en movimiento)

5. Complementos

5.1. Ejercicios

5.1.1. Embebimientos de variedades particulares

Mostrar aplicaciones que den embebimientos de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$ (para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$) y $\mathbb{S}^m \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ para cualquier $m \leq n$.

Indicación y comentarios: En el caso $n = m + 1$, esto es posible esencialmente gracias a que existe una forma *continua* de elegir una dirección normal a $\mathbb{R}^m$ (respectivamente, $\mathbb{S}^m$) dentro de $\mathbb{R}^{m+1}$ (respectivamente, $\mathbb{S}^{m+1}$), ó alternativamente, gracias a que podemos mostrar $\mathbb{R}^m$ (respectivamente, $\mathbb{S}^m$) dentro de $\mathbb{R}^{m+1}$, como una "superficie de nivel" regular de cierta función definida sobre $\mathbb{R}^{m+1}$ (respectivamente, $\mathbb{S}^{m+1}$).

Extensiones:

- El criterio mostrado más arriba se utiliza varias veces en el §2,4.
- El caso correspondiente al espacio proyectivo es diferente y se comenta más abajo.
- El argumento presentado se puede extender a subvariedades orientables de $\mathbb{R}^m$, pero se necesita la noción de fibrado normal (desarrollarlo como ejercicio). En particular, la existencia de una dirección normal que varía de forma continua con el punto se puede representar mediante un campo vectorial normal ξ y permite llevar a cabo una "traslación paralela" en la dirección del campo ξ (relación entre geometrías intrínseca y extrínseca)

La dificultad (y el interés del problema) consiste en que, aunque la variedad original sea lisa, su traslación a lo largo de una dirección normal puede presentar singularidades ó autointersecciones. Los modelos matemáticos correspondientes a estas traslaciones reciben el nombre de "Variedades Canal" y son de gran interés para Ingeniería (Civil, Mecánica y Robótica), así como para algunas cuestiones relacionadas de Visión Computacional . Desde el punto de vista topológico interesa describir las singularidades que pueden aparecer en las variedades canal, así como su procedencia en términos de la geometría de la variedad original (los centros de curvatura en el caso de curvas, p.e.)

5.1.2. Inmersiones de variedades con auto-intersecciones

Parametriza la aplicación $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ cuya imagen es un "ocho" y demuestra que es una inmersión, pero no un embebimiento

Indicación: usar la parametrización dada por $\theta \mapsto sen(2\theta)$. En este caso es obvio que falla la inyectividad, pero incluso si tomamos la imagen de $]0, 2\pi[$ por dicha aplicación, la imagen no es tampoco una 1-subvariedad del plano, pues los entornos de $\underline{0}$ no tienen la topología inducida por la del plano.

La imagen de esta aplicación recibe el nombre de *lemniscata* y está dada algebraicamente por $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$. Dibujar una parametrización que describa la complexificación de esta curva plana como una *curva racional*, es decir, birracionalmente equivalente a $\mathbb{CP}^1$.

Indicación: Calcula la intersección con los haces de rectas $y = tx$ para $-1 \leq t \leq 1$ (dibujarlo)

5.1.3. Nudos

Usando teoría de homotopía es fácil ver que los embebimientos de $\mathbb{S}^1$ en el plano $\mathbb{R}^2$ son equivalentes al embebimiento ordinario. La situación para sumergir la circunferencia en $\mathbb{R}^3$ es completamente distinta y da lugar a la Teoría de Nudos. Un *nudo* es la imagen de un embebimiento liso de S^1 en $\mathbb{R}^3$. Un *lazo* es una unión finita de nudos disjuntos [10].

Muestra embebimientos propios de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^3$ (es decir, cuya imagen no está contenida en ningún plano).

Comentario: La clasificación de nudos es un problema topológico que ha recibido recientemente una gran atención por sus sofisticadas aplicaciones a la Física Teórica en relación con la Teoría Cuántica de Campos (ver Witten (1985, 1988) para una conexión con la aparición de anomalías en gravitación, Atiyah, 1990, para una Introducción, y Atiyah, Bott, Jones, Segal, 1992, para más detalles desde el punto de vista matemático).

5.1.4. Singularidades

Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) := (x, y^2)$ ó por $f(x, y) := (x, xy - y^3)$. Demuestra que son inmersiones, pero no embebimientos y representar gráficamente el grafo en $\mathbb{R}^3$. Los '“puntos singulares” de la primera (que pueden visualizarse como puntos críticos de la proyección sobre la primera componente en el espacio de partida) reciben el nombre de *pliegues* (a veces llamados también dobleces, lo cual da lugar a ambigÃ¼edades con los puntos dobles o nodos) y *cúspides*, respectivamente.

De hecho, es posible demostrar (H.Whitney, 1958) que estas dos son las únicas singularidades de aplicaciones que permanecen estables cuando se realizan “pequeñas perturbaciones” en el espacio ambiente. Por ello, son ”genéricas” en un sentido que no precisaremos ahora (ver Topología Diferencial para más detalles). De ahí, su importancia en la clasificación de los tipos topológicos cualitativamente distintos que pueden aparecer en dimensión 2.

5.1.5. Superficies de Steiner

Las superficies de Steiner.- Existen dos construcciones clásicas para este tipo de superficies. La primera está basada en la consideración de cuádricas de $\mathbb{CP}^3$

[10] Estos tópicos se desarrollan con más detalle en el módulo 1 de Topología Algebraica

que pasan por ciertas cónicas "independientes" de un plano fijo (la independencia significa que los 3 puntos de $\mathbb{CP}^5$ que las representan no están alineados). De una forma más sintética, podemos visualizarlas como una representación de un sistema lineal 3-dimensional de cónicas.

Alternativamente, usando la imagen de la inmersión de Veronese i_V^2 de grado 2 , consideramos la restricción de una proyección genérica $\pi_\ell : \mathbb{CP}^5 \to \mathbb{CP}^2$ a la superficie de Veronese $V \subset \mathbb{CP}^5$ sobre un 3-espacio proyectivo $\mathbb{CP}^3$ desde una línea ℓ de $\mathbb{CP}^5$ que no esté en V (equivale a realizar dos proyecciones sucesivas con centro en puntos que no pertenezcan a la superficie de Veronese). La imagen de la composición $\pi_\ell \circ i_V^2$ da una 2-variedad algebraica (singular) a la que se llama *superficie de Steiner*.

Según la elección de la recta ℓ pueden aparecer diferentes tipos de superficies de Steiner que escribiremos en forma explícita en la columna de la izquierda y en forma paramétrica en la de la derecha:

$$\begin{array}{rl}
(XY - T^2) = 0 & [x^2 : y^2 : z^2 : xy] \\
(TY - Z^2)^2 - XY^3 = 0 & [x^2 : y^2 : yz : xy + z^2] \\
T^4 - 2T^2X(Y+Z) + X^2(Y-Z)^2 = 0 & [x^2 : y^2 : z^2 : x(y+z)] \\
(X^2Y^2 + Y^2)Z^2 + X^2Z^2 - XYZT = 0 & [yz : xz : xy : x^2+y^2+z^2]
\end{array}$$

donde $[X : Y : Z : T]$ denotan las coordenadas homogéneas de $\mathbb{CP}^3$. Tomando partes reales en cada una de las expresiones anteriores, es fácil verificar que todas ellas definen *inmersiones* (pero no embebimientos) de $\mathbb{CP}^2$ en $\mathbb{CP}^3$ A menudo, sólo se considera la descripción mostrada en el caso 4, a la que se llama la *superficie romana de Steiner*. Ello se debe a una mayor simplicidad en los cálculos (ver [A+M+R], Ejercicio 3.5K para una presentación más detallada).

Existe una generalización clásica de esta construcción a dimensión 3, y permite inferir propiedades sobre sistemas de cuádricas con curvas ó puntos base (ver Baker, Vol.?, para un tratamiento clásico del problema). En términos de la geometría del espacio de cuádricas, el problema consiste en *estudiar las proyecciones genéricas sobre $\mathbb{CP}^4$ de la 3-variedad lisa dada como la imagen $i_V^2(\mathbb{CP}^3) \subset \mathbb{CP}^9$ con centro un 4-espacio L en posición general respecto a la 3-variedad de Veronese $i_V^2(\mathbb{CP}^3)$ que parametriza las cuádricas dadas como 2-planos dobles de* $\mathbb{CP}^3$.

Este problema equivale geométricamente a estudiar sistemas lineales 3-dimensionales de cuádricas en $\mathbb{CP}^3$. El estudio de pinceles de cuádricas es clásico y es la clave para el estudio de las cuárticas alabeadas (de gran interés en Geometría Algebraica y en Teoría de Números).

El inconveniente geométrico de esta presentación de las superficies de Steiner, procede de que *existen puntos que no tienen plano tangente* propiamente dicho, debido a la aparición de singularidades en la imagen. Estas singularidades son *paraguas de Whitney* (también llamadas sombrillas de Cartan), dadas localmente por la ecuación $x^2 - y^2z = 0$, ó alternativamente en términos de la parametrización (uv, v, u^2).

Otro inconveniente algebraico procede de que la variedad asociada al ideal que figura en la parte izquierda del cuadro anterior contiene estrictamente al lugar descrito por la parametrización que aparece en la parte derecha del cuadro. Nuevamente, estos “puntos excepcionales” que no aparecen en la parametrización proceden de las singularidades de la superficie de Steiner dada en forma explícita. Una solución a este último problema surge a partir de cierta parametrización del plano proyectivo real que se expone en el Ejercicio siguiente:

5.1.6. La superficie de Boy

El punto de partida está dado por la unión de tres copias de $\mathbf{S}^1$ en $\mathbb{R}^3$ con un punto común, que es un *punto triple*. Para construir la superficie de Boy (1901), se considera

$$\begin{array}{lllllllllllll} A & = & (1,0,0) & , & B & = & (0,1,0) & , & C & = & (0,0,1) & , & O=(0,0,0)\ , \\ A' & = & (-1,0,0) & , & B' & = & (0,-1,0) & , & C' & = & (0,0,-1) & & \end{array}$$

La circunferencia de radio 1 y centro $(0,1,-1)$ que determina un arco α_2 (de longitud $3\pi/2$) conectando B y C'. Sea α el arco dado por la unión $\bar{OB} \cup \alpha_2 \cup \bar{C'O}$. Haciendo girar este arco un ángulo de $2\pi/3$ y $4\pi/3$ respecto al eje diagonal $x=y=z$, obtenemos otros dos arcos β y γ. La unión de estos tres arcos es el soporte de la inmersión de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^3$ con un punto triple en el origen. Sea

$$H'(\alpha) \ := \ \{\underline{p}=(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ \mid \ d(\underline{p},\alpha)\leq\frac{1}{3}\}$$

y construyamos el cilindro H'' generado como superficie de revolución por el arco α que se toma como directriz y gira en torno al eje Ox. Denotemos mediante $H''(\alpha)$ al conjunto de puntos de H'' cuya distancia al soporte del arco α es $\leq frac13$. Hagamos $H(\alpha):=H'(\alpha)\cup H''(\alpha)$

Razonando de forma análoga para los otros arcos β y γ, se obtienen los correspondientes $H(\beta)$ y $H(\gamma)$. Se tiene una variedad $H=H'\cup H''$, cuyo borde tiene 4 componentes conexas disjuntas que son homeomorfas a $\mathbb{S}^1$. La *superficie de Boy* se obtiene pegando 4 discos a lo largo de cada una de las componentes conexas del borde.

Dibujos de esta superficie se pueden ver en Hilbert y Cohn-Vossen, Spivak, Weeks ó Francis. Una discusión de la “buena” parametrización se puede ver en Apéry (1987?). La justificación de los argumentos usados en la parametrización propuesta por Apéry, se enmarca en la Teoría de Singularidades de Aplicaciones, por lo que no será revisada aquí (ver el módulo 3 de Topología de Variedades). En Math. Intelligencer no.?(1991) se muestra una construcción de esta superficie (indicada para expertos en papiroflexia).

5.1.7. Existencia de Embebimientos

El *Teorema débil de Severi-Witney* muestra que $\mathbb{RP}^2$ admite un embebimiento en $\mathbb{R}^5$. Pero, del mismo modo que $\mathbf{S}^2$ admite un embebimiento en $\mathbb{R}^3$ (cuando la dimensión esperada es 5), se tiene que $\mathbb{RP}^2$ admite un embebimiento en $\mathbb{R}^4$. Para mostrarlo, se considera la aplicación

$$g : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4 \quad | \quad (x : y : z) \;\mapsto\; \frac{1}{\mid x \mid^2}(x^2 \;,\; 2xy \;,\; 2xz + y^2 \;,\; 2yz) \;.$$

Comprueba que la aplicación g es inyectiva y es una inmersión (mostrando que el rango de g es 2). Como $\mathbb{RP}^2$ es una variedad compacta, se tiene que es un embebimiento. Generaliza este ejemplo mostrando un embebimiento de $\mathbb{RP}^3$ en $\mathbb{R}^6$.

5.1.8. La botella de Klein

Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por la asignación

$$(u, v) \;\mapsto\; ((a + bsenv)cosu \;,\; (a + bsenv)senu \;,\; bcosvcos\frac{u}{2} \;,\; bcosvsen\frac{u}{2})$$

es un embebimiento (la imagen de f es conocida como la *botella de Klein*).

5.1.9. La banda de Moebius infinita

Consideremos el cociente $B_M = C/\mathbf{Z}_2$ del cilindro $C := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ por la acción de $\mathbb{Z}_2$. Demuestra que la banda de Moebius infinita B_M admite una estructura diferenciable, de modo que la aplicación $C \to B_M$ es un difeomorfismo local y que B_M es no-orientable.