

## 2.2 Fibrados Vectoriales y Operaciones

*Javier Finat*

### Índice

1.	<b>Fibraciones</b>	6
1.1.	La noción de Fibración	7
1.1.1.	Fibración localmente trivial	7
1.1.2.	Algunos ejemplos	8
1.1.3.	Ejemplo: Familias de curvas	9
1.1.4.	Familias de Variedades	11
1.2.	Secciones de una Fibración	12
1.2.1.	Trivialidad topológica	12
1.2.2.	Espacios recubridores	13
1.2.3.	Ramificación en Geometría Algebraica	14
1.2.4.	Fibración de Hopf	14
1.3.	Funciones de transición	15
1.3.1.	Propiedades de las Funciones de Transición	16
1.3.2.	Elementos de clasificación de fibraciones	17
1.3.3.	Una aproximación ingenua a animación	18
2.	<b>Fibrado Vectorial. Enfoque funtorial</b>	20
2.1.	Nociones básicas	20
2.1.1.	Secciones de un fibrado vectorial	21
2.1.2.	Morfismos de Fibrados Vectoriales	21
2.1.3.	Producto Fibrado	22
2.1.4.	El Fibrado Tangente de una subvariedad	23
2.1.5.	Subfibrados del fibrado tangente	23
2.2.	Dual de un Fibrado Vectorial	24
2.2.1.	Funciones de transición del dual	24
2.2.2.	Apéndice: Nota sobre Operadores autoadjuntos	24
2.2.3.	El fibrado cotangente	25
2.3.	Orientación de un fibrado vectorial	25
2.3.1.	Fibrado vectorial orientable	26
2.3.2.	Orientación de un fibrado vectorial	26
2.3.3.	Algunas propiedades elementales	26
2.3.4.	Ejemplo: El Fibrado Tangente del Espacio Proyectivo	26
2.4.	Fibrados principales. Elementos básicos	27
2.4.1.	Noción de fibrado principal	27
2.4.2.	Fibrados principales triviales	28
2.4.3.	Reducción de grupo estructural	28

---

2.4.4.	29
<b>3. Operaciones sobre fibrados</b>	<b>30</b>
3.1. Suma de Whitney de Fibrados Vectoriales	30
3.1.1. Definición	30
3.1.2. Construcción	30
3.1.3. Funciones de transición	30
3.1.4. Algunas propiedades elementales	31
3.2. Fibrado normal de una subvariedad	31
3.2.1. Descripción del fibrado normal	31
3.2.2. Sucesiones exactas de fibrados relativos a una subvariedad	32
3.2.3. Ejemplo básico: El Fibrado Normal de una Esfera	32
3.2.4. Entornos tubulares	33
3.3. Fibrados tautológicos y sucesión exacta universal	34
3.3.1. El Fibrado Lineal Tautológico	35
3.3.2. El Fibrado Tangente del Espacio Proyectivo	36
3.3.3. El Fibrado Tangente de la Grassmanniana	36
3.3.4. Práctica: EDO sobre Grassmannianas	37
3.4. Operaciones con Fibrados Principales	37
3.4.1. Producto tensorial de fibrados principales	38
3.4.2. Imagen recíproca de un fibrado principal	38
3.4.3. Representación de grupos y fibrados principales	38
3.4.4. Algunas aplicaciones básicas a Física Teórica	38
<b>4. Prácticas: Campos y transformaciones</b>	<b>40</b>
4.1. Práctica 1: Coordenadas en Relatividad General	41
4.1.1. Transformaciones pasivas de coordenadas	42
4.1.2. Transformaciones activas de coordenadas	43
4.2. Práctica 2: Fibrados en Robótica	43
4.2.1. Movimientos periódicos	44
4.2.2. Restricciones	44
4.2.3. Una versión equivariante de Optimización Geométrica	45
4.2.4. Control geométrico en presencia de singularidades	45
4.3. Práctica 3: Fibrados para Reconocimiento	46
4.3.1. Detectores	48
4.3.2. Descriptores	48
4.3.3. Clasificadores	49
4.3.4. Apéndice: Elementos de Sistemas Expertos	50
4.4. Práctica 4: Una aplicación a dinámica económica	51
4.4.1. Comentarios sobre el macrosector financiero	51
4.4.2. Una aproximación histórica a ER	53
4.4.3. Aspectos estadísticos del modelo	54
4.4.4. Campos para representar la dinámica económica	55
<b>5. Complementos</b>	<b>56</b>
5.1. Conclusiones	56
5.2. Ejercicios	57
5.2.1. Fibrado tautológico sobre el espacio proyectivo	57
5.2.2. Orientabilidad de la suma de fibrados vectoriales	58

---

5.2.3. Imagen recíproca de la suma de Whitney . . . . .	58
5.2.4. Fibrados lineales sobre la circunferencia . . . . .	58
5.2.5. Producto paralelizable de variedades . . . . .	58
5.2.6. Producto paralelizable de esferas . . . . .	58
5.3. Prácticas . . . . .	58

Los fibrados vectoriales (y sus generalizaciones) proporcionan estructuras sencillas (desde el punto de vista topológico) dadas localmente por un producto cartesiano sobre abiertos  $U$  de la variedad base. Un primer ejemplo corresponde a estructuras superpuestas a variedades como las descritas en términos de campos vectoriales tangentes ó distribuciones de campos introducidas en §1,5 y §1,6 respectivamente; de este modo, proporcionan una “linealización global” que facilita el estudio de las propiedades de  $C^r$ -variedades o, desde el punto de vista del Análisis, de sistemas de ecuaciones (EDO, EDP, EDM) dadas sobre dichas variedades.

Con más generalidad, la noción de campo (escalar, vectorial, tensorial) se puede definir de forma abstracta en términos escalares, (co)vectoriales ó multivectoriales, para representar cualquier tipo de “acción a distancia” sin que medie un soporte físico ó material. Por ello, el ámbito de aplicación de estas estructuras incluye toda la Física y buena parte de desarrollos recientes en Ingeniería <sup>1</sup>.

Para un fibrado vectorial de rango  $n$ , la fibra  $F_p$  en cada punto  $p \in M$  es isomorfa a un espacio vectorial  $n$ -dimensional  $V \simeq \mathbb{K}^n$ , el grupo lineal general  $GL(n; \mathbb{K})$  actúa de forma transitiva y eficiente sobre  $V$ . Para cualquier subgrupo lineal clásico (ortogonal/unitario, especial lineal, simpléctico, etc)  $H$  de  $GL(n; \mathbb{K})$  el isomorfismo entre las fibras especial y genérica induce una acción inducida por la del grupo lineal general.

La descripción de las soluciones de (sistemas de) EDO está dada habitualmente por una solución particular y una transformación que “traslada” la solución particular sobre la variedad ambiente. Dicha transformación se representa mediante la acción de un grupo discreto ó continuo  $G$  con dimensión finita (como los grupos clásicos, p.e.) ó infinita (como los grupos de  $C^r$ -equivalencias, p.e.). La acción de un grupo  $G$  se representa geoméricamente en términos de las representaciones de un grupo  $G$  sobre algún espacio vectorial  $V$  (de dimensión finita ó infinita) sobre el que actúa.

Algunos ejemplos típicos corresponden a acciones que dejan invariante una métrica  $ds_p^2$  (forma cuadrática) ó un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  (forma bilineal) eventualmente dependiente de cada punto  $\underline{p} \in X$ , siendo  $X$  una variedad diferenciable  $M$ , un espacio de funciones  $\mathcal{H}$  (Hilbert) ó  $\mathcal{B}$  (Banach), ó una variedad estratificada  $X_S$  (caso analítico) sobre la que se pueden presentar rupturas de simetrías asociadas a subgrupos  $H$  del grupo estructural  $G$ . Para fijar ideas, nos restringimos al caso de subgrupos clásicos, es decir, subgrupos del grupo lineal general que dejan invariante una forma cuadrática ó bilineal no-degenerada.

La descripción de propiedades basada en grupos clásicos proporciona una buena motivación para el estudio de la acción de  $G$  a partir de las órbitas  $G * \underline{p}$ . Este estudio es interesante, pues permite reducir el estudio de propiedades locales de una variedad  $X$  (en particular de una variedad  $M$ ), al estudio de propiedades de un grupo  $G$ . En particular, la acción de  $G$  sobre un espacio  $X$  (en general no-homogéneo) da lugar a órbitas  $G * \underline{p}$  que se interpretan como

<sup>1</sup> En mi curso sobre una aproximación diferencial a la Teoría Económica se pueden ver algunas aplicaciones de Fibrados Vectoriales y Foliaciones a diferentes áreas de Economía

un cociente de grupos  $G/G_{\underline{p}}$  donde  $G_{\underline{p}} := \{g \in G \mid g * \underline{p} = \underline{p}\}$  es el subgrupo de isotropía de  $\underline{p}$ . Frecuentemente, es interesante estudiar la acción asociada a subgrupos  $H$  de  $G$ , como ocurre p.e. con los subgrupos clásicos (continuos) del grupo lineal general  $GL(m; \mathbb{R})$ , subgrupos discretos (asociados a configuraciones de puntos, p.e.) ó bien con subgrupos que dejan invariante determinadas regiones del espacio  $X$  sobre el que la acción está definida.

El estudio abstracto de las  $G$ -acciones sobre  $X$  sin necesidad de un soporte localmente vectorial (como el asociado a los fibrados vectoriales) se realiza en términos de grupos de Lie abstractos. Este formalismo se extiende a fibrados principales cuyas secciones  $s$  están dadas por asignaciones que a cada punto  $\underline{p}$  le lleva en su órbita  $G * \underline{p}$  verificando que  $\pi \circ s = 1$  como siempre. De una manera más formal, un  $G$ -fibrado principal está dado por una 4-tupla dado por un espacio total  $P$ , una aplicación proyección  $P \rightarrow M$ , un espacio base  $M$  y un grupo  $G$  (fibra genérica) isomorfo a la fibra en cada punto, verificando la condición de trivialidad local  $\pi^{-1}(U) \simeq_{C^r} U \times G$  para cada abierto de trivialización  $U \subset M$ . Los fibrados principales  $(P, G)$  proporcionan un lenguaje común para abordar de una manera unificada los diferentes tipos de acción asociados a grupos clásicos, así como un marco general para los diferentes tipo de interacción.

Las propiedades fundamentales de los fibrados (o con más generalidad, las fibriciones), son el carácter localmente trivial (expresión topológica como producto) y, en el caso más simple, la estructura lineal que tiene la fibra en cada punto. Esta última condición facilita la comparación entre datos lineales mediante grupos estructurales (grupos lineales como subgrupos de grupos clásicos) que conservan una forma cuadrática (asociada a una métrica) ó una forma bilineal (asociada a un producto interior).

En la primera sección de este capítulo se exponen algunas generalidades sobre fibriciones, insistiendo en los aspectos geométricos de esta noción <sup>2</sup>; esta noción facilita el estudio “por paquetes” de variedades que presentan un comportamiento similar (las “fibras”) y por ello se aplica a diferentes Geometrías, incluyendo aquellas que pueden presentar un comportamiento singular. A continuación se desarrolla una aproximación más abstracta (que se ha etiquetado como funtorial) a fibrados vectoriales que proporciona herramientas para la clasificación de fibrados vectoriales dados sobre un mismo espacio base. Sobre (las clases de) los fibrados vectoriales es posible definir operaciones generales que permiten comparar fibrados definidos sobre variedades relacionadas entre sí mediante aplicaciones (producto fibrado, imagen inversa), por un lado, e identificar estructuras sobre el conjunto de fibrados vectoriales con operaciones apropiadas (suma de Whitney, producto tensorial, p.e.); estas cuestiones proporcionan los primeros ejemplos de *moduli*, es decir, de clases de equivalencia de  $C^r$ -estructuras. Una aplicación importante de este enfoque concierne a la clasificación de variedades en términos de la aplicación de Gauss generalizada que a cada punto  $\underline{p} \in M$  de una variedad compacta  $M$  le llega en su espacio tangente  $T_{\underline{p}}M$  como elemento de una grassmanniana  $Grass(m, N)$  para  $N \gg 0$ .

<sup>2</sup> Los aspectos topológicos se abordan en el módulo 3 de Topología Algebraica

## 1. Fibraciones

la noción de fibrado tangente presentada en el capítulo anterior es un caso particular de la noción de fibrado vectorial. En ocasiones (que se presentan en Geometría Algebraica o en Geometría Analítica), el requerimiento para la fibra de ser isomorfa a un espacio vectorial es demasiado estricto, pudiendo aparecer estructuras en las que la fibra es un espacio  $G$ -homogéneo (esferas, toros, espacios proyectivos, grasmannianas, etc) ó variedades con estructura algebraica o analítica más complicada (fibraciones elípticas, p.e.). Por ello, conviene “relajar” dicha condición requiriendo una estructura algebraica (fibra isomorfa a un grupo, p.e.) ó topológica (fibraciones cuya fibra es  $C^r$ -equivalente a una variedad con restricciones como “tipo” de curva ó de superficie, p.e.).

Dicho de otra forma, a partir de la noción de fibrado vectorial se tiene una colección de inclusiones sucesivas de complejidad creciente que afectan a fibrados principales (con fibra isomorfa a un grupo, p.e.) ó, con más generalidad, a fibraciones (con fibra  $C^r$ -equivalente a una  $C^r$ -variedad, p.e.).

En cursos más avanzados se muestran casos particulares de la noción de fibración de gran interés para otras áreas de las Matemáticas como p.e.

- la *Topología Algebraica* donde sólo se requiere la posibilidad de elevación de secciones a diferentes tipos de recubrimientos, que es una cuestión que afecta a la homotopía, como representación abstracta de la prolongación de soluciones;
- la *Geometría Algebraica* en relación con los “esquemas en grupos”, donde podemos “pegar” diferentes grupos vinculados a la resolución de ecuaciones, p.e.;
- la *Geometría Analítica* en relación con problemas de clasificación (*moduli*) por la acción de grupos de transformaciones birracionales o bianalíticas, p.e.;
- la *Topología de Sistemas Dinámicos* en relación con aspectos invariantes por la acción de un grupo  $G$  de distribuciones ó sistemas Pfaff para representar sistemas dinámicos;
- la *Topología Diferencial Equivariante* en relación con fenómenos de bifurcación  $G$ -equivariante para controlar fenómenos de agurpamiento/ruptura de simetrías que permiten introducir jerarquías “naturales” sobre el comportamiento de ecuaciones ó bien de las soluciones de dichos sistemas sobre variedades.

En las “orbifolds” confluyen todas estas extensiones; su estudio se aborda utilizando diferentes técnicas y proporcionan una de las herramientas más potentes para el estudio de variedades de dimensión tres dentro del programa de Geometrización de W.Thurston. Esta diversidad de aplicaciones pone de manifiesto el interés de la noción de fibración. De una manera intuitiva, una fibración

proporciona una formalización de la noción de “familia” de variedades, aplicaciones o soluciones de un problema matemático. Esta idea intuitiva es la que permite extender esta noción a otras áreas más aplicadas en Física, Ingeniería, Biología o Teoría Económica, p.e.

En este curso sólo se consideran las extensiones “más sencillas” que afectan a la noción de fibrado principal (de gran interés para las cuestiones de unificación entre diferentes tipos de interacción) y, algunos aspectos básicos de fibraciones topológicas (para un desarrollo más sistemático de estas últimas ver los apuntes de los módulos 3 y 4 de Topología Algebraica y Diferencial).

### 1.1. La noción de Fibración

En esta subsección se presenta una versión geométrica de la noción de fibración que es de utilidad para las Geometrías Diferencial, Algebraica o Analítica. En el módulo 3 de Topología Algebraica se presenta una versión más débiles en términos de la elevación de la homotopía; esta versión topológica está justificada por la posibilidad de relacionar los grupos de homotopía del espacio total  $E$  con el espacio base  $B$  de la fibración, lo cual permite calcular invariantes topológicos (clase de homotopía).

En Geometría Diferencial no haremos uso de este tipo de resultados, por lo que se desarrolla una versión más próxima a fibraciones como una  $C^r$ -estructura que localmente es un producto local, aunque las condiciones relativas a la fibra o al “pegado” sean menos estrictas que las descritas para el caso de fibrados. Esta noción resulta ser especialmente útil para variedades (algebraicas o analíticas) con singularidades, si bien es necesario construir previamente una “estratificación” que permita descomponer el espacio base en una unión disjunta de abiertos (interior de los estratos) sobre los cuales se tienen  $C^r$ -estructuras localmente triviales. En este caso, el “pegado” de los datos locales se realiza mediante “haces” (faisceaux, sheaves) que extienden las condiciones de compatibilidad presentadas para los fibrados<sup>3</sup>.

#### 1.1.1. Fibración localmente trivial

*Definición.-* Llamamos *fibración localmente trivial de clase  $C^r$*  (donde  $0 \leq r \leq \infty$  ó  $r = \omega$ ) a una 5-tupla  $\xi = (E, \pi, B, F, G)$  dada por

1. Una  $C^r$ -variedad  $E$  a la que se llama el *espacio total* de la fibración.
2. Un espacio topológico conexo  $B$  (en ocasiones dado por a  $C^r$ -variedad  $M$ ) al que se llama el *espacio base* de la fibración
3. Un espacio topológico (en ocasiones una  $C^r$ -variedad)  $F$  al que se llama la *fibra general* de la fibración.

<sup>3</sup> Estos tópicos se abordan en el módulo sobre Geometría Analítica

4. Una  $C^r$ -aplicación suprayectiva  $\pi : E \rightarrow B$  a la que se llama la *proyección* de la fibración que es localmente trivial. A la imagen inversa  $\pi^{-1}(p)$  de  $p \in M$  respecto a  $M$  se le llama la *fibra* de  $\xi$  en  $p$ , se denota también mediante  $E_p$  y se tiene una  $C^r$ -equivalencia (no canónico)  $\pi^{-1}(p) \simeq F$  con la fibra genérica.
5. Un grupo  $G$  que tiene estructura de  $C^r$ -variedad que actúa sobre la fibra  $F$  por la izquierda, al que se llama *grupo estructural*. En ocasiones (fibrados principales), la fibra puede ser el grupo  $G$  ó un subgrupo suyo.
6. Un recubrimiento  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  por abiertos de  $M$  verificando que para cada  $\alpha \in A$  existe una  $C^r$ -equivalencia  $\varphi_\alpha : U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$  a la que se llama *trivialización local de  $\xi$* , tal que  $\pi \circ \varphi_\alpha(\underline{p}, v) = p$  para cualquier  $p \in U_\alpha \subset M$  y para cualquier elemento  $v \in \pi^{-1}(p)$  de la fibra.
7. Sobre cada intersección  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  no vacía, si  $\varphi_\alpha(p) : \pi^{-1}(p) \rightarrow F$  denota la restricción de la aplicación de trivialización a la fibra  $E_p$  relativa a  $U_\alpha$ , entonces cada aplicación

$$g_{\alpha\beta}(\underline{p}) := \varphi_\beta(p)\varphi_\alpha^{-1}(p)$$

es un elemento de  $G$ . Por ello,  $\varphi_\alpha$  y  $\varphi_\beta$  están relacionadas por

$$\varphi_\alpha(\underline{p}, v) = \varphi_\beta(\underline{p}, g_{\alpha\beta}(\underline{p})(v))$$

y expresan el cambio en la expresión de un elemento  $v$  de la fibra  $\pi^{-1}(p)$  debido al cambio de carta en la base. Por ello, a dichas aplicaciones se les llama *funciones de transición* de la fibración; más abajo se detalla el caso en el que dichas funciones de transición toman valores en (un subgrupo de) el grupo lineal general que es el caso más significativo para la Geometría Diferencial de Variedades.

Esta noción se extiende de forma natural a esquemas en grupos, en los que la fibra dada por un grupo puede “saltar”, proporcionando un marco general que permite incluir aspectos algebraicos relacionados con ruptura de simetrías (de aplicación a la Mecánica Cuántica) y topológicos relacionados con la Teoría de Bifurcación Equivariante. Esta última aplicación forma parte de los Sistemas Dinámicos controlados por grupos variables de simetrías que se comentan en el módulo 6 de Topología Diferencial; las aplicaciones al control de la locomoción humana se presentan en el módulo 5 del Curso de Robótica, mientras que las aplicaciones a cuestiones de modelado y animación de animats se presentan en el módulo sobre Informática Gráfica del Curso de Geometría Computacional.

### 1.1.2. Algunos ejemplos

Las fibraciones no tienen por qué tener una fibra continua; en el caso discreto pueden tener una cantidad infinita de puntos:

- La aplicación proyección  $\pi : B \times F \rightarrow B$  sobre la primera componente del producto es una fibración globalmente trivial.
- La aplicación  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $f_n(z) = z^n$  define una fibración cuya fibra en cada punto es el conjunto de raíces enésimas de la unidad. Nótese que esta fibración presenta puntos de ramificación correspondientes a los valores en los que se “solapan” varias raíces.
- La aplicación exponencial

$$\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \mid \exp(t) = e^{2\pi it}$$

es una fibración localmente trivial cuya fibra en cada punto es isomorfa a  $\mathbb{Z}$ .

- La aplicación proyección  $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n := \mathbb{S}^n / \mathbb{Z}^2$  (paso al cociente por la aplicación antipodal) es una fibración topológica en la que la fibra sobre cada punto consta de dos elementos.

Nótese que ninguno de los tres ejemplos mostrados es un fibrado vectorial, salvo que la fibra  $F$  del primer ejemplo sea un espacio vectorial.

*Ejercicio.*- El espacio proyectivo n-dimensional complejo se define como

$$\mathbb{CP}^n := \mathbb{S}^{2n+1} / [x \sim ux \Leftrightarrow u \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^1]$$

Verifica que la aplicación proyección  $p : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$  es una fibración con fibra  $\mathbb{S}^1$ .

*Ejercicio.*- Verifica que el recubrimiento de dos hojas  $\pi_a : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n := \mathbb{S}^n / \mathbb{Z}^2$  dado por la aplicación antipodal es un fibrado topológicamente no trivial sin utilizar ningún argumento de orientabilidad (*Indicación:* Si el fibrado topológico fuera trivial, entonces el espacio total de la fibración  $\mathbb{S}^n$  debería tener dos componentes conexas).

### 1.1.3. Ejemplo: Familias de curvas

En términos conjuntistas, una familia de curvas planas es una aplicación  $F(x, \lambda) : \mathbb{K}^2 \times \lambda \rightarrow X$  tal que para cualquier valor  $\lambda \in \Lambda$  la imagen  $F_\lambda(\underline{x})$  es una curva plana. Así, p.e. dada una curva plana  $C$  definida mediante  $f(x, y) = 0$  la familia  $f(x + a, y) = 0$  (resp.  $f(x, y + b) = 0$ ) representa una familia uniparamétrica obtenida por traslación horizontal (resp. vertical) de la curva original <sup>4</sup>. Las transformaciones fraccionarias (conformes en el caso complejo) proporcionan una extensión inmediata de esta construcción de gran interés para diferentes aplicaciones.

<sup>4</sup> Un caso aún más sencillo corresponde a la expresión de soluciones generales de las EDO más simples que se expresan en términos de una solución particular más una constante

No obstante, las transformaciones que afectan a las variables  $x, y$  no tienen por qué pertenecer a un grupo y pueden estar descritas mediante deformaciones. En este caso interesa estudiar el lugar discriminante asociado a la proyección sobre cada una de las componentes del producto que denotamos mediante  $\pi_\Lambda : X \times \Lambda \rightarrow \Lambda$  y mediante  $\pi_{\underline{x}} : X \times \Lambda \rightarrow X$ . El lugar discriminante asociado a  $\pi_\Lambda$  está definido por

$$F(\underline{x}, \underline{\lambda}) = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(\underline{x}, \underline{\lambda})}{\partial \underline{x}} = 0$$

y corresponde a “eliminar” las variables  $\underline{x}$  para identificar cuáles son los valores críticos de los parámetros  $\underline{\lambda}$  que dan lugar a cambios en la topología de las soluciones.

*Ejercicio.-* Analizar la topología de las siguientes familias de curvas algebraicas en términos de la Geometría del Discriminante asociada a la proyección sobre el espacio de parámetros:

- La familia de cúbicas  $y^2 = \lambda x^2 + \mu x^3$ . Nótese que para  $\mu = 0$  se obtiene un par de rectas, para  $\lambda = 0$  se obtiene una cúspide ordinaria, mientras que para  $(\lambda, \nu) = (1, 1)$  se obtiene una curva nodal (ninguna de las tres es una variedad diferenciable). Extiende este ejemplo a grado 4.
- Demuestra que un polinomio cúbico mónico  $\sum_{i=0}^3 a_i x^{3-i}$  en una variable se puede llevar a la forma general  $x^3 + 3b_2x + b_3$  (transformaciones de Tschirnhausen). Interpreta la geometría del lugar discriminante asociado a  $\pi_\Lambda$  en términos de las intersecciones de los caminos en el espacio  $(b_2, b_3)$  con la cúspide que representa los polinomios con raíces múltiples. Extender los resultados a grado 4

Ambos ejemplos descritos sobre curvas de grado bajo (el caso  $d = 3$  es el primero “no trivial”) ponen de manifiesto que una “deformación continua” definida por un camino en el espacio de parámetros puede llevar a adquirir singularidades bien sobre el objeto ó bien relativas a la proyección. Por ello, el *marco geométrico estructural* para el estudio de las deformaciones (de gran interés para la mecánica de medios continuos ó para cuestiones de animación, p.e.) viene dado por la Geometría Algebraica ó por la Geometría Analítica.

Un ejemplo con una mayor complejidad desde el punto de vista matemático se presenta en relación con familias algebraicas de curvas elípticas (doblemente periódicas sobre un toro  $\mathbb{T}^2$  con género 1) ó hiperelípticas (múltiplemente periódicas sobre una suma conexa  $\#^g \mathbb{T}^2$  de  $g$  toros). Estos tópicos se abordan con más detalle en Geometría Algebraica y tienen gran interés para el estudio de soluciones de ecuaciones diferenciales no-lineales con un número de polos prefijado; el comportamiento topológico de los campos resultantes se visualiza sobre superficies con  $g$  agujeros.

La extensión de la Teoría Algebraica de familias de curvas complejas planas al caso de curvas alabeadas ó bien al de superficies algebraicas y analíticas complejas presenta aún muchos problemas abiertos. Es más fácil estudiar el caso de

hipersuperficies que el de curvas alabeadas; estas últimas requieren localmente dos superficies para describirlas, por lo que el fibrado normal tiene rango 2. El estudio de las superficies con estructura compleja (Kähler) ó diferencial adicional (simpléctica) tiene gran interés asimismo para cuestiones de Física Teórica.

#### 1.1.4. Familias de Variedades

La noción de fibración en Geometría Algebraica ó Analítica de Varias Variables Complejas es asimismo de gran utilidad para el estudio de “familias de variedades” algebraicas ó analíticas parametrizadas habitualmente por un espacio base que se denota mediante  $\Lambda$  (una variedad lisa, habitualmente) con parámetros  $(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ . En este caso, hay que sustituir las condiciones de tipo  $C^r$  por condiciones relativas a que las aplicaciones sean algebraicas ó analíticas y las  $C^r$ -equivalencias por condiciones de birregularidad (ó al menos birracionalidad) ó biholomorfía para el caso analítico. Estas cuestiones se abordan en el módulo 2 del Curso de Geometría Algebraica.

Estas “familias de variedades” aparecen frecuentemente como soluciones de la generalización de sistemas de EDO ó de EDP dadas por distribuciones de campos (ver §2,6 de este mismo módulo) ó de formas diferenciales (ver el §4 para más detalles). La condición más significativa para este tipo de objetos es la trivialidad topológica local.

El primer problema importante consiste en dar criterios para saber cuándo una familia de variedades es una fibración. Para ello, existen diferentes criterios (cada vez más complicados) a partir del Teorema de Ehresmann y generalizaciones sucesivas por Thom y Mather. Estos criterios se muestran en Topología Diferencial.

Un caso especialmente importante está relacionado con la clasificación topológica de variedades tridimensionales llevada a cabo por W.Thurston mediante una estrategia de reducciones sucesivas desde espacios homogéneos a otros localmente simétricos dentro de su programa de Geometrización de la Topología<sup>5</sup>. De una manera muy esquemática, la estrategia consiste en descomponer una variedad 3-dimensional en

1. Un conjunto de esferas
2. Un conjunto de “primals” (subvariedades que no son esferas) que descomponen a su vez en
  - Un conjunto de toros
  - Una colección de subvariedades irreducibles atoroidales (es decir, no equivalentes a toros) que admiten métricas homogéneas de ocho tipos diferentes.

Esta estrategia extiende el enfoque basado en descomposiciones esféricas (como los CW-complejos, p.e.) que dan lugar a una casuística enorme difícil de

<sup>5</sup> Por este trabajo, W.Thurston recibió la medalla Field en 1982

controlar (pueden aparecer infinitas colecciones de esferas), permite incorporar de forma natural los resultados relativos a soluciones de sistemas dinámicos en variedades de dimensión tres (teoremas tipo Arnold-Kolmogorov-Moser, p.e.) y refuerza el papel que juegan las simetrías locales para la descripción de la Geometría (como extensión natural del enfoque basado en Espacios Homogéneos).

A finales de los noventa aún no se disponía de un resultado similar para el caso 4-dimensional que es el otro caso importante en baja dimensión.

*Nota.-* Un tratamiento más sistemático de esta cuestión desde el punto de vista topológico se puede ver en Goresky y MacPherson: *Stratified Morse Theory* (Springer-Verlag, 1986) donde se lleva a cabo un “control” en términos de la “evolución” de datos tangenciales y normales en el entorno de cada singularidad. Algunas aplicaciones de este enfoque conciernen a:

- *Robótica:* Modelado de la interacción en operaciones de locomoción y de agarre-manipulación para robots humanoides (ver módulo 5 de mi curso sobre Robótica). La extensión a cuestiones de optimización, simulación y control para animats aún está pendiente de desarrollar.
- *Visión Computacional:* Comparación entre formas en relación con el Reconocimiento basado en las apariencias. El Teorema de Mumford-Shah resuelve el problema para el caso 1-dimensional utilizando la métrica de Peterson-Weil que permite evaluar la proximidad entre formas planares correspondientes a curvas simples (es decir, cerradas y sin auto-intersecciones). Para el caso 2D aún no se dispone de un resultado similar.

## 1.2. Secciones de una Fibración

*Definición.-* Llamamos *sección de una fibración* a cualquier aplicación  $s : M \rightarrow E$  de clase  $C^k$  tal que  $\pi \circ s$  es  $C^k$ -equivalente a la aplicación identidad de  $M$ . Por ello, una  $C^k$ -sección da una  $C^k$ -equivalencia entre  $M$  y su imagen  $s(M)$  en  $E$ .

### 1.2.1. Trivialidad topológica

La existencia de secciones globales siempre no nulas equivale a algún tipo de  $C^k$ -trivialidad para la estructura  $\xi$ . Así, por ejemplo, si  $E$  está dada globalmente como una variedad producto  $M \times F$ , entonces podemos encontrar un número de  $C^k$ -secciones funcionalmente independientes igual a  $\dim(F)$ .

Denotamos mediante  $\Gamma(M, E)$  al conjunto de secciones de una fibración. Usualmente, una fibración no tiene secciones globales que sean siempre no nulas, por lo que es frecuente hablar sólo de secciones locales. En este caso, se entiende que la sección  $s \in \Gamma(U, \pi^{-1}(U))$  está definida sólo  $U$  abierto de trivialización de  $\xi$ .

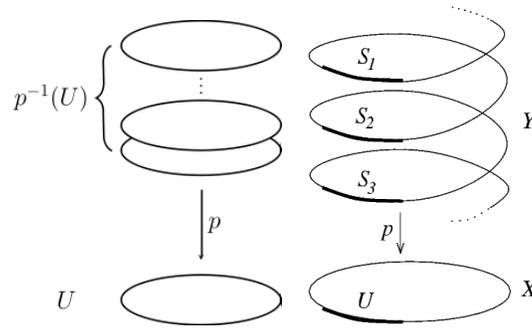


Fig. 1: Espacios recubridores con un número finito o infinito de hojas

### 1.2.2. Espacios recubridores

*Definición.*- Un *espacio recubridor*  $E$  de un espacio topológico base  $B$  está dado por una aplicación suprayectiva  $\pi : E \rightarrow B$ , a la que se llama *aplicación recubridora*, tal que para cualquier  $b \in B$  existe un abierto  $U \subset B$  con  $b \in U$  tal que  $\pi^{-1}(U)$  es una unión de abiertos disjuntos  $V_i$  de  $E$  tales que  $\pi_{V_i} : V_i \rightarrow U$  es un homeomorfismo.

A diferencia del caso de fibrados vectoriales (en el que la fibra es un espacio vectorial), para cualquier  $b \in B$ , se tiene que la fibra  $\pi^{-1}(b)$  es un conjunto discreto de puntos. En Topología Algebraica se muestra cómo construir espacios recubridores universales  $\tilde{E}$  (conexos, localmente conexos por arcos y simplemente conexos); estos espacios están caracterizados por la condición de que cualquier otro morfismo factoriza a través de ellos <sup>6</sup>

Si  $E$  es un espacio recubridor de  $M$ , las aplicaciones que dan  $C^k$ -equivalencias entre  $U$  y los abiertos coordenados contenidos en cada una de las hojas de  $\pi^{-1}(U)$ , son secciones. Algunos *ejemplos sencillos* son los siguientes:

- La aplicación proyección de un fibrado vectorial es una aplicación recubridora que no tiene ramificación.
- Las funciones  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dadas por  $f(z) = z^n$  dan lugar a espacios recubridores con un número finito  $n$  de hojas
- La aplicación  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dadas por  $f(z) = \log z$  dan lugar a espacios recubridores con un número infinito de hojas.

Las deformaciones de los ejemplos anteriores dan lugar a espacios recubridores bastante más interesantes cuyo estudio se desarrolla en Topología Algebraica y en Geometría Algebraica.

<sup>6</sup> Ver el módulo 1 de mis notas de Topología Algebraica, p.e.

### 1.2.3. Ramificación en Geometría Algebraica

El *lugar de ramificación*  $B = \text{Ram}(f)$  de un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  entre variedades es el lugar de puntos de  $Y$  en los que la diferencial no tiene rango máximo, es decir, es el conjunto de valores críticos para  $f$ . Por ello, el lugar de ramificación  $B(f)$  es la imagen por  $f$  del lugar discriminante  $\text{Disc}(f)$  (conjunto de puntos críticos).

El carácter crítico puede deberse al solapamiento de diferentes ramas (como ocurre p.e. con la aplicación  $f(z) = z^n$  para funciones de una variable compleja) o bien a la aparición de singularidades en alguna de las variedades relacionadas por el morfismo  $f$ . Para identificar qué situación se presenta es necesario realizar un análisis más detallado del lugar singular de una aplicación.

El primer resultado importante sobre Ramificación es el Teorema de Riemann-Hurwitz que corrige el valor esperado  $\chi(Z) = n\chi(X)$  para la característica de Euler-Poincaré de los espacios recubridor  $Z$  y base  $X$  de un morfismo  $f : Z \rightarrow X$  de  $n$  hojas en términos del lugar de ramificación  $B = \text{Ram}(f)$  de  $f$ . En el caso de curvas, este resultado fue demostrado por Hurwitz

$$\chi(Z) = n \cdot \chi(X) - \sum_{p \in \text{Ram}(f)} (m_p - 1),$$

donde  $m_p$  denota la multiplicidad de  $f$  en  $p \in X$  (ver Hartshorne, 1977, o bien mis notas del Curso de Geometría Enumerativa para algunas aplicaciones en el caso complejo).

*Nota avanzada.*- El estudio de ramificación de morfismos en geometría Algebraica tiene gran interés para controlar el comportamiento de las ramas del divisor excepcional que aparece al resolver las singularidades de una variedad. Un enfoque más abstracto se desarrolla en el contexto de problemas de clasificación que recibe el nombre de *moduli* de curvas

### 1.2.4. Fibración de Hopf

Las secciones de una fibración pueden tener un comportamiento bastante más complicado que el correspondiente a las secciones de un fibrado vectorial, tal y como se muestra en la fibración de Hopf que se describe a continuación:

Denotemos mediante  $\mathbb{S}^3 := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$  a (la versión compleja de) la esfera unidad en  $\mathbb{R}^4$ . Consideremos la aplicación canónica (Hopf)

$$\pi_H : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}^1 \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^2 \quad | \quad (z, w) \mapsto [z : w]$$

Entonces, para cada punto  $p = [z : w]$  de la esfera de Riemann (como modelo de la recta proyectiva compleja) se tiene que

$$\pi_H^{-1}(p) = \ell \subset \mathbb{C}^2 \quad | \quad \ell \cap \mathbb{S}^3 \simeq \mathbb{S}^1$$

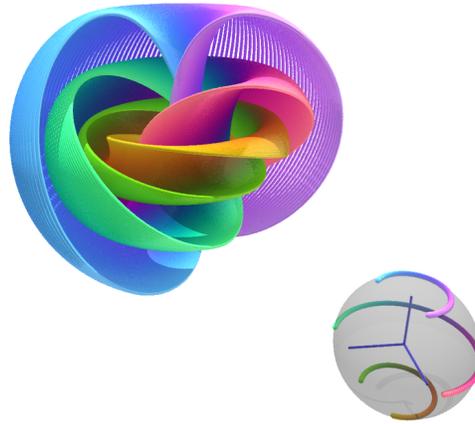


Fig. 2: Banda de Hopf asociada a un corte de la fibración

Por ello, la aplicación  $\pi_H : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una fibración topológica con fibra isomorfa a  $\mathbb{S}^1$ . La visualización de esta fibración no es trivial, salvo que suprimamos un punto (en cuyo caso la 3-esfera se convierte en el espacio  $\mathbb{R}^3$ ).

En la fig.1 se muestra cómo la colección de fibras sobre un arco forma un anillo cuyas circunferencias “borde” están “anudadas” en un punto; este anillo recibe el nombre de banda de Hopf <sup>7</sup>. Una animación muy ilustrativa se puede ver en <http://nilesjohnson.net/hopf.html>

### 1.3. Funciones de transición

Los únicos datos esencialmente nuevos que aparecen en la definición de fibrado vectorial  $\xi$  presentada más arriba se refieren al grupo estructural  $G$  del fibrado  $\xi$  y a las “funciones de transición”  $g_{\alpha\beta}$ . Estas “funciones” permiten “pegar datos” utilizando transformaciones sobre la fibra de cada punto  $\underline{p} \in M$ , fibra que se visualiza de diferentes formas dependiendo del abierto  $U_\alpha$  al que pertenece  $\underline{p}$ . Como la fibra es un e.v. de dimensión finita  $r = \text{rang}(\xi)$ , las diferentes formas de visualizar la fibra están dadas por transformaciones regulares sobre  $\pi^{-1}(\underline{p}) \simeq \mathbb{R}^m$ , es decir, por automorfismos de  $\mathbb{R}^m$  que se representan mediante elementos del grupo lineal general  $GL(m; \mathbb{R})$ . Por ello, las “funciones” de transición están dadas localmente por aplicaciones

<sup>7</sup> En Topología Algebraica se muestra dicha banda es una superficie de Seifert sobre un lazo de Hopf

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(m; \mathbb{R})$$

(verificando propiedades adicionales que se especifican más abajo), es decir, no son propiamente funciones, pues no toman valores en  $\mathbb{R}^m$  para algún  $m$ , sino en un grupo. Esta noción se extiende de forma natural a otros grupos diferentes del grupo lineal general y permite el “pegado” de datos locales utilizando transformaciones sobre la fibra; por ello, es extensible a fibraciones <sup>8</sup>. No obstante, en la mayor parte de los casos que consideramos en Geometría Diferencial, sólo se considera el caso más simple correspondiente a fibrados vectoriales en los que las funciones de transición toman valores en el grupo lineal general o alguno de sus subgrupos clásicos.

Además de su interés para clasificar geometrías, los grupos clásicos proporcionan el marco natural para un gran número de aplicaciones a Física Teórica e ingeniería. La introducción de grupos clásicos en Física Teórica proporciona un soporte global para los diferentes tipos de interacción que aparecen en la Naturaleza. En particular, ha permitido llevar a cabo en los años sesenta y setenta del siglo XX una formulación del modelo estándar (unificación de las interacciones electromagnética, débil y fuerte) y a diferentes propuestas para las Teorías de Gran Unificación que afectan a la fusión del modelo estándar con las Teorías de Interacción Gravitatoria mediante extensiones de la Mecánica Cuántica (ver el módulo 7 para más detalles).

Más recientemente y además de la Física, se han desarrollado aplicaciones hacia la Ingeniería Mecánica, el Control, la Teoría Económica, aspectos de propagación en modelos biológicos o Inteligencia Artificial (tipos de Redes Neuronales Artificiales), entre otras. En el §2,5 desarrollaremos con más detalle la geometría asociada a algunos de los grupos estructurales más interesantes. De momento nos centramos en las funciones de transición.

Las funciones de transición proporcionan herramientas para el “pegado” de datos locales sobre una estructura superpuesta a una variedad. El ejemplo más elemental de funciones de transición corresponde a los isomorfismos en las fibras del fibrado tangente  $\tau M$  de una variedad  $M$ , procedentes de los cambios de carta que podemos realizar sobre la base; más explícitamente, sea  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  y  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  la  $C^r$  equivalencia entre  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  y  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ .

La restricción de la diferencial  $d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$  a la fibra  $T_p M := \pi^{-1}(p)$  del fibrado tangente  $TM$  sobre  $p \in M$  da un automorfismo de  $T_p M$  (es decir, un elemento del grupo lineal general  $GL(m; \mathbb{R})$ ) que representa  $g_{\alpha\beta}(p)$  en  $p \in M$ .

### 1.3.1. Propiedades de las Funciones de Transición

Para facilitar la descripción local de fibraciones en términos de transformaciones de coordenadas sobre la fibra, es conveniente identificar las propiedades

<sup>8</sup> Un caso particularmente importante corresponde al grupo de monodromía asociado a recubrimientos eventualmente ramificados que actúa “intercambiando” hojas del recubrimiento; este tópico se desarrolla con más detalle al final del módulo 1 de Topología Algebraica

que verifican las funciones de transición:

- *Transitividad:*  $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \forall \alpha, \beta, \gamma$  con  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ .
- *Identidad:*  $g_{\alpha\alpha} = e_G$  para cualquier  $\alpha \in A$ .

Como consecuencia, obtenemos que si  $\alpha, \beta \in A$  con  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , entonces  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ .

Estas propiedades permiten comparar y clasificar fibraciones; la clasificación se formula de manera más sintética construyendo invariantes topológicos globales que expresan obstrucciones a extender colecciones de secciones locales a otros abiertos de trivialización de la fibración.

*Ejercicio.*- Verifica que las funciones de transición del fibrado tangente a una variedad están dadas por la diferencial

$$d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} |_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}) \quad \text{representada por} \quad \left( \frac{\partial y_\beta}{\partial x_\alpha} \right)$$

y comprueba que se verifica la propiedad transitiva (*Indicación:* Usa la expresión local para la diferencial de la función compuesta).

### 1.3.2. Elementos de clasificación de fibraciones

Del mismo modo que las condiciones de compatibilidad de las cartas  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^k(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta))$  determinan una  $C^k$ -estructura sobre la variedad  $M$ , se tiene que una colección de  $C^k$ -funciones

$$g_{\alpha\beta} : M \rightarrow GL(r; \mathbb{K})$$

verificando las condiciones (i) y (ii) determina la *clase de isomorfismo* de un  $C^k$ -fibrado vectorial que puede ser reconstruido a partir de estos datos locales. Este es un resultado no trivial, cuya demostración se realiza en el módulo 3 de Topología Algebraica.

De hecho, las dos condiciones más arriba reciben el nombre de “condición de cociclo” para un sistema de funciones de transición como el descrito. Nótese que esta descripción es válida para cualquier fibración que admita una acción de un grupo  $G$  sobre las fibras; es decir, la clase (módulo conjugación) de un sistema de funciones de transición verificando las 2 condiciones anteriores (transitividad e identidad) define un cociclo asociado a la fibración<sup>9</sup>.

En particular, si  $F$  es un espacio vectorial de dimensión  $r$  y  $G = GL(r; \mathbb{R})$ , un cociclo representa cierta “clase de cohomología” que caracteriza unívocamente la clase de isomorfismo del fibrado. La versión diferencial del problema de clasificación se enmarca dentro de la clasificación topológica de fibrados vectoriales

<sup>9</sup> Esta propiedad permite calcular invariantes topológicos asociados a la cohomología de la fibración que permiten relacionar la cohomología de la base con la cohomología del espacio total de la fibración a través de la cohomología de la fibra, dando lugar a las fórmulas tipo K nneth como modelo básico para variedades localmente producto.

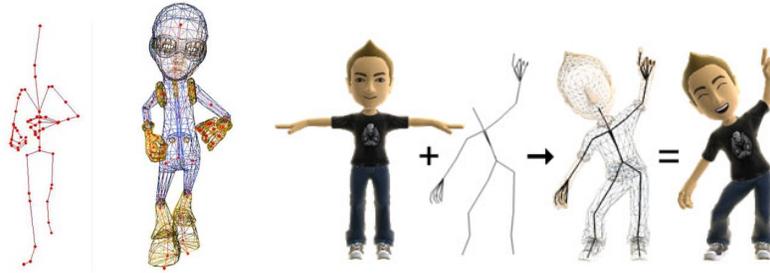


Fig. 3: Animación esquelética y visualización de avatares

sobre una variedad, que es un tópico propio de la Topología Diferencial Global, por lo que no será desarrollado aquí.

### 1.3.3. Una aproximación ingenua a animación

Los conceptos introducidos más arriba son muy abstractos. Sin embargo, algunas de las estrategias de animación utilizan herramientas para describir “familias” de curvas o superficies basadas en *plantillas deformables*. Un *reto actual* consiste en generar herramientas computacionales que permitan capturar de forma automática siluetas (perfiles planos en el plano de imagen) sin utilizar marcas que puedan ser elevados de forma semi-automática a contornos (curvas alabeadas en el espacio) o superficies (acotadas por dichos contornos).

Para simplificar la implementación, sólo se consideran curvas racionales (para siluetas planas o contornos alabeados) ó superficies racionales B-splines (dadas localmente como producto de curvas). El pegado de datos locales se lleva a cabo mediante una adaptación de las transformaciones del espacio (euclídeas ó afines, habitualmente) al marco de splines que se etiquetan como transformaciones splines. Ambos tipos de transformaciones están dadas por funciones de transición; en particular, sólo es posible definir las localmente.

La capacidad de visualización desde diferentes puntos de vista asociados a una cámara virtual  $\mathbf{C}$  (que es necesario implementar) están asociadas a la proyección sobre el plano de imagen de una representación volumétrica cambiante asociada a la localización de la cámara  $\mathbf{C}$ . Por ello, diferentes visualizaciones volumétricas están relacionadas entre sí por funciones de transición pertenecientes a un grupo clásico  $G$ .

Estas consideraciones se aplican a la animación de personajes atendiendo a representaciones basadas en el esqueleto ó bien en las apariencias.

- Las *representaciones esqueléticas* están dadas por una colección de cadenas cinemáticas (segmentos y juntas) sobre las que se aplican transformaciones lineales que se propagan a lo largo de cada cadena (mediante composición

ó producto de elementos del grupo). Los grados de libertad (DOF) de cada cadena proporcionan los parámetros sobre los que actúan las transformaciones.

- Las *representaciones basadas en las apariencias* están dadas por una colección de mallas cuadrangulares que se deforman de acuerdo con funcionales definidos globalmente (diferentes tipos de distancia ó de energía) con restricciones (relativas al volumen, la densidad ó la curvatura) que limitan el rango de variabilidad. Los objetos definidos (tensores de Bernstein-Bézier) sobre parametrizaciones cuadrangulares proporcionan los elementos continuos sobre los que actúan las transformaciones. Este enfoque se desarrolla al final del módulo §3

En todos los casos y antes de la renderización, es necesario tener en cuenta el efecto de disipación (espacial y temporal) correspondiente a las transformaciones que actúan sobre modelos esqueléticos ó basadas en las apariencias.

## 2. Fibrado Vectorial. Enfoque funtorial

De una forma ingenua podría decirse que el enfoque funtorial consiste en estudiar de forma simultánea los objetos y los morfismos entre objetos. En el caso de esta sección, los objetos son fibrados vectoriales y los morfismos son aplicaciones fibradas, es decir, aplicaciones lineales entre los espacios total y base que hacen conmutativos los diagramas naturales.

El enfoque funtorial tiene interés para identificar propiedades formales que facilitan la clasificación salvo isomorfismo de los fibrados vectoriales (K-Teoría) y el cálculo de invariantes topológicos de los fibrados vectoriales; estos invariantes (clases de cohomología como veremos en el §4) sólo dependen de la clase de homotopía del morfismo, lo cual proporciona una motivación adicional para el estudio de aplicaciones clasificantes.

La extensión de este enfoque a fibraciones más generales presenta aún una gran cantidad de problemas abiertos y es un tópico de investigación. Por ello, nos restringimos al caso más sencillo de fibrados vectoriales. El primer objetivo a alcanzar consiste en describir un espacio topológico abstracto que permita clasificar los objetos (fibrados vectoriales, p.e.) con los que trabajamos.

Para fijar ideas, nos restringimos al caso de fibrados tangentes. El primer ejemplo importante de aplicación clasificante es la aplicación de Gauss  $\gamma : M \rightarrow Grass(m, N)$  sobre la Grassmanniana para una variedad compacta  $M$ . En este caso, el Teorema de Severi-Whitney garantiza que existe un embebimiento  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$  para  $N \gg 0$ . Por ello, el espacio tangente  $T_{\underline{p}}M$  se puede considerar como un subespacio  $m$ -dimensional de  $\mathbb{R}^N$ , es decir, es un elemento de  $Grass(m, N)$ ; por ello, la asignación que a cada punto  $\underline{p} \in M$  le asocia el elemento  $L_{\underline{p}}^{(m)}$  correspondiente al espacio tangente  $T_{\underline{p}}M$  está bien definida. Esta aplicación proporciona un morfismo sobre  $Grass(m, N)$  tal que el fibrado tangente de una variedad compacta  $m$ -dimensional es la imagen inversa del fibrado tautológico  $S$  definido sobre la grassmanniana  $Grass(m, N)$  para  $N \gg 0$  módulo isomorfismo. Por ello, la grassmanniana es una “espacio clasificante” y la aplicación de Gauss generalizada es una aplicación clasificante; de hecho, es posible demostrar que el conjunto de clases de isomorfismo de los fibrados tangentes es equivalente al conjunto de clases de homotopía  $[M, Grass(m, N)]$  de las aplicaciones clasificantes.

### 2.1. Nociones básicas

*Definición.*- Llamamos *fibrado vectorial sobre una  $C^k$  variedad  $M$*  a una fibración de clase  $C^k$  sobre  $M$  tal que la fibra  $F$  es un  $k$ -espacio vectorial. Llamamos *rango* de un fibrado vectorial a la dimensión de la fibra general  $F$  como espacio vectorial. Diremos que un fibrado vectorial  $\xi = (E, \pi, M, F, G)$  de clase  $C^k$  es *trivial* si  $E$  es  $C^k$ -equivalente a  $M \times F$ .

### 2.1.1. Secciones de un fibrado vectorial

*Definición.-* Llamamos *sección local* del fibrado vectorial  $\xi$  a cualquier aplicación  $s \in C^k(U, E)$  tal que  $\pi \circ s = id_M$ . Denotamos mediante  $\Gamma(U, E)$  al conjunto de secciones locales definidas sobre  $U$  y mediante  $\Gamma(M, E)$  a las secciones globales.

*Ejemplo: Secciones del fibrado tangente.-* El fibrado tangente  $\tau M$  de una  $C^k$ -variedad  $M$  es el primer ejemplo no trivial de un fibrado vectorial de clase  $C^k$ . Las secciones del fibrado tangente son los campos vectoriales y la condición de trivialidad para el fibrado tangente de  $M$  corresponde por definición a que dicha variedad sea paralelizable. En el §2,1 se han mostrado ejemplos de esta situación.

En la práctica y salvo para variedades paralelizables, para un fibrado vectorial arbitrario no es fácil encontrar secciones globales siempre no nulas. Por ello, la estrategia habitual consiste en empezar con secciones locales definidas sobre abiertos y tratar de extenderlas a toda la variedad pegando los datos locales correspondientes a abiertos de trivialización. La razón para esta forma de proceder es doble:

- el fibrado vectorial admite un atlas de trivialización formado por abiertos  $U$  sobre los que se tienen sistemas de  $r$  secciones  $s_1^{(U)}, \dots, s_r^{(U)}$  linealmente independientes.
- Si la base  $B$  de un fibrado vectorial  $\xi$  es una variedad paracompacta, entonces cualquier sección definida sobre un *cerrado*  $A \subset M$  se extiende a una sección *global*. Ello se debe a que cualquier función diferenciable  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre un cerrado  $A \subset M$  de una variedad paracompacta  $M$  se extiende a toda la variedad  $M$  (comprobarlo como ejercicio).

### 2.1.2. Morfismos de Fibrados Vectoriales

*Definición.-* Dados dos fibrados vectoriales  $\xi := (E(\xi), \pi_\xi, X, F_\xi, G_\xi)$  y  $\eta = (E(\eta), \pi_\eta, Y, F_\eta, G_\eta)$  y una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$ , llamamos *homomorfismo del fibrado*  $\xi$  en  $\eta$  a cualquier aplicación  $F : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \longrightarrow & E(\eta) \\ \pi_\xi \downarrow & & \downarrow \pi_\eta \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

y cuya restricción a las fibras respectivas es un  $\mathbf{K}$ -homomorfismo, siendo  $\mathbf{K}$  el cuerpo base del espacio vectorial isomorfo a la fibra.

*Definición.-* Dados dos fibrado vectoriales  $\xi$  y  $\eta$  sobre un mismo espacio base  $X$ , denotamos al conjunto de homomorfismos de  $\xi$  en  $\eta$  por  $HOM(\xi, \eta)$ . Este conjunto tiene asimismo estructura de fibrado vectorial con fibra isomorfa

a  $\text{Hom}_{\mathbf{K}}(F_\xi, F_\eta)$ , donde  $F_\xi$  (respectivamente,  $F_\eta$ ) denota la fibra general de  $\xi$  (respectivamente,  $\eta$ ).

*Ejercicio.*- Describe la trivialización del fibrado  $HOM$  y sus funciones de transición.

Frecuentemente denotaremos a los elementos de  $HOM(\xi, \eta)$  mediante pares de la forma  $(F, f)$  donde  $F : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ ,  $f : X \rightarrow Y$  de modo que  $\pi_\eta \circ F = f \circ \pi_\xi$  y la restricción de  $F$  a cada fibra induce una aplicación lineal entre espacios vectoriales, es decir,  $F_x : \pi_\xi^{-1}(x) \rightarrow \pi_\eta^{-1}(f(x))$ , ó si se prefiere,  $F | \pi_\xi^{-1}(x) \in \text{Hom}(\xi_x, \eta_{f(x)})$ ,  $\forall x \in X$ .

*Definición.*- Dados dos fibrado vectoriales  $\xi$  y  $\eta$  sobre un mismo espacio base  $X$ , diremos que  $\xi$  es *isomorfo* a  $\eta$  si existe un homeomorfismo  $E(\xi) \rightarrow E(\eta)$  entre los espacios totales, cuya restricción a cada fibra induce un isomorfismo  $\pi_\xi^{-1}(x) \simeq \pi_\eta^{-1}(f(x))$  como espacios vectoriales para cualquier  $x \in X$ .

Análogamente, se definen las nociones de *monomorfismo* y *epimorfismo* de fibrados vectoriales sobre un mismo espacio base  $M$  (formularlo como ejercicio). Del mismo modo que en Algebra Lineal Elemental, la condición para que un morfismo de fibrados vectoriales sea un isomorfismo equivale a que sea un monomorfismo y un epimorfismo.

A continuación se presenta una generalización de la noción de isomorfismo de fibrados vectoriales, que no requiere que los fibrados vectoriales estén dados sobre el mismo espacio base (esta noción es asimismo de gran utilidad en Geometría Algebraica y Analítica, así como en Algebra Conmutativa).

### 2.1.3. Producto Fibrado

Dada una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  y un fibrado vectorial  $\eta = (E(\eta), \pi_\eta, Y, F_\eta)$  sobre  $Y$ , definimos el *producto fibrado* de  $X$  y  $E(\eta)$  sobre  $Y$  como el conjunto de pares

$$\{(x, z) \in X \times E(\eta) \mid f(x) = \pi_\eta(z)\}$$

al que denotamos mediante  $E(f^*\eta)$  (ó también como  $X \times_f E(\eta)$  en Topología, y más frecuentemente como  $X \times_Y E(\eta)$  en otras Geometrías y en Algebra Conmutativa), dotado con la aplicación proyección natural  $\pi_{f^*\eta}$  que a cada par  $(x, v) \in E(f^*\eta)$  le asocia la primera componente  $x \in X$  (de este modo, se obtiene trivialmente la conmutatividad del diagrama). Nótese que  $z \in E(\eta)$  está necesariamente dado por un par de la forma  $(f(x), v)$ , donde  $v \in \eta_{f(x)}$ . Por ello, los elementos de  $E(f^*\eta)$  estarían dados por pares de la forma  $(x, (f(x), v))$  que (estrictamente hablando) son ternas que representamos de forma simplificada mediante  $(x, v)$ , sobrentendiendo así la aplicación  $f$ .

Haciendo  $F(x, z) := (f(x), z)$  obtenemos un isomorfismo entre las fibras  $\pi_{f^*\eta}^{-1}(x) \simeq \pi_\eta^{-1}(f(x))$  como espacios vectoriales sobre el cuerpo base. Por último, sea  $V$  un abierto de trivialización local de  $\eta$  (de modo que  $\pi_\eta^{-1}(V)$  es equivalente

a  $V \times F_\eta$ ) y hagamos  $U := f^{-1}(V)$  (para ello  $f$  debe ser al menos continua). Definimos entonces

$$\phi_U : U \times F_{f^*\eta} \rightarrow \pi_{f^*\eta}^{-1}(U) \quad | \quad \phi_U(x, z) := (x, \phi_V(f(x), z))$$

Las aplicaciones así definidas dan un atlas de trivialización para  $f^*\eta$ , por lo que *la imagen recíproca  $f^*\eta$  es un fibrado vectorial sobre  $X$ .*

El ejemplo más importante de producto fibrado está dado por la restricción de una estructura a una subvariedad. Veamos con más detalle la situación más relevante para la Geometría Diferencial.

#### 2.1.4. El Fibrado Tangente de una subvariedad

Sea  $M$  una  $C^k$ -subvariedad de una  $C^k$ -variedad  $N$  y denotemos mediante  $f : M \hookrightarrow N$  la aplicación de inclusión. Para cada punto  $p \in M$ , la diferencial  $d_p f$  de  $f$  en  $p$  define una aplicación lineal  $d_p f : T_p M \rightarrow T_p N$  inyectiva entre espacios vectoriales de dimensiones  $m$  y  $n$ , respectivamente.

Como la noción de fibrado tangente es intrínseca, tenemos una  $C^k$ -estructura sobre  $TM$  y otra que podemos inducir a partir de la familia de aplicaciones  $d_p f$ , cuando  $p$  recorre  $M$ . Más explícitamente, construimos la imagen recíproca  $f^*(\tau N)$  ó restricción  $\tau N|_M$  del fibrado tangente  $\tau N$  a  $M$ . Este fibrado está dado por definición como el conjunto de pares

$$\{(p, z) \in M \times E(TN) \quad | \quad f(p) = \pi_N(z)\}$$

El fibrado así construido es isomorfo al fibrado tangente de la subvariedad  $M$  de  $N$ . La comprobación se puede hacer usando el criterio de isomorfismo entre fibrados vectoriales dado más arriba (escribir los detalles como ejercicio). Por ello, la restricción del fibrado tangente  $\tau N$  de  $N$  a una subvariedad  $M$ , da un monomorfismo  $\tau M \rightarrow (\tau N)|_M$  de fibrados vectoriales sobre  $M$ .

#### 2.1.5. Subfibrados del fibrado tangente

Para cualquier  $C^k$ -subvariedad  $M$  de una  $C^k$ -variedad  $M$ , se tiene que  $\tau M$  es un subfibrado de  $\tau N$ . Sin embargo, *no todo subfibrado vectorial del fibrado tangente  $\tau N$  de una  $C^r$ -variedad  $N$  es el fibrado tangente de una subvariedad  $M$ .*

En el §2,6, veremos que necesitamos añadir una condición técnica sobre los generadores locales ó secciones del fibrado (es la condición de *involutividad* ó cierre respecto a tomar corchetes de Lie que ya hemos presentado en el §1,6). Una primera versión del Teorema de Frobenius muestra que dicha condición es equivalente a una condición de integrabilidad para la distribución asociada.

Cuando no haya peligro de confusión, denotaremos frecuentemente a un fibrado vectorial mediante su espacio total, sobrentendiendo el resto de los datos.

## 2.2. Dual de un Fibrado Vectorial

Dado un fibrado vectorial  $\xi = (E(\xi), \pi, X, F, G)$  sobre un espacio base  $X$ , llamamos *dual de  $\xi$* , y lo representamos mediante  $\xi^*$  al fibrado  $HOM(\xi, \varepsilon^1)$ , donde  $\varepsilon^1$  representa el fibrado vectorial trivial de rango 1 sobre  $X$ .

En virtud del §2,2,5,  $\xi^*$  es un fibrado vectorial con los mismos abiertos de trivialización que el fibrado original y con el mismo rango que  $\xi$  cuya fibra en  $x \in X$  está dada por  $Hom(\xi_x, R)$ .

### 2.2.1. Funciones de transición del dual

Para ver cómo son sus funciones de transición necesitamos recordar algunas cuestiones elementales de Algebra Lineal: Dado un endomorfismo  $L \in End(V)$  de un espacio vectorial  $V$ , dotado de un producto interno  $\langle , \rangle$ , el *endomorfismo adjunto ó dual*  $L^* \in End(V)$  se define mediante la asignación  $\langle L^*v, w \rangle := \langle v, Lw \rangle$  para cualquier  $v, w \in V$ . Fijada

$$\langle L^*v, w \rangle := \langle v, Lw \rangle \quad \forall v, w \in V .$$

Fijada una base  $\mathcal{B}_V$ , si  $L$  está representada por la matriz  $A_L$ , entonces  $L^*$  está representada por la matriz traspuesta  $A_L^t$ , respecto a dicha base. En consecuencia, si  $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$  es un sistema de funciones de transición correspondiente a un atlas de trivialización de un fibrado  $\xi$  sobre una variedad  $M$ , entonces  $\{g_{\alpha\beta}^t\}_{\alpha, \beta \in A}$  es un sistema de funciones de transición para  $\xi^*$ .

### 2.2.2. Apéndice: Nota sobre Operadores autoadjuntos

En las aplicaciones de las matemáticas a otras ciencias los *operadores autoadjuntos* (es decir, aquellos operadores tales que  $L = L^*$ ) son de especial interés. Según el lenguaje que acabamos de introducir, si estamos trabajando sobre fibrados, esta condición equivale a que todas las matrices que representan las funciones de transición estén representadas por matrices simétricas. Ahora bien, cualquier matriz simétrica  $A$  es de la forma  $C.D.C^{-1}$  donde podemos elegir  $C$  de modo que sea ortogonal (según el procedimiento de Gram-Schmid).

En particular, esto ocurre por ejemplo cuando dichas matrices corresponden a formas cuadráticas semidefinidas (el análogo en teoría de operadores muestra que cualquier operador positivo es autoadjunto). Por ello, uno de los objetivos de esta aproximación geométrica consiste en construir formas bilineales invariantes para la acción del grupo estructural del fibrado y dar condiciones para que dichas formas sean no-degeneradas (esto se detallará en el §3,5). De momento volvamos a cuestiones más elementales.

La extensión de este enfoque a cuestiones Análisis Integral tiene un gran interés para el estudio de soluciones de operadores en espacios de Hilbert <sup>10</sup>.

<sup>10</sup> Los Teoremas del Índice para Operadores Elípticos proporcionan una de las cimas de

### 2.2.3. El fibrado cotangente

El ejemplo inicial más importante está dado por el dual del fibrado tangente  $TM$  de una variedad  $M$  al que se llama el *fibrado cotangente* (ó espacio de las fases, según la terminología tradicional en Mecánica Analítica) y se representa mediante  $T^*M$  y también mediante  $\Omega_M$ . Si  $U$  es un abierto de trivialización del fibrado tangente  $TM$ , y  $x^1, \dots, x^m$  es un sistema de coordenadas locales para  $U$ , podemos describir el espacio de secciones de los fibrados tangente y cotangente mediante

$$\Gamma(U, TU) = C^r \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\rangle \quad \text{y} \quad \Gamma(U, T^*U) = C^r \langle dx^1, \dots, dx^m \rangle ,$$

respectivamente. Sobre cada abierto  $U$  de trivialización tenemos una dualidad procedente de la evaluación de las diferenciales sobre las derivaciones, es decir, la imagen via  $dx^j : TU \rightarrow U \times \mathbb{R}$  de los elementos  $\partial/\partial x^i$  de la base de  $\Gamma(U, TU)$  está dada por la delta de Kronecker:

$$dx^j \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \delta^{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, m .$$

En la igualdad precedente estamos sobrentendiendo la métrica usual dada por la matriz identidad en  $\mathbb{R}^m$ . En situaciones más generales, si  $g(p) = (g^{ij})(p)$  representa la matriz de una métrica sobre el espacio tangente  $T_pM$  (que varía continuamente con  $p \in M$ ), se tiene que  $dx^j(\partial/\partial x^i)(p) = g^{ij}(p)$ .

Para globalizar este resultado necesitamos disponer de una “métrica sobre el fibrado”. Una métrica sobre un fibrado consiste *grosso modo* en una familia de métricas  $\{\omega_x\}_{x \in X}$  sobre cada fibra  $E_x := \pi_{x_i}^{-1}(x)$ , parametrizada (de forma  $C^r$ ) por el punto base  $x \in X$ . Cada métrica es una aplicación bilineal simétrica sobre un e.v.  $E_x \simeq E$ , es decir, un elemento del producto tensorial  $E_x \otimes E_x$ . Para dar un contenido preciso a la idea de métrica sobre un fibrado, debemos desarrollar ciertos mínimos de Cálculo Tensorial (ver §3,1).

## 2.3. Orientación de un fibrado vectorial

Esta noción es la extensión natural de la introducida en el §2,1 para variedades orientables que es equivalente a la condición de orientabilidad para el fibrado tangente. Por ello, diremos que  $\xi(E(\xi), \pi_\xi, X, F_\xi, G)$  es un fibrado orientable si existe una familia de orientaciones sobre cada fibra que es  $C^r$ -compatible con la estructura de la base. De una manera más precisa:

---

las Matemáticas del s.XX; estos tópicos se abordan en el módulo 5 del Curso de Topología Diferencial

### 2.3.1. Fibrado vectorial orientable

*Definición.-* Diremos que un *fibrado vectorial*  $\xi$  es *orientable* si para cada punto  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  (donde  $U_\alpha$  y  $U_\beta$  son abiertos de trivialización de  $\xi$ ) la restricción a  $\pi_\xi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$  del cambio de carta  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  induce una transformación sobre la fibra que conserva la orientación (como espacio vectorial).

El cambio de carta  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  en cada punto  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  está dado por el valor de la función de transición  $g_{\alpha\beta}(p)$ . Por ello, un fibrado vectorial es orientable si y sólo si  $\det(g_{\alpha\beta}(p)) > 0$  para cualquier  $p \in X$ .

### 2.3.2. Orientación de un fibrado vectorial

*Definición.-* Llamamos *orientación de un fibrado orientable*  $\xi$  a una de las clases de equivalencia determinadas por la orientabilidad. Dicha clase recibe el nombre de *clase de Euler del fibrado* y se denota mediante  $e(\xi)$ ; es no nula para cualquier fibrado orientable.

Al final del §4 se muestra que la clase de Euler es la clase de cohomología de grado máximo del fibrado vectorial  $\xi$ ; de hecho es la “clase característica” más fácil de interpretar para la cohomología de un fibrado.

### 2.3.3. Algunas propiedades elementales

- Si un fibrado vectorial es orientable (y su grupo estructural es el grupo lineal general), entonces admite dos orientaciones opuestas, en correspondencia con la elección de una de las dos componentes conexas del grupo estructural  $GL(r; R)$  del fibrado  $\xi$  donde  $r$  representa el rango del fibrado  $\xi$  (recordemos que dichas componentes corresponden a que el signo del  $\det(A)$  sea positivo ó negativo cuando  $A$  recorre  $GL(r; R)$ ).
- Una variedad es orientable si y sólo si su fibrado tangente es orientable. Los ejemplos mostrados en el §2,1 de variedades orientables y no-orientables permiten describir fibrados vectoriales orientables y no-orientables. Nótese que la condición de ser orientable ó no para un fibrado depende únicamente de la estructura del fibrado.
- El primer ejemplo de fibrado vectorial no orientable está dado por el fibrado tautológico sobre  $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^m$  (ver §2,1 para detalles).

### 2.3.4. Ejemplo: El Fibrado Tangente del Espacio Proyectivo

Cualquier punto  $\{\pm x\} \in \mathbb{R}\mathbf{P}^n$  del espacio proyectivo real está representado en  $\mathbf{R}^{n+1}$  por una recta  $\ell \subset \mathbf{R}^{n+1}$  que pasa por el origen y corta a  $\mathbb{S}^n$  en  $\pm x$ . Denotemos mediante  $a$  a la aplicación antipodal  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^n$ . El espacio tangente a  $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^n$  en el punto  $\{\pm x\}$  está representado por el conjunto de pares

$$\{(x, v), (-x, -v)\} \quad \text{t.q.} \quad x.x = 1, \quad x.v = 0,$$

donde el punto denota el producto escalar ordinario en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y estamos haciendo el abuso de notación usual, según el cual identificamos un punto con el (afijo del) vector que le une al origen de coordenadas. Usando la descripción usual del espacio tangente para los puntos de la esfera y pasando al cociente modulo la aplicación antipodal, obtenemos que cada uno de dichos pares está representado por una aplicación lineal

$$\varphi_\ell : \ell \rightarrow \ell^\perp \quad | \quad \varphi_\ell(x) = v.$$

Por ello, el espacio tangente  $T_{\{\pm x\}}\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  al espacio proyectivo real  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  en el punto  $\{\pm x\}$  es isomorfo al espacio vectorial  $\text{Hom}(\ell, \ell^\perp)$ . Ahora bien,  $\ell$  es la fibra del fibrado lineal tautológico  $\gamma_n^1$  y  $\ell^\perp$  es la fibra del ortogonal  $\gamma_n^\perp$ . Si el punto  $\{\pm x\}$  varía de forma continua en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ , también lo hace  $\varphi_\ell$ , por lo que la aplicación que a cada punto  $\{(x, v), (-x, -v)\} \in E(\tau_{\{\pm x\}}\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$  le asocia la aplicación lineal  $\varphi_\ell$  es continua. Esta asignación da el isomorfismo requerido

$$\tau_{\{\pm x\}}\mathbb{R}\mathbb{P}^n \simeq \text{HOM}(\gamma_n^1, (\gamma_n^1)^\perp).$$

## 2.4. Fibrados principales. Elementos básicos

Sobre un fibrado vectorial  $\xi = (E_\xi, \pi_\xi, B, F)$  no existe una acción “natural” de un grupo de Lie sobre el espacio total del fibrado que actúe de forma transitiva sobre las fibras  $F_b$  para  $b \in B$ , ni siquiera cuando las fibras son grupos de Lie. Un fibrado principal ni siquiera tiene por qué ser un fibrado vectorial, aunque a cualquier fibrado vectorial se le puedan asociar diferentes tipos de fibrados principales.

la noción de fibrado principal se puede definir para un espacio topológico y proporciona una estructura con propiedades más estrictas que la de “variedad de órbitas” (orbifold) que aparece en otros apartados de este capítulo. A lo largo de este curso, sólo estamos interesados en fibrados principales sobre variedades suaves, en los que la proyección  $\pi : P \rightarrow X$  es suave y  $G$  es un grupo de Lie. No obstante, empezamos con la definición más general.

### 2.4.1. Noción de fibrado principal

*Definición.-* Dado un grupo topológico  $G$ , un  $G$ -fibrado principal es un fibrado  $\pi : P \rightarrow X$  junto con una acción a la derecha continua  $\alpha : P \times G \rightarrow P$  tal que

- conserva las fibras de  $P$  es decir, si  $y \in P_x$  entonces  $y * g \in P_x$  para cualquier  $g \in G$

- $G$  actúa de forma libre y transitiva, es decir, cada fibra es homeomorfa al grupo  $G$ .

Habitualmente se requiere que  $X$  sea Hausdorff y paracompacto.

Como el grupo conserva las fibras de  $\pi : P \rightarrow X$  y actúa de forma transitiva, se tiene que las  $G \cdot x$  de la  $G$ -acción son las fibras del fibrado y que el espacio de órbitas  $P/G$  es homeomorfo al espacio base

*Algunos ejemplos básicos* corresponden al fibrado de  $k$ -referencias (llamado también variedades de Stiefel) en un  $n$ -espacio cuyo cociente proporciona la variedad de Grassmann  $Grass(k, n)$  ó el espacio proyectivo  $n$ -dimensional.

### 2.4.2. Fibrados principales triviales

*Lema 1.-* Un fibrado principal es trivial si admite una sección global.

*Lema 2.-* Si  $\pi : P \rightarrow X$  es un  $G$ -fibrado principal suave, entonces  $G$  actúa de forma libre y propia sobre el espacio total  $P$ , verificándose que el cociente  $P/G$  es difeomorfo a la variedad base  $X$ .

*Proposición.-* Las propiedades precedentes caracterizan a un fibrado principal suave, es decir, si  $P$  es una variedad suave,  $G$  un grupo de Lie y  $\alpha : P \times G \rightarrow P$  una acción libre suave a la derecha sobre  $P$  entonces

- El cociente  $P/G$  es una variedad suave
- La proyección natural  $\pi : P \rightarrow P/G$  es una submersión suave;
- $P$  es un  $G$ -fibrado principal sobre  $P/G$ .

*Ejercicio.-* Un fibrado vectorial siempre admite la sección nula como una sección global. ¿Implica ello que es un fibrado principal trivial? Razona la respuesta.

### 2.4.3. Reducción de grupo estructural

Dado un subgrupo  $H$  de  $G$ , las fibras del fibrado  $P/H$  son homeomorfas al espacio cociente. Si el fibrado  $P/H$  admite una sección global, se dice que la sección es una reducción del grupo estructural  $G$  al subgrupo  $H$ .

En general, no tiene por qué existir una reducción del grupo estructural  $G$  a un subgrupo  $H$ . Algunos casos importantes en los que existe una reducción del grupo estructural son los siguientes:

- Una variedad real  $m$ -dimensional  $M$  admite un campo de  $k$ -referencias si el fibrado de referencias se puede reducir al subgrupo  $GL(k; \mathbb{R})$  del grupo estructural  $GL(k; \mathbb{R})$ .

- Una variedad  $m$ -dimensional real  $M$  es orientable si y sólo el fibrado de referencias se puede reducir al grupo especial ortogonal  $SO(m; \mathbb{R})$ .
- Una variedad real  $2m$ -dimensional  $M$  admite una estructura casi-compleja si el fibrado de referencias  $GL(2m; \mathbb{R})$  se puede reducir al subgrupo  $GL(m; \mathbb{C})$  del grupo estructural  $GL(2m; \mathbb{R})$ .

*Ejercicio.-* Demuestra que una variedad  $m$ -dimensional real  $M$  admite  $m$  campos vectoriales linealmente independientes (es decir, es paralelizable) en cada punto si y sólo su fibrado de  $m$ -referencias admite una sección global no-nula. ¿Cuál es la reducción del grupo estructural en este caso?

#### 2.4.4.

### 3. Operaciones sobre fibrados

En esta sección se describen operaciones sobre fibrados y se muestran algunas propiedades básicas de dichas operaciones.

#### 3.1. Suma de Whitney de Fibrados Vectoriales

##### 3.1.1. Definición

*Definición.*- Dados dos fibrados vectoriales  $\xi_1 = (E_1, \pi_1, B)$  y  $\xi_2 = (E_2, \pi_2, B)$  sobre un mismo espacio base  $B$ , se define el fibrado *suma de Whitney* y se denota mediante  $\xi_1 \oplus \xi_2$  como el fibrado cuya fibra en cada punto base  $b \in B$  está dado por la suma directa  $\pi_1^{-1}(b) \oplus \pi_2^{-1}(b)$  de las fibras de  $\xi_1$  y  $\xi_2$  en  $b \in B$ .

*Ejercicio.*- Demuestra que la suma directa de Whitney es la imagen inversa por la aplicación diagonal  $\Delta_B : B \hookrightarrow B \times B$  del fibrado  $E_1 \times E_2$  sobre  $B \times B$ . Esta afirmación es equivalente a decir que la suma de Whitney es el producto fibrado de  $\xi_1$  y  $\xi_2$  sobre  $B$ .

##### 3.1.2. Construcción

Dados dos fibrados vectoriales  $\xi = (E(\xi), \pi_\xi, X, F_\xi)$  y  $\eta = (E(\eta), \pi_\eta, X, F_\eta)$  sobre un mismo espacio base  $X$ , construimos el espacio

$$E(\xi \oplus \eta) := \{(z, z') \in E(\xi) \times E(\eta) \mid \pi_\xi(z) = \pi_\eta(z')\} .$$

Haciendo  $\pi_{\xi \oplus \eta}(z, z') := \pi_\xi(z) = \pi_\eta(z')$ , se tiene que la 4-upla  $(E(\xi \oplus \eta), \pi_{\xi \oplus \eta}, X, F_\xi \oplus F_\eta)$  es un fibrado vectorial (comprobarlo como ejercicio) al que llamamos *suma de Whitney* de  $\xi$  y  $\eta$ , y denotamos mediante  $\xi \oplus \eta$ .

*Ejercicio.*- Describe los abiertos de trivialización de  $\xi \oplus \eta$ .

##### 3.1.3. Funciones de transición

Las funciones de transición de la suma de Whitney  $\xi \oplus \eta$  respecto a dicha trivialización están dadas por

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(r+r'; \mathbf{R}) \quad | \quad g_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} h_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & k_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta ,$$

donde  $h_{\alpha\beta}$  (respectivamente,  $k_{\alpha\beta}$ ) denota un sistema de funciones de transición para el fibrado vectorial  $\xi$  (respectivamente,  $\eta$ ). Esta descripción nos permite dar asimismo una expresión explícita para el isomorfismo natural  $\xi \oplus \eta \simeq \eta \oplus \xi$  (que consiste en intercambiar las cajas de la matriz diagonal que se han mostrado más arriba).

*Ejercicio.*- Demuestra que la descripción de las funciones de transición es compatible con las diferentes descripciones de la suma de Whitney mostradas más arriba.

### 3.1.4. Algunas propiedades elementales

1. El fibrado tangente del producto de variedades es isomorfo a la suma de Whitney de los fibrados vectoriales tangentes.
2. Si  $M$  y  $N$  son paralelizables, entonces  $M \times N$  es paralelizable. En efecto, denotemos mediante  $p$  y  $q$  las proyecciones de  $M \times N$  sobre  $M$  y  $N$ , respectivamente. Entonces

$$\tau(M \times N) \simeq p^* \tau M \oplus q^* \tau N \simeq p^* \varepsilon_M^m \oplus q^* \varepsilon_N^n \simeq \varepsilon_{M \times N}^m \oplus \varepsilon_{M \times N}^n \simeq \varepsilon_{M \times N}^{m+n}$$

*Ejercicio.*- Demuestra las afirmaciones precedentes.

## 3.2. Fibrado normal de una subvariedad

El fibrado normal de una subvariedad  $M$  de una variedad  $N$  proporciona información extrínseca de una variedad, es decir, sobre la forma particular en la que  $M$  está “sumergido” en  $N$  a través de una aplicación  $f : M \rightarrow N$  (habitualmente un embebimiento). Las “apariciones” de los objetos corresponden a información intrínseca. Los resultados más importantes desde el punto de vista geométrico o topológico son los que permiten relacionar los datos intrínsecos (asociados al fibrado tangente) con los extrínsecos (asociados al fibrado normal).

El ejemplo más simple de caracteres extrínsecos en Geometría Algebraica es el grado de una curva, el número de puntos dobles o de cúspides que aparecen al proyectar una curva alabeada sobre una curva plana. Estos caracteres no son invariantes por transformaciones birracionales, pero son de gran importancia para reconocer objetos, p.e. Estos ejemplos se extienden de forma inmediata al caso de dimensión arbitraria.

### 3.2.1. Descripción del fibrado normal

*Definición.*- Dada una subvariedad  $M$  de  $N$ , llamamos *fibrado normal de  $M$  relativo a  $N$* , y lo denotamos por  $\mathcal{N}_{N/M}$  al cociente  $f^*TN/TM$ , donde  $f : M \hookrightarrow N$ , denota la aplicación que da la estructura de  $M$  como subvariedad de  $N$ .

*Ejercicio.*- Comprueba que el fibrado normal está bien definido.

### 3.2.2. Sucesiones exactas de fibrados relativos a una subvariedad

Dadas una  $C^r$ -aplicación  $f : M \rightarrow N$  entre dos  $C^r$ -variedades  $M$  y  $N$  para  $r \geq 2$

1. Se tiene una sucesión exacta de espacios vectoriales

$$0 \rightarrow T_p M \rightarrow f^* T_{f(p)} N \rightarrow (\mathcal{N}_{M/N})_p \rightarrow 0$$

para cada punto  $p \in M$  de dimensiones  $m$ ,  $n$  y  $n - m$ , respectivamente.

2. Utilizando la estructura de  $M$  como subvariedad de  $N$  demostrar que existe un monomorfismo (morfismo inyectivo) de fibrados  $TM \rightarrow f^* TN$  sobre  $M$  que se restringe a una aplicación inyectiva  $T_p M \rightarrow f^* T_{f(p)} N$  para cada  $p \in M$  entre espacios vectoriales.
3. Existe un epimorfismo (morfismo suprayectivo) de fibrados  $f^* TN \rightarrow \mathcal{N}_{M/N}$  sobre  $M$  que se restringe a una aplicación suprayectiva  $f^* T_{f(p)} N \rightarrow (\mathcal{N}_{M/N})_p$ , para cada  $p \in M$ .
4. La sucesión exacta de espacios vectoriales mostrada en (1), es la fibra de una sucesión exacta

$$0 \rightarrow TM \rightarrow f^* TN \rightarrow \mathcal{N}_{M/N} \rightarrow 0$$

de fibrados vectoriales sobre  $M$ .

5.  $\text{rango}(TM) = m := \dim(M)$ ,  $\text{rango} f^*(TN) = n := \dim(N)$  y  $\text{rango}(\mathcal{N}_{M/N}) = n - m$ .

*Ejercicio.*- Demuestra las afirmaciones precedentes.

Si  $M$  es una subvariedad de  $N = \mathbb{R}^n$ , entonces el fibrado normal  $\mathcal{N}_{N/M}$  es una  $C^r$ -variedad de dimensión  $m + (n - m) = n$ .

*Ejercicio.*- Describe la  $C^r$ -estructura del fibrado normal en términos de la  $C^r$ -estructura de  $N$  como  $C^r$ -variedad

### 3.2.3. Ejemplo básico: El Fibrado Normal de una Esfera

Sea  $\mathbb{S}^n$  la esfera de radio unidad en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces, su fibrado normal  $\mathcal{N}_{\mathbb{S}^n/\mathbb{R}^{n+1}}$  es isomorfo al fibrado trivial  $\varepsilon^1$  de rango 1 sobre  $\mathbb{S}^n$ . Este isomorfismo está dado por la aplicación

$$\mathcal{N}_{\mathbb{S}^n/\mathbb{R}^{n+1}} \rightarrow \varepsilon_{\mathbb{S}^n}^1 := \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \mid (x, \lambda x) \mapsto (x, \lambda) .$$

*Proposición.*  $\hat{A}$  - Existe un isomorfismo de fibrados vectoriales sobre  $\mathbb{S}^n$  dado por

$$T\mathbb{S}^n \oplus \varepsilon^1 \simeq \varepsilon^{n+1} = T\mathbb{R}^{n+1} .$$

*Demostración:* Para comprobarlo, basta tomar el homomorfismo de fibrados dado por

$$\phi : T\mathbb{S}^n \oplus \varepsilon^1 \rightarrow \varepsilon^{n+1} \quad | \quad ((x, v), (x, w)) \mapsto (x, v + w)$$

y verificar que la asignación dada por  $\psi(x, v) := ((x, \pi_x(v)), (x, \nu_x(v)))$ , define una *inversa de  $\phi$* , donde  $\pi_x(v)$  (respectivamente,  $\nu_x(v)$ ) denota la proyección de  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$  sobre el espacio tangente (respectivamente, normal) a  $\mathbb{S}^n$  en  $x \in \mathbb{S}^n$ .

### 3.2.4. Entornos tubulares

Una curva alabeada  $\mathcal{C}$  en el espacio tridimensional tiene un plano  $\mathbb{R}^2$  como fibrado normal en cada punto. La supresión del origen correspondiente al punto base  $p \in \mathcal{C}$  de la curva  $\mathcal{C}$  permite realizar una retracción de  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  sobre una circunferencia  $\mathbb{S}^1(r_p)$  con radio variable  $r_p$  centrada en  $p \in \mathcal{C}$ .

El radio se puede ajustar para la que las circunferencias contenidas en los planos normales no se intersequen. A la unión de todas estas circunferencias se le llama un *entorno tubular* de la curva  $\mathcal{C}$  que se representa mediante un cilindro de entorno variables cuyo “nervio” es la curva alabeada  $\mathcal{C}$ . Esta construcción se puede visualizar como una fibración de circunferencias sobre la curva alabeada  $\mathcal{C}$ .

Con más generalidad, se tiene la noción siguiente:

*Definición.*- Un entorno tubular de una variedad es una retracción del fibrado normal.

La noción de entorno tubular permite desarrollar el cálculo diferencial sobre los fibrados de esferas que se han presentado más arriba. Este desarrollo tiene interés para multitud de *aplicaciones* relacionadas con aspectos físicos, geométricos, mecánicos, económicos y gráficos, entre otros:

- *Envolventes de normales* cuyo estudio está motivado inicialmente por el análisis de las cáusticas en la Óptica Geométrica del s.XVIII (Newton, Huygens, Barrow, etc) pero que se extiende a cualquier tipo de fenómeno ondulatorio (D’Alembert, Legendre, Maxwell) incluyendo fenómenos de tipo explosivo asociados a ondas de choque (Riemann-Hugoniot, p.e.) a lo largo del s.XIX.
- *Deformaciones* de variedades en baja dimensión (curvas o superficies, típicamente) dadas localmente por campos en el espacio normal en cada punto. Estas deformaciones presentan singularidades con una estratificación muy interesante cuyo clasificación se está llevando a cabo desde diferentes puntos de vista a partir de mediados del s.XX.

- *Comportamientos elásticos o inelásticos* para objetos sólidos eventualmente deformables, incluyendo fenómenos de propagación en medios anisótropos y la detección de fracturas de utilidad en Análisis de Materiales y en la Mecánica de Medios Continuos.
- *Optimización y control* para trayectorias óptimas con objeto de determinar regiones de estabilidad para los Sistemas Dinámicos que aparecen en diferentes áreas de la Teoría Económica.
- *Gráficos* en relación con la asistencia a la producción de contenidos visuales vinculados a personajes ó avatares procedentes de un procesamiento y análisis de imágenes o de nubes cambiantes de puntos tridimensionales.

La mayor parte de estas aplicaciones se abordan en módulos específicos de los Cursos de Geometría Algebraica, Teoría Económica, Robótica o Informática Gráfica impartidos desde mediados de los noventa. Desde un punto de vista geométrico, estamos interesados en desarrollar modelos tan universales como sea posible que permitan “controlar” la diversidad de fenómenos que puedan aparecer en relación con las aplicaciones mencionadas.

La idea intuitiva es muy simple: Para un modelo paramétrico representamos mediante  $L$  a un subespacio  $k$ -dimensional las  $k$  direcciones l.i. no correlacionadas entre sí (al menos desde el punto de vista lineal) asociadas al control del modelo que parametriza los estados del sistema. Etiquetamos como  $Q$  el subespacio “complementario”  $V/L$  en un espacio vectorial ambiente  $n$ -dimensional ambiente  $V$ . En estos términos, el subespacio  $L$  representa un punto de  $Grass(k, n)$ , mientras  $Q$  representa un punto de  $Grass(n - k, n)$  asociado al subespacio complementario cuya dinámica está contenida en el fibrado normal.

El modelo lineal para la dinámica intrínseca se modela en términos de los campos vectoriales definidos sobre  $Grass(k, n)$ , mientras que la dinámica sobre el subespacio normal se modela en términos de campos vectoriales sobre  $Grass(n - k, n)$ . El isomorfismo entre  $Grass(k, n)$  y  $Grass(n - k, n)$  facilita el intercambio de información entre las dinámicas intrínseca y extrínseca. En la subsección siguiente se presentan el formalismo básico para algunas de estas cuestiones.

### 3.3. Fibrados tautológicos y sucesión exacta universal

Aunque sea redundante respecto a la exposición mostrada en el primer capítulo de este módulo 2, se presenta de nuevo una descripción del fibrado lineal tautológico ó universal sobre el espacio proyectivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  insistiendo ahora en aspectos relacionados tanto con el fibrado normal como con el paso al cociente modulo  $\mathbb{Z}_2$  de una estructura; este punto de vista puede ser considerado como una primera aproximación algebraica al punto de vista de los fibrados principales, tópico que será desarrollado en el módulo §6 con algunas aplicaciones a Física Teórica en el módulo §7. Por ello, los primeros apartados de esta sección se pueden considerar como un ejercicio de recapitulación.

### 3.3.1. El Fibrado Lineal Tautológico

A partir de la descripción de los fibrados tangente y normal a la esfera  $\mathbb{S}^n$ , se obtiene la descripción de los fibrados tangente y normal correspondientes al espacio proyectivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ , elevando la  $\mathbf{Z}_2$ -acción a cada fibrado y pasando al cociente en cada uno de los fibrados. Para detallar esta construcción, empezaremos recordando la descripción del fibrado lineal tautológico  $\gamma_1^n$  sobre el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$ .

*Proposición.*- El fibrado  $\gamma_1^n$  no tiene ninguna sección siempre no nula (a diferencia del fibrado tangente sobre la esfera del cual procede).

Esta afirmación ha sido demostrada al final del §2,1. No obstante, podemos comprobar de forma sintética esta afirmación a partir del diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} E(\varepsilon_{\mathbb{S}^n}^1) & \rightarrow & E(\gamma_1^n) & & (x, s(x)x) & \mapsto & (\{\pm x\}, s(x)x) \\ \uparrow s & & \uparrow s & & \uparrow s & & \uparrow s \\ \mathbb{S}^n & \rightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n = \mathbb{S}^n/\mathbf{Z}_2 & \text{ dado por} & x & \mapsto & \{\pm x\} \end{array}$$

Si denotamos mediante  $\psi : \mathbb{S}^n \rightarrow E(\gamma_1^n)$  a la composición del paso al cociente modulo  $\mathbf{Z}_2$  con la sección  $s$ , vemos que

$$\psi(x) = \psi(-x) \Rightarrow (\{\pm x\}, s(x)x) = (\{\pm x\}, s(-x)(-x)) \Rightarrow s(-x) = -s(x)$$

Como  $\mathbb{S}^n$  es *conexo*, en virtud del Teorema del Valor Medio, existe un punto  $x_0 \in [-x, x]$  tal que  $s(x_0) = 0$ . Este resultado se puede visualizar fácilmente para  $n = 1$ , donde la representación de  $\psi(x) = (\{\pm x\}, v)$  mediante coordenadas polares:

$$\psi(\cos\theta, \sin\theta) = (\{\pm(\cos\theta, \sin\theta)\}, t(\cos\theta, \sin\theta)) ,$$

es única en  $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ , salvo para  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , donde estamos identificando puntos diametralmente opuestos. El modelo topológico así obtenido es la *banda de Moebius infinita*. Con más detalle, tenemos la siguiente descripción conjuntista para el espacio total  $E(\gamma_1^1)$  del fibrado lineal tautológico:

$$\{(\{\pm x\}, v) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}^2 \mid v = \lambda x\} = \{(\{\pm(\cos\theta, \sin\theta)\}, t(\cos\theta, \sin\theta)) \mid \theta \in [0, \pi], t \in \mathbb{R}\} ,$$

donde en el plano  $(\theta, t)$ -plano, estamos identificando  $\{0\} \times \mathbb{R}$  con  $\{\pi\} \times \mathbb{R}$  mediante la asignación  $(0, t) \mapsto (\pi, -t)$ .

Globalmente, podemos expresar el siguiente isomorfismo de fibrados sobre  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ :

$$(\varepsilon_{\mathbb{S}^n}^1)/\mathbf{Z}_2 \simeq \gamma_n^1 \mid (x, v), (-x, -v) \mapsto ((x, -x), xv)$$

Nótese que incluso en el caso 1-dimensional, esta asignación es diferente de la correspondiente al fibrado trivial sobre  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ , cuyo espacio total estaría dado por el conjunto de pares de la forma  $((x, -x), t)$ , donde  $t \in \mathbb{R}$ .

### 3.3.2. El Fibrado Tangente del Espacio Proyectivo

Recordemos que  $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ . La elevación de la  $\mathbb{Z}_2$ -acción al fibrado tangente de  $\mathbb{S}^n$  y las propiedades de  $\tau\mathbb{S}^n$  permiten calcular el fibrado tangente  $\tau\mathbb{R}P^n$ :

- sobre el fibrado trivial  $\varepsilon_{\mathbb{S}^n}^{n+1}$  actúa  $\mathbf{Z}_2$  de la forma obvia, mediante la asignación  $(x, v) \mapsto (-x, -v)$ .
- En virtud del isomorfismo anterior  $\varepsilon_{\mathbb{S}^n}^1/\mathbb{Z}_2 \simeq \gamma_n^1$ , se tiene un isomorfismo

$$\varepsilon_{\mathbb{S}^n}^{n+1}/\mathbb{Z}_2 \simeq (n+1)\gamma_n^1$$

de fibrados sobre  $\mathbb{R}P^n$ .

- Por otro lado,

$$\tau\mathbb{S}^n \oplus \mathcal{N}_{\mathbb{S}^n/\mathbb{R}^{n+1}} \simeq \varepsilon_{\mathbb{S}^n}^{n+1}.$$

- Pasando al cociente modulo  $\mathbf{Z}_2$ , como el fibrado normal al espacio proyectivo está dado por  $\mathcal{N} := \mathcal{N}_{\mathbb{S}^n/\mathbb{R}^{n+1}}/\mathbb{Z}_2 \simeq \varepsilon_{\mathbb{P}^n}^1$ , obtenemos

$$(\tau\mathbb{S}^n \oplus \mathcal{N}_{\mathbb{S}^n})/\mathbb{Z}_2 \simeq \varepsilon_{\mathbb{S}^n}^{n+1}/\mathbb{Z}_2 \Rightarrow (\tau T\mathbb{S}^n)/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathcal{N}_{\mathbb{S}^n}/\mathbb{Z}_2 \simeq \tau(\mathbb{R}P^n) \oplus \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1 \simeq (n+1)\gamma_n^1,$$

que es el análogo para  $\mathbb{R}P^n$  del resultado mostrado más arriba para la esfera  $\mathbb{S}^n$ .

Este resultado es de gran utilidad en Topología, pues permite detectar si existe obstrucción a que el espacio proyectivo se pueda “sumergir” en otras variedades ó no <sup>11</sup>. No obstante, no usaremos este tipo de resultados en este Curso).

### 3.3.3. El Fibrado Tangente de la Grassmanniana

La aplicación  $\phi$  que da la estructura local de  $Grass(k+1, n+1)$  como variedad topológica, permite describir el espacio tangente  $T_{L_W}Grass(k+1, n+1)$  a la grassmanniana en  $L_W$ , como  $Hom_k(W, W^\perp)$ , donde  $W^\perp$  denota el complementario de  $W$  en  $V$ . Para describir globalmente el fibrado tangente de  $Grass(k+1, n+1)$ , necesitamos introducir la *sucesión tautológica ó universal* de fibrados vectoriales sobre la Grassmanniana:

Sea  $\varepsilon^{n+1}$  el fibrado vectorial trivial de rango  $n+1$  dado por  $Grass(k+1, n+1) \times V$ . Denotemos mediante  $S_{k+1}$  al fibrado universal ó tautológico cuya fibra en cada punto  $L_W$  está dada por el subespacio  $(k+1)$ -dimensional  $W$  de  $V$ . Por último, denotemos por  $Q^{n-k}$  al fibrado cociente, cuya fibra en cada punto  $L_W$  está dada por el cociente  $(n-k)$ -dimensional  $V/W$ . Entonces, se tiene una sucesión exacta de fibrados vectoriales:

$$0 \longrightarrow S^{k+1} \longrightarrow \varepsilon^{n+1} \longrightarrow Q^{n-k} \longrightarrow 0$$

<sup>11</sup> Para detalles ver Milnor y Stasheff: *Characteristic Classes*, Princeton Univ. Press, 1974

sobre  $Grass(k+1, n+1)$  a la que se llama *sucesión tautológica ó universal*. Con esta notación, comprobar el siguiente isomorfismo de fibrados:

$$\tau Grass(k+1, n+1) = HOM_{\varepsilon^{n+1}}(S^{k+1}, Q^{n-k}).$$

*Ejercicio.-* Describe esta sucesión sobre el espacio proyectivo  $\mathbb{R}P^n$  y comprueba que el fibrado universal  $S^1$  de rango 1 sobre el espacio proyectivo  $\mathbb{R}P^n$  es precisamente el fibrado lineal tautológico  $\gamma_n^1$ , por lo que no es isomorfo al trivial. La descripción que acabamos de dar para el fibrado tangente de una Grassmanniana, muestra que en particular, cuando  $k=0$  tenemos que

$$\tau \mathbb{R}P^n \simeq HOM_{\varepsilon^{n+1}}(S^1, Q^n) \simeq HOM_{\varepsilon^{n+1}}(\gamma_n^1, (\gamma_n^1)^\perp).$$

### 3.3.4. Práctica: EDO sobre Grassmannianas

Más arriba se han comentado algunas aplicaciones básicas de las grassmannianas  $Grass(m, N)$ . La importancia de estas variedades y su presencia ubicua en un gran número de áreas de las Matemáticas y sus aplicaciones responde a la existencia de una aplicación universal  $g : M \rightarrow Grass(m, N)$  (llamada de Gauss) para cualquier variedad compacta  $m$ -dimensional  $M$  que a cada punto  $p \in M$  le asocia su espacio tangente  $T_p M$  que ahora consideramos como un subespacio  $m$ -dimensional  $L_p^m$  en un espacio  $N$ -dimensional  $\mathbb{R}^N$  siendo  $N$  la dimensión de inmersión de  $M$  (Teorema de Severi-Whitney). Además, el fibrado tangente  $\tau_M$  es isomorfo a la imagen recíproca del fibrado tautológico universal  $S$  definido sobre  $Grass(m, N)$ .

Por ello, para resolver cualquier sistema de EDO sobre  $M$  se puede reinterpretar como un sistema de EDO definido sobre  $g^*S$  y, por consiguiente, sobre el fibrado tautológico  $S$  sobre  $Grass(m, N)$ . Esto justifica el interés de resolver EDO sobre  $Grass(m, N)$ . Para abordar este problema es necesario interpretar  $Grass(m, N)$  como una subvariedad en espacios de  $(m \times N)$ -matrices con restricciones. Las ecuaciones de Ricatti proporcionan un modelo “suficientemente general” de EDO sobre espacios de matrices que se puede restringir a  $Grass(m, N)$ .

El contenido de la práctica (orientado a estudiantes procedentes de la especialidad de Análisis) consiste en adaptar los métodos de resolución de ecuaciones tipo Ricatti a Grassmannianas, analizando en particular, los problemas de control y de estabilidad para dichas soluciones.

## 3.4. Operaciones con Fibrados Principales

En esta subsección se presentan algunas operaciones con fibrados principales que presentan analogías formales con algunas de las operaciones descritas para fibrados vectoriales. Debe tenerse siempre presente que un fibrado principal no tiene por qué proceder de un fibrado vectorial, por lo que los argumentos deben

ser mostrados de forma independiente (ver la última subsección de la sección 2 para más detalles sobre esta cuestión).

Tras repasar las operaciones algebraicas fundamentales se muestran algunas aplicaciones a la Física Teórica que proporcionan las motivaciones más importantes para el desarrollo de esta teoría en el marco del modelo estándar que unifica las interacciones electromagnética, débil y fuerte. Una apuesta geométrica actual consiste en que una cuantización apropiada de la interacción gravitatoria proporciona se puede desarrollar en el marco de una extensión de la noción de fibrado principal; esta idea sólo se esboza aquí y se plantea como una sugerencia a explorar; para más detalles ver el módulo 7.

#### 3.4.1. Producto tensorial de fibrados principales

*Ejercicio.*- Completar detalles

#### 3.4.2. Imagen recíproca de un fibrado principal

*Ejercicio.*- Completar detalles

#### 3.4.3. Representación de grupos y fibrados principales

*Ejercicio.*- Completar detalles

#### 3.4.4. Algunas aplicaciones básicas a Física Teórica

En la *Mecánica Newtoniana* las variables básicas (posición y velocidad) son relativas, es decir, están referenciadas a la localización (posición y orientación) del observador con respecto al observable. Por ello, las transformaciones del grupo de Galileo permiten relacionar dichos datos, pero de forma no intrínseca. Este principio se extiende de forma natural a la *Relatividad Especial* propuesta por Einstein para hacer compatible la Mecánica Clásica Newtoniana con la Electrodinámica de Maxwell dentro de un modelo geométrico del espacio-tiempo.

Por el contrario, en Relatividad General los observables están referidos a un modelo  $M$  del espacio-tiempo y son independientes de la elección de coordenadas sobre  $TM$  (o su dual). Esta descripción es válida tanto para la formulación clásica como para la asociada en Mecánica Analítica al marco proporcionado por la Geometría Simpléctica.

Sin embargo, esta descripción es “artificial” pues la medida evaluada no se puede separar el proceso de medida (esto es aún más patente en el caso de la Mecánica Cuántica). Los fibrados principales permiten resolver este problema introduciendo el fibrado de referencias como el espacio en el que toman valores los observables (que son de hecho secciones de un fibrado principal en la terminología geométrica).

Estas referencias generalizadas fueron etiquetadas como *gauge* (H.Weyl) y las transformaciones entre ellas como *transformaciones gauge* que no son otra cosa sino automorfismos de la fibra en cada punto. Esta idea se extiende de forma natural a la Física de Partículas en la que dichas transformaciones se pueden interpretar en términos de los grados de simetrías de una partícula en el marco cuántico (ver módulo 7 para más detalles).

En el contexto de los Fibrados Principales, las ecuaciones del movimiento son  $G$ -invariantes de forma automática. Por ello, proporcionan el “lenguaje natural” para la Física, incluyendo la Mecánica Clásica. En efecto, en ausencia de fuerzas, la segunda Ley de Newton muestra que el movimiento de una partícula sigue una línea recta (una geodésica, en general). Esta formulación es compatible con las propiedades proyectivas del modelo que conservan las propiedades de incidencia y de tangencia.

Sin embargo, en presencia de fuerzas gravitacionales, partículas con diferentes velocidades pueden presentar comportamientos completamente diferentes. En la moderna Geometría Diferencial este diferente comportamiento se describe en términos de una conexión superpuesta al espacio-tiempo que determina diferentes comportamientos, incluso aunque las trayectorias puedan ser tangentes en el espacio-tiempo. La primera formulación de esta idea se debe a Einstein quien, al añadir una cuarta dimensión al espacio ordinario, incorpora diferentes efectos gravitacionales para partículas que pueden ser tangentes en un punto de sus trayectorias.

La primera extensión de esta idea al Electromagnetismo fue obra de Kaluza (1921) y Klein (1926), pero implica un mejor conocimiento para la acción del grupo  $U(1)$ , por lo que de momento se pospone su discusión. No obstante, en la primera subsección de la sección siguiente se revisa el punto de vista de Einstein utilizando una terminología clásica vinculada a las transformaciones activas y pasivas de coordenadas.

## 4. Prácticas: Campos y transformaciones

En subsecciones anteriores se han presentados diferentes tipos de campos etiquetados como escalares, vectoriales y tensoriales. Los cambios de coordenadas afectan a la expresión local de cada uno de ellos, pero de una forma ideal la dinámica debería seguir siendo la misma, pues los campos presentan una naturaleza geométrica, es decir, independiente del sistema de coordenadas. En la práctica, vemos que no es así, por lo que hay dos opciones: o bien el sistema es geométrico y no está bien formulado (situación frecuente en Física) o bien el sistema no tiene una naturaleza geométrica tan simple y debe ser reformulado en términos de “acciones” (representables como distribuciones de campos, sistemas de formas, operadores integrales), en lugar de utilizar una representación para un soporte rígido (situación común en áreas de Ingeniería ó de Teoría Económica).

Para abordar estos problemas, se introduce la Teoría de Fibrados que proporciona un esquema conceptual con un mayor grado de generalidad. En este caso, las transformaciones de coordenadas que afectan a los diferentes tipos de campos pueden afectar a la descripción de la dinámica del sistema, tal y como se pone de manifiesto en aspectos básicos de “ejemplos” tan conocidos como los de Relatividad General en Física Teórica. Salvo la primera subsección, el resto de los contenidos de esta sección tiene un carácter más próximo a la investigación que a una aplicación inmediata de la Teoría presentada en la asignatura. Por ello, aunque esté calificada como “práctica” debe entenderse como una posible propuesta a desarrollar como TFG o incluso como TFM tras realizar la especialización correspondiente.

La comparación entre modelos conduce de forma natural a trabajar con una generalización de la noción de transformación (no necesariamente un isomorfismo) entre fibrados vectoriales. Según la versión presentada más arriba, la noción de isomorfismo entre dos fibrados vectoriales se refiere a dos fibrados vectoriales definidos sobre el mismo espacio base. Para ampliar esta noción se introduce el producto fibrado, donde esencialmente se “traslada” una estructura conocida a un soporte eventualmente distinto.

Un caso particularmente interesante se presenta cuando la aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es una  $C^r$ -equivalencia. Por ello, cuando  $X$  e  $Y$  son variedades diferenciales, se tienen dos tipos de cambios de coordenadas correspondientes a cambios en la referencia que aparece en la fibra y cambios procedentes del grupo de difeomorfismos que actúa sobre la base. Los primeros están inducidos por los cambios de carta del espacio base y se representan mediante las funciones de transición que toman valores en el grupo estructural  $G$  del fibrado de referencias. Los segundos por el contrario, aunque no modifican la estructura de la variedad (pues son difeomorfismos) dan lugar a “cambios” en la descripción local de la geometría (asociadas a diferentes observadores o diferentes sistemas de medida, p.e.), en el espacio de estados o en el de observables.

Las otras prácticas presentadas en esta sección están relacionadas con tópicos esbozados en capítulos anteriores y que se desarrollan con más detalle en los

Cursos correspondientes a Robótica, Visión Computacional y Teoría Económica. El propósito fundamental de estas prácticas no es sólo ilustrar la utilidad del enfoque basado en fibrados para cada una de estas áreas, sino en plantear interrogantes que ayuden a formalizar algunas aproximaciones frecuentemente dispersas y poco estructuradas en cada uno de los tópicos mencionados. Por ello, están planteados como una invitación a la profundización en estos conceptos, más que como una teoría que aún está pendiente de re-elaboración.

### 4.1. Práctica 1: Coordenadas en Relatividad General

Los cambios de carta en el espacio base o en el espacio total de un fibrado se pueden interpretar en relación con problemas de pegado o bien en términos de la superposición de diferentes dinámicas sobre un mismo espacio ambiente correspondiente a diferentes áreas de conocimiento; en esta sección la atención se centra en algunos aspectos de Física, Robótica, Sistemas Expertos y Teoría Económica. Los últimos tienen un carácter más experimental y tentativo que los primeros.

Estos diferentes tipos de situaciones han sido considerados tradicionalmente en diferentes modelos del espacio-tiempo. En Física Teórica existen “ecuaciones pasivas” para las que es deseable un enfoque unificado. Ejemplos de esta situación están dados por

- el movimiento de una partícula con masa en presencia de un campo gravitacional dado, donde se supone que no hay influencia de la partícula sobre la métrica del espacio ambiente, ó
- el movimiento de una partícula dada en presencia de un campo electromagnético, donde ignoramos asimismo la influencia del propio campo de la partícula.

De una manera un tanto vaga, podríamos decir que tratamos de *interpretar la dinámica de un sistema* para un *observador no inercial*, prescindiendo de las alteraciones que el campo origina sobre las trayectorias previstas.

En esta subsección se abordan las transformaciones globales de coordenadas en Física utilizando una adaptación del lenguaje utilizado a finales del s.XIX. Con ello, se pretende facilitar una primera aproximación a este tópico que se desarrolla en el módulo 6 (modelos matemáticos en el marco de la Geometría Pseudo-riemanniana) y en el capítulo 2 del módulo 7 (aspectos geométricos de Relatividad General).

Sobre  $\mathbb{R}^4$  consideramos la métrica de Lorentz  $ds^2$  dada por  $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ . Al par dado por  $(\mathbb{R}^4, ds^2)$  se le llama el *espacio de Minkowski plano*. Podemos considerar referencias ortonormales respecto a esta métrica. Llamamos *grupo de Lorentz* al subgrupo de elementos de  $GL(4; \mathbb{R})$  que dejan invariante  $ds^2$ .

Denotaremos mediante  $(M, ds^2)$  a modelos más generales del espacio-tiempo, donde  $M$  es una 4-variedad eventualmente curvada (con una curvatura variable) y  $ds^2$  es una métrica (que puede ser modificada por la acción de algún campo asociado a la dinámica).

#### 4.1.1. Transformaciones pasivas de coordenadas

Llamamos *transformaciones pasivas de coordenadas* (en adelante, TPC) a una transformación que deja invariante el “estado físico” de un sistema en el espacio de las fases  $T^*M$ . Dicho de una manera más dinámica: las trayectorias asociadas al movimiento permanecen inalteradas por la transformación.

De una manera más formal, las TPC están dadas por un grupo de transformaciones en el espacio total  $E$  del fibrado que conmutan con la acción natural que se tiene definida sobre la fibra. Por ello, descomponen en una transformación sobre el espacio base  $M$  (dada por un difeomorfismo local de  $M$ ) que deja invariante la referencia y otra transformación sobre la fibra que deja invariante el punto base  $x \in M$ . Esta “descomposición” no es necesariamente un producto directo de acciones (su estructura algebraica se mostrará al final del §2.5).

El punto clave consiste en que sólo consideramos aquéllas transformaciones del espacio total que están inducidas por difeomorfismos en el espacio base  $M$ . Es esencial que en este proceso el vector que estamos considerando sobre la fibra sea el mismo, aunque expresado respecto a dos sistemas de referencia distintos.

Por ello, el efecto que una TPC produce sobre la fibra se puede representar mediante un cambio de referencia en el espacio tangente que viene dado por un elemento del grupo estructural. En el caso de los modelos usuales sobre el espacio-tiempo de Minkowski  $(M^4, ds^2)$  (donde  $ds^2$  es la métrica de Lorentz) dicho cambio está dado por un elemento del grupo de Lorentz.

De una forma más explícita, si  $e_i = \partial/\partial x^i$  para  $i = 0, 1, 2, 3$ , representa una base de  $T_pM$ , entonces una TPC transforma esta referencia en otra dada por  $e_j = \partial/\partial y^j$  para  $j = 0, 1, 2, 3$ . Por ello, si sólo atendemos al comportamiento en la fibra, dicha transformación está dada por

$$x^i = \sum_{j=0}^3 y^j e_j \quad \text{donde} \quad e_j = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial x^i}{\partial y^j} e_i$$

Las TPC representan una idealización de la dinámica, pues *el grupo de los difeomorfismos del espacio base  $M$  actúa sobre el espacio de las métricas*, dando lugar a alteraciones observables en las trayectorias previstas si sólo consideráramos las TPC (en el §6, veremos que estas trayectorias son geodésicas respecto a la métrica que estemos considerando en nuestro modelo de espacio-tiempo). Por ello, es necesario considerar otro tipo de transformaciones, a las que llamaremos “activas”. En el apartado siguiente se precisa esta idea.

### 4.1.2. Transformaciones activas de coordenadas

Llamamos *transformaciones activas de coordenadas* (en adelante, TAC) a una transformación en la fibra  $f : \xi_p \rightarrow \xi_p$  sobre  $p \in M$  que procede de un difeomorfismo en el espacio base  $M$ . De una forma intuitiva, podemos interpretar este difeomorfismo mediante un desplazamiento infinitesimal, que representamos mediante  $x \mapsto x' = x + \delta x$ .

## 4.2. Práctica 2: Fibrados en Robótica

En capítulos anteriores se ha mostrado que

- el espacio de configuraciones  $\mathcal{C}$  es una subvariedad de un producto de grupos de Lie (asociados a los diferentes tipos de juntas) dados por juntas planares ó esféricas (con  $SO(2; \mathbb{R})$  y  $SO(3; \mathbb{R})$  como grupos estructurales) o prismáticas (con las traslaciones  $\mathbb{R}^3$  como grupo estructural);
- el espacio de trabajo  $\mathcal{C}$  para el efector final  $\mathbf{e}_i$  de cada cadena cinemática  $K_i$  es una subvariedad del grupo de rotaciones  $SO(3; \mathbb{R})$  ó con más generalidad el grupo euclídeo  $SO(3; \mathbb{R})$  definido como el producto semidirecto de  $SO(3; \mathbb{R})$  y del grupo de traslaciones  $\mathbb{R}^3$

Ambas descripciones motivan la introducción de fibrados principales para describir la cinemática y la dinámica de un robot, algo que ya aparece en [Mon92]<sup>12</sup>. En particular, los procesos de optimización y control asociados a la realización de movimientos se describen como funcionales definidos sobre un producto de grupos de Lie.

Por otro lado, los movimientos de cualquier multicuerpo (colección finita de cadenas cinemáticas conectadas con un cuerpo central, eventualmente articulado) deben sus características cinemáticas y dinámicas tanto al movimiento propio como al cambio de forma de los mecanismos articulados. En particular, la equivalencia ideal (en el contexto de la Geometría Simpléctica que se presenta más adelante) entre las formulaciones diferencial (Hamilton-Lagrange) e integral (Newton-Euler) se traduce en cálculo diferencial e integral sobre los fibrados asociados.

En los organismos vivos, la contracción de componentes da lugar a un esfuerzo que se libera en términos de fuerzas o momentos que generan un trabajo escalar  $\mathbf{F} \Delta \mathbf{dr}$  ó vectorial  $\mathbf{M} \wedge d\theta$  que se convierte en energía (formulación escalar o vectorial) con sus correspondientes componentes disipativas. Por ello, se tienen “cantidades vectoriales” que se contraen a “cantidades escalares”, proceso que tiene sentido dentro del correspondiente álgebra de Clifford.

La unificación de los aspectos mencionados se lleva a cabo en el marco de Fibrados Principales en los que la cinemática o la dinámica de tareas complejas

<sup>12</sup> [Mon92] R.Montgomery: “Nonholonomic Control and Gauge Theory”

(como las asociadas a la locomoción o a operaciones de agarre y manipulación, p.e.) se llevan a cabo en términos de datos (conexiones y curvatura de la conexión, respectivamente) construidos sobre un fibrado principal. Estos tópicos son más avanzados; los aspectos matemáticos se presentan con más detalle en el módulo 6 de GeoDif, mientras que los aspectos más cercanos a la Robótica se presentan en los módulos 5 y 6 del Curso sobre Robótica. Por ello, aquí nos limitamos a presentar algunos aspectos básicos relacionados con los párrafos precedentes de esta introducción.

#### 4.2.1. Movimientos periódicos

El comportamiento de péndulos básicos (lineales o no) se traduce en movimientos periódicos que se pueden reutilizar para generar desplazamientos que extienden la cinemática del modelo básico de la rueda. Este principio básico conocido en mecanismos articulados desde el Renacimiento, tiene su traducción a norias, máquinas de vapor y mecanismos de transmisión que se desarrollan desde el s.XVII hasta el XX. Esta “transducción” tiene su análogo en mecanismos robóticos que aprovechan los cambios de forma para generar movimientos planares o espaciales.

Desde un punto de vista matemático, la clave teórica para generar movimientos radica en la conservación del momento angular en el espacio de las fases (una circunferencia para movimientos periódicos) que representa la cinemática de movimientos pendulares sencillos. En el caso 3-dimensional, los elementos de  $SE(3; \mathbb{R})$  están representados por matrices

#### 4.2.2. Restricciones

Existen diferentes tipos de restricciones que afectan a los mecanismos (transformaciones permisibles sin autoseccionarse o evitando autocolisiones), el espacio ambiente (restricciones físicas relativas al ambiente en el que el robot realiza diferentes movimientos) o tareas (restricciones cinemáticas o dinámicas relativas a la realización, incluyendo efectos gravitatorios, inerciales o reactivos con respecto a la interacción).

Cada tipo de restricción da lugar a funcionales, distribuciones de campos vectoriales o su evaluación en términos de sistemas de formas diferenciales. Esta diversidad de fenómenos se representa mediante subfibrados no-triviales del fibrado principal en términos de restricciones (algebraicas, de integrabilidad) relativas a los funcionales o los sistemas diferenciales (campos, formas) asociados a la dinámica.

El propósito de este apartado es desarrollar un marco común para el tratamiento de todas estas restricciones. Para ello, a la vista de la existencia de simetrías locales para mecanismos y tareas, introducimos una estratificación equivariante sobre la aplicación de transmisión  $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{W}$  y sus  $k$ -extensiones (jets) de orden  $k \leq 2$  que relacionan las propiedades geométricas, cinemáticas y

dinámicas de un robot.

La noción de estratificación equivariante es la extensión natural del fibrado principal inicial asociado a la arquitectura y las funcionalidades de un robot, tanto desde el punto de vista del espacio de configuraciones  $\mathcal{C}$  como del espacio de trabajo  $\mathcal{W}$ .

### 4.2.3. Una versión equivariante de Optimización Geométrica

Salvo algunos casos triviales, casi todos los robots son hiperredundantes, es decir, el número de grados de libertad es superior a la dimensión del espacio. Ello implica que cualquier tarea se puede realizar de diferentes formas, por lo que es necesario llevar a cabo procesos de optimización de acuerdo con diferentes tipos de restricciones (geométricas, cinemáticas o dinámicas).

La introducción de restricciones afecta a los problemas de optimización a resolver y, por consiguiente, al control de los dispositivos. El acoplamiento entre diferentes componentes y la secuenciación de movimientos sugieren un tratamiento del problema en términos espacio-temporales que se representa localmente en términos matriciales asociados a un producto de grupos de Lie para cada una de las cadenas cinemáticas de las que está compuesto un robot.

En este apartado se introducen la cinemática en términos de las matrices jacobianas que representan los cambios de estado en torno a configuraciones estables para cada una de las cadenas cinemáticas y para el robot considerado como un todo. La interpretación de las matrices jacobianas como funciones de transición de un fibrado principal, facilita un tratamiento más compacto de las cinemáticas inversa y directa, así como una representación más natural para resolver los problemas de optimización ligados a las diferentes maneras de realizar una tarea.

### 4.2.4. Control geométrico en presencia de singularidades

El alineamiento entre componentes o la “deficiencia” en el rango de la matriz jacobiana asociada a la Cinemática Directa dan lugar a ejemplos de singularidades geométricas ó cinemáticas que es necesario identificar para que pueden ser evitadas o, por el contrario, para pasar a través de ellas aprovechando el intercambio de energía entre componentes o bien con el entorno en el que opera el robot.

Ello plantea la necesidad de llevar a cabo diferentes procesos de control asociados no sólo a los diferentes tipos de optimización comentados en el apartado anterior, sino también al comportamiento en torno a las singularidades. El objetivo del control no es sólo alcanzar los puntos finales para cada una de las subtareas (que actúan como atractores u organizadores de la dinámica), sino mantener una estabilidad dinámica a lo largo de las trayectorias descritas por cada uno de los puntos de control en la realización de movimientos.

El propósito de este apartado es desarrollar herramientas para un control más eficiente en presencia de singularidades utilizando herramientas procedentes de la estratificación equivariante descritas en el apartado anterior.

### 4.3. Práctica 3: Fibrados para Reconocimiento

En esta subsección se considera que una imagen es un mapa de bits (bitmap), es decir, una aplicación definida sobre un rectángulo cuyos puntos son píxeles. Para una imagen de 8 bits en escala de grises, la aplicación toma valores en  $2^8$  que se representan como los puntos de coordenadas enteras en el intervalo  $[0, 255]$ . Para una imagen de 8 bits en color, la representación RGB toma valores en el producto de tres intervalos correspondiente a los tres canales de color. Salvo casos triviales, la distribución de la intensidad es habitualmente muy irregular y es necesario realizar procesos de suavizado sobre la imagen.

El análisis de la información contenida en imágenes o vídeos digitales se puede llevar a cabo mediante una estrategia basada en “hechos” (enfoque *bottom-up*) o bien basada en “modelos” (enfoque *top-down*). En cualquier caso, el análisis de imágenes digitales proporciona una colección de primitivas que es necesario completar o restaurar para obtener datos que sean significativos y computacionalmente manejables.

El Reconocimiento en Visión Computacional utiliza diferentes tipos de Sistemas Expertos para extraer la información. Según la aproximación bottom-up, el reconocimiento de objetos móviles utiliza habitualmente descriptores, detectores y clasificadores como elementos de un modelo estructural. La inmensa mayoría de las aproximaciones a este tópico utiliza una aproximación muy casuística a cada uno de los 3 objetos (descriptores, detectores y clasificadores).

La aproximación que proponemos consiste en realizar un tratamiento de estos tres tipos de elementos básicos en la que

- los *descriptores* correspondan a coordenadas de un espacio base  $B$  de un fibrado;
- los *detectores* a la evaluación numérica de datos (contenidos en descriptores) como si fueran las componentes de vectores variables; y
- los *clasificadores* correspondan a transformaciones sobre las fibras que “empaquetan” los detectores y que reinterpretemos como (clases de) funciones de transición de fibrados vectoriales asociados.

Los tres primeros apartados están dedicados a formalizar descriptores, detectores y clasificadores en el contexto de Fibrados Vectoriales.

Este enfoque debe ser compatible con los Sistemas Expertos utilizados con más frecuencia. Todos ellos están basados en Redes Neuronales Artificiales (ANN); como estos últimos responden básicamente a patrones lineales, presentan múltiples problemas relacionados con el elevado número de muestras necesario para entrenar una ANN (a veces de varios miles), el elevado coste del

entrenamiento (tanto humano como computacional), la lentitud en la convergencia (el aprendizaje se realiza off-line y de forma supervisada), la falta de robustez en los modelos (cualquier pequeña perturbación en los datos o en las características del modelo convierte en inútil los procesos anteriores).

Para remediar esta situación se introducen estructuras adicionales que aceleran de forma sustancial procesos de aprendizaje y entrenamiento a lo largo de los años noventa. Los más relevantes permiten describir:

- cambios cualitativos aleatorios o mutaciones (GAs: Algoritmos Genéticos);
- procesos evolutivos controlados de acuerdo con funciones (EP: Evolutionary Programming); o, bien
- distribuciones de probabilidad convergentes sobre representaciones planares obtenidas como “proyección no-lineal” (submersiones) de colecciones de multivectores localmente parametrizables (SOM: Self-Organizing Maps).

Aunque sea la menos desarrollada en la literatura (debido a una mayor complejidad aparente), la tercera propuesta es la más consistente y robusta con aplicaciones espectaculares a lo largo de los noventa como los sistemas más avanzados de reconocimiento de voz y habla. Un reto importante es la extensión de dicho enfoque al Reconocimiento de contenidos sobre señales 2D (la señal acústica es 1D) y más allá (vídeo convencional, representaciones volumétricas, vídeo 3D).

La consecución del objetivo propuesto asociado a reconocimiento de contenido en señales 2D (sobre imágenes digitales) se lleva a cabo inicialmente mediante entrenamiento supervisado de un número “suficiente” de muestras etiquetadas<sup>13</sup>.

Desarrollos tecnológicos recientes (ANN con decenas o cientos de capas, paralelización de datos y procesos, diferentes tipos de neuronas en la red, realización de procesos en algunas capas sin esperar a la salida final, et) proporcionan un soporte para modelos de Reconocimiento más avanzados que mejoran en un factor superior a cien el rendimiento de los métodos de finales del s.XX. Deep Learning proporciona el marco apropiado para todos estos desarrollos.

Lamentablemente, apenas existen manuales que incorporen una introducción a este tema. Asimismo, existe una elevada casuística y una ausencia de modelos estructurales. La propuesta que se presenta a continuación proporciona algunos elementos que facilitan el desarrollo de dichos modelos estructurales que combinan aspectos robustos y adaptativos de forma simultánea. La propuesta se basa en una “traslación” de conceptos básicos de la Teoría de Fibrados que, a pesar de su carácter elemental, no está aún desarrollada en la literatura.

---

<sup>13</sup> Actualmente, es posible gestionar poblaciones de varios millones de datos con entrenamiento basado en decenas de miles de muestras etiquetadas

### 4.3.1. Detectores

Los *detectores* están asociados a la evaluación numérica de datos correspondientes a funciones  $f_i$  (discretas, continuas, de probabilidad) definidas sobre un espacio topológico  $X$  de muestras. Dichas funciones se pueden interpretar como las *componentes de una aplicación*  $F$  (función vectorial) que no tienen por qué estar definidas globalmente (debido a falta de información, p.e.). La formulación probabilística permite incorporar la incertidumbre relacionados con los datos, su distribución o su evolución.

En cualquier caso, suponemos inicialmente que cada descriptor está dado como una función real  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ , aunque su rango pueda ser  $\mathbb{Z}_2$  (operadores lógicos),  $\mathbb{Z}$  (precisión entera),  $\mathbb{Q}$  (precisión racional) o cualquier dominio de  $\mathbb{R}$ . Por ello, en términos geométricos cada función es una sección del fibrado trivial  $\varepsilon_X^1$  sobre el espacio muestral  $X$ .

Es importante minimizar efectos de sobre-determinación, lo cual conlleva la resolución de problemas de optimización geométrica que se extiende a optimización cinemática para imágenes en movimiento. El propósito de este apartado es mostrar algunos elementos básicos de Optimización (Geométrica y Cinemática) asociados a restricciones básicas para los tipos de operadores más simples utilizados en Reconocimiento.

### 4.3.2. Descriptores

Los *descriptores* correspondan a algún tipo de campos (escalares, vectoriales, tensoriales) definidos localmente sobre un abierto  $U$  del espacio base  $B$  de una fibración  $\xi = (E, \pi, B, F)$  localmente trivial, en la que  $F$  puede ser  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  o cualquier dominio de  $\mathbb{R}$ . El carácter localmente trivial de la fibración  $\xi$  sobre  $U$  se expresa como  $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$ . Esta propiedad permite extender (usando secciones locales) los datos obtenidos sobre el abierto  $U$  del espacio base  $B$  (un espacio muestral en las aplicaciones prácticas) al espacio total  $E$  de  $\xi$ .

Los *campos escalares* sobre  $U \subset B$  son esencialmente lo mismo que los detectores, pero su elevación a  $E$  (sólo definida localmente, es decir, sobre  $\pi^{-1}(U)$ ) extienden la noción de detector. Esta extensión es el análogo a la consideración de la energía potencial de un sistema como función sobre un espacio de configuraciones de un sistema o, con más generalidad, sobre el espacio de las fases cuando se considera su elevación (via la sección nula) al espacio total del fibrado (co)tangente para dar la componente escalar del funcional de energía total de un sistema.

Los *campos vectoriales* están dados por una colección finita de campos escalares en su forma funcional (es decir, sin evaluar aún en cada punto). Permiten describir “trayectorias” o efectos debidos a “deformaciones” (reales o aparentes, debidas a cambios en la localización o condiciones ambientales, p.e.), como una variación espacio-temporal de las funciones observadas.

Pueden presentar fenómenos complejos de acoplamiento que se expresan

en términos de funciones  $f_j(x_1, \dots, x_n)$  dependientes de varias coordenadas o parámetros para  $j = 1, \dots, p$ . En el caso diferenciable se expresan como  $\sum_j f_j(x_1, \dots, x_n) \partial/\partial x_j$ ; en el caso discreto, hay que reemplazar las derivadas parciales por diferencias finitas. En las aplicaciones prácticas, las  $f_i$  son funciones de probabilidad y las distribuciones  $\mathcal{D}$  de campos son distribuciones de probabilidad (eventualmente generadas por campos de Markov para incorporar la incertidumbre).

Análogamente, los duales  $\omega_j$  (formas lineales) de los campos vectoriales – también llamados covectores – evalúan numéricamente el comportamiento de los campos vectoriales para identificar posible convergencia o no hacia la función o la distribución objetivo, de acuerdo con los principios básicos de optimización. En el caso diferenciable se expresan como  $\sum_j f_j(x_1, \dots, x_n) dx_j$ ; en el caso discreto, hay que reemplazar las diferenciales por aplicaciones lineales.

Los *campos tensoriales* están dados por productos formales de  $s$  campos vectoriales y de  $r$  formas diferenciales; en otras palabras, al mismo tiempo que se describe la evolución espacio-temporal de algunos datos, se evalúan numéricamente otros. Al objeto obtenido se le llama un campo tensorial de tipo  $(r, s)$  sobre el espacio muestral  $X$  y se le denota mediante  $t^{r,s} \in T^{r,s}(X)$ . El conjunto de tensores de cualquier tipo tiene estructura de álgebra a la que se denota mediante  $T^{*,*}(X) := \sum_{r,s} T^{r,s}(X)$ . Por ello, dispone de operadores de contracción y de expansión que permiten formalizar una gran cantidad de propiedades observadas en relación con posibles eventos estáticos o dinámicos.

Un ejemplo típico corresponde a la evaluación de las características de vehículos en movimiento; además de la distribución de velocidades o aceleraciones (cinemática propiamente dicha), se evalúan las características radiométricas de los vehículos o de la escena (incluyendo color, textura, iluminación, reflectancia, etc) que se representan con “formas” o aplicaciones lineales definidas sobre el espacio de la Radiometría.

### 4.3.3. Clasificadores

En el marco diferenciable la clasificación de los fibrados vectoriales (módulo isomorfismo) sobre una variedad  $M$  es equivalente a la clasificación (modulo conjugación) de los sistemas de funciones de transición  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  para cualquier par  $i, j \in I$  correspondiente a dos abiertos  $U_i, U_j$  con intersección no vacía; inicialmente  $G = GL(m, \mathbb{R})$ , pero en realidad puede ser cualquier grupo (incluyendo grupos discretos o grupos infinito-dimensionales para deformaciones arbitrarias).

Por ello, las funciones de transición permiten relacionar mediante la acción de un elemento de un grupo  $G$  datos comunes de la misma observación desde dos localizaciones diferentes o bajo condiciones ambientales diferentes. Este enfoque es compatible con el enfoque probabilista (distribuciones de probabilidad sobre grupos).

Por ello, en la reformulación de Sistemas Expertos que llevamos a cabo

los *clasificadores* correspondan a las clases (módulo conjugación) de los grupos de transformaciones sobre las fibras generadas por los descriptores. En otras palabras, si partimos de la extensión de un sistema de descriptores  $s_i$  al espacio total  $E$  del fibrado (como sección local  $s_i : U \rightarrow E$  del fibrado), la acción del grupo  $G$  sobre el subespacio  $\langle s_1, \dots, s_k \rangle$  generado por los descriptores permite relacionar los resultados proporcionados por diferentes sistemas de detección y “empaquetarlos” en clases módulo la acción de conjugación del grupo.

Además y desde un punto de vista global, la clase algebraica resultante para las funciones de transición es equivalente a la clase (módulo isomorfismos) de la fibrición, lo cual permite comparar diferentes estrategias de clasificación. Cuando los fibrados resultantes no son equivalentes, la comparación se lleva a cabo inicialmente en términos de homomorfismos entre fibrados (ver más arriba). A cada homomorfismo  $\varphi : \xi \rightarrow \eta$  entre fibrados se le puede asociar el núcleo  $Ker(\varphi)$  y el conúcleo  $Coker(\varphi)$ . Estos objetos “codifican” las relaciones de “inclusión parcial” o las “diferencias” sobre un espacio de referencia común (“proyección no-lineal” en el sentido utilizado por Kohonen en SOM, p.e.)<sup>14</sup>.

De la misma forma que ocurre en la Teoría Clásica de Fibrados, la estructura de la fibra como espacio vectorial no es imprescindible. En particular, la fibra puede ser un grupo en lugar de un espacio vectorial, lo cual da lugar a la noción de fibrado principal  $\mathcal{P} = (P, \pi, B, G)$  sobre un espacio base  $B$  en el que se utilizan detectores, descriptores o clasificadores para resolver problemas de Reconocimiento (entrenamiento y aprendizaje, p.e.).

Así p.e., las representaciones de una escena se definen como observables desde diferentes localizaciones de la cámara, incorporando los efectos asociados a diferentes tipos de transformaciones (euclídeas, afines, proyectivas) dependiendo de las restricciones sobre la cámara y su localización relativa, en función del marco estructural elegido para representar la escena. En este caso, la acción del grupo correspondiente sobre una representación permite dotar de estructura natural de fibrado principal, anticipando posibles movimientos de cámara en función de las condiciones iniciales para la trayectoria inicialmente prevista. En particular, las clases de equivalencia (módulo la acción de conjugación) que representan los clasificadores se construyen como funcionales elegidos por su capacidad de discriminación.

#### 4.3.4. Apéndice: Elementos de Sistemas Expertos

En este apartado se comentan brevemente los tres tipos de Sistemas Expertos de carácter general que se pueden superponer a las ANN. Estos tres tipos están dados por Algoritmos Genéticos (GAs), Programación Evolutiva (EP) y Mapas Auto-Organizados (SOM) de Kohonen. El más potente y universal corresponde a los SOM, además de ser el más próximo a la formulación en términos de fibrados

<sup>14</sup> Una descripción más formal y rigurosa se presenta en el capítulo siguiente, incluyendo consideraciones sobre su naturaleza cambiante (no tienen por qué ser fibrados vectoriales, p.e.)

vectoriales. Por ello, este apartado está centrado sobre todo en mostrar algunas aplicaciones básicas de los SOM al problema de Reconocimiento en imágenes digitales.

*Ejercicio.-* Completar detalles. *Indicación:* Adaptar materiales contenidos en la materia  $B_2$  (Robotics. A stratified approach).

#### 4.4. Práctica 4: Una aplicación a dinámica económica

Uno de los problemas esenciales para la Dinámica Económica consiste en proporcionar buenos modelos que den cuenta de la “dinámica de los mercados” y de la “formación de expectativas” que llevan a cabo los agentes económicos. Esta formación modifica la dinámica procedente de las “ecuaciones pasivas” constantemente. Una vez identificadas las variables básicas, en las regiones de regularidad del sistema es posible tomar las funciones que relacionan las variables básicas como si fueran las coordenadas locales. Ello se traduce en la incorporación de variedades cambiantes (representación de distribuciones de campos) que idealmente representan el soporte para la Dinámica Económica en torno a las tendencias más significativas.

Del mismo modo que en Física de campos, debería ser representable mediante transformaciones activas de coordenadas en el lenguaje introducido en la primera sección. Las variables básicas asociadas a los factores de producción son el capital, el trabajo y las tecnologías utilizadas. Si por un momento, se excluye el macrosector financiero, el trabajo a través de la producción y realización de mercancías en los diferentes mercados es el factor fundamental. Por ello, su compra-venta y su apropiación-redistribución son indispensables para la realización de mercancías en cualquier tipo de mercados.

##### 4.4.1. Comentarios sobre el macrosector financiero

Una de las múltiples perversiones del sistema actual consiste en que la mayor parte de la actividad del macrosector financiero no requiere ningún tipo de trabajo para la obtención de beneficios. Le basta con especular a gran escala para obtener beneficios a partir de una deuda en su mayor parte ilegítima, explotando a la inmensa mayoría de la población.

El descomunal volumen del sector financiero (75 veces el PIB a nivel mundial) da lugar a un volumen gigantesco de movimientos de capital en los que se hacen y deshacen las mismas operaciones en las fases de apertura y cierre de cada mercado. Por ello, todos los ciudadanos (accionistas o no) están al servicio de una dinámica que se escapa al control no sólo de los gobiernos, sino también de las entidades financieras (FMI, Banco Mundial, BCE, etc) encargadas de la supervisión ... que, en cualquier caso, están al servicio de las grandes corporaciones financieras cuyas operaciones son bendecidas por las agencias de calificación.

Desde el punto de vista matemático no se puede resolver este problema, pues requiere una coordinación gubernamental, una coordinación de políticas monetaria y fiscal (abandonando el paradigma monetarista como pensamiento único), la introducción de impuestos disuasorios para las transacciones especulativas (actualmente el 95 % de las que se producen a diario), la tipificación como delitos de las prácticas financieras habituales y la persecución internacional de dichos delitos, entre otras cosas.

En cierto modo, la situación es similar a la que se produjo a principios del s.XIX cuando la mayor parte de los gobiernos comprendieron que no podían seguir concediendo patentes de corso a sus oficiales de la Marina para que saquearan a los navíos de otros países no aliados. En aquel momento, hubo un acuerdo generalizado entre las potencias marítimas para acabar con los corsarios (que ellos mismos habían promovido) en beneficio de un comercio internacional más beneficioso para todos. Actualmente, la situación es mucho peor: Los corsarios son ahora los bancos y las entidades financieras <sup>15</sup>, pero su dominio sobre la economía es incomparablemente mayor que el de los corsarios a finales del s.XVIII y principios del s.XIX.

Incluso la población que no tiene relación con ninguna entidad bancaria y que vive aislada en comunas, debe una cantidad de dinero a las entidades financieras que no se podría pagar en varias generaciones y que se detrae vía impuestos que podrían tener efectos redistributivos, actualmente imposible debido a la inexistencia de una política fiscal eficiente. Asimismo, buena parte del negocio de grandes economías se basa en el reciclaje de los flujos económicos a su favor. El caso norteamericano (con una deuda superior al 100 % que a nadie preocupa) es bien conocido, pues funciona como una gigantesca aspiradora, con una dependencia cada vez mayor de los fondos soberanos que gestionan su deuda. Pero otros casos más próximos son menos conocidos, como el de UK que a través de la City obtiene cerca de un 10 % de su PIB; si se aplica el porcentaje del 95 % como componente especulativa de las transacciones financieras, ello implica que la City de Londres es la primera especuladora a nivel europeo y que el primer beneficiario es la economía de UK (no su población, obviamente).

Por ello, es importante conocer los mecanismos del mercado y los efectos que tendría un “default” en el pago de la deuda ilegítima, como único mecanismo internacional. Para ello, hay que conocer mejor los modelos básicos y diseñar estrategias coordinadas que permiten minorar el efecto de esta especulación salvaje que nos conducirá de forma inevitable de una crisis a otra.

Las hipótesis sobre las que descansa la presunta estabilidad del modelo son

- La *Eficiencia de los Mercados* como una extensión de la “mano invisible” de Adam Smith que presuntamente regula los flujos y, por consiguiente, la dinámica global del mercado.
- La *generación de Expectativas Racionales* que reaccionan de acuerdo con

---

<sup>15</sup> Bertolt Brecht se preguntaba hace casi cien años: ¿Quién es más ladrón: quien asalta un banco o quien lo funda?

dicha eficiencia para ajustar sus comportamientos en función de la primera.

Ninguna de estas dos hipótesis es cierta. La EM (Eficiencia de los Mercados) basada en el libre mercado no existe, porque este último jamás ha existido ni puede existir debido a la posición predominante de agentes en cualquier mercado. Se proclama su necesidad para promover una desregulación que sólo beneficia a los más fuertes. La maximización del beneficio funciona como una ley de gravitación universal y es la que caracteriza la dinámica global, con un proceso de atracción que acaba en la absorción o la destrucción como un agujero negro cada vez mayor. Llegados al punto actual, el crecimiento descomunal de entidades financieras y su necesidad de seguir manteniendo beneficios conduce a arruinar países enteros (primero los más pequeños, luego otros más grandes) ... o bien a una quiebra en cascada.

El modelo ER (Expectativas Racionales) = propuesto surgido a principios de los sesenta, reelaborado por Sargent y desarrollado con más detalle por obtuvo uno de los Premios Nobel más catastróficos de la historia reciente, pues su aplicación condujo a un crack financiero a finales de los noventa en el que se evaporó casi un billón de dólares. No obstante, no es el peor de los Premios Nobel concedidos en Economía ni el más perjudicial para la mayor parte de la población, pues sólo afectó a movimientos bursátiles, sin llegar a afectar seriamente a la economía real. Por ello, merece una revisión un poco más detallada, algunos de cuyos elementos se presentan en esta subsección

#### 4.4.2. Una aproximación histórica a ER

El modelo predominante hacia mediados de los noventa recibe el nombre de *Expectativas Racionales* y postula que los agentes llevan a cabo predicciones de forma óptima sobre la evolución de las variables más relevantes desde el punto de vista económico de acuerdo con la información disponible y la estructura global del modelo. Por la reelaboración estadística de este modelo, Merton y Scholes obtuvieron el Premio Nobel de Economía en 1997, al mismo tiempo que conducían a los fondos de inversión libre que patrocinaban (LTCM) a un desastre económico con un agujero de varios centenares de miles de millones de dólares, antesala de la Gran Estafa de 2008 en la que aún seguimos sumidos.

Según el modelo teórico de las ER, la posibilidad de predicciones erróneas por parte de algunos agentes se compensa desde el punto de vista estadístico, suponiendo inicialmente que las expectativas son aleatorias (algo que no tiene ningún sentido) y, en una fase posterior, que la mayor parte de ellos “aciertan”, lo cual compensa la toma errónea de decisiones. No hay ninguna demostración de este resultado (al estilo de la Termodinámica Estadística, p.e.), ni puede haberla más que en modelos ficticios, pues reposa sobre hipótesis falsas. Este enfoque, aunque proclame lo contrario, ignora los modelos básicos de propagación espacio-temporal (tipo tela de araña, p.e.), el comportamiento especulativo de agentes e intermediarios financieros a gran escala, la información privilegiada

que genera sesgos, los fenómenos de absorción y concentración (con monopolios y oligopolios de facto).

La racionalidad utilizada inicialmente en este modelo corresponde al “sentido común”, algo que no tiene ningún sentido, pues

- postula la existencia de un “agente típico”, algo inexistente en mercados cada vez más polarizados y con estructuras que operan a diferentes escalas, con “asimetrías” muy marcadas dependiendo del nivel de información y de la posición en el mercado (muchos fondos sólo son accesibles para los más grandes);
- no distingue entre comportamientos cambiantes que pueden generar un carácter especulativo o conservador para un mismo agente dependiendo de la fase del ciclo; asimismo, hay agentes que actúan en sentido contrario a los intereses de las entidades que representan para provocar movimientos en sentido contrario y aprovecharse de la situación mediante recompra a precios más bajos;
- el modelado del sentido común se lleva a cabo en términos del concepto matemático de esperanza, que no incorpora ninguna dinámica estructural del mercado, ni tampoco los eventos repentinos (shocks, burbujas, crashes) que se presentan de forma recurrente en Macroeconomía, Comercio Internacional y Finanzas.

¿Quiere ello decir que no se puede hacer nada? La respuesta es negativa, pero las acciones a llevar a cabo para limitar los efectos del desastre en el que estamos instalados requieren mejor conocimiento y mayor coordinación. Desde una perspectiva matemática, es necesario mejorar las herramientas estadísticas (para captura y procesamiento de la información) y las analíticas (para identificar tendencias y la posible evolución del sistema. Las primeras afectan inicialmente a modelos estadísticos basados en series temporales (tipo ARMA) que se presentan en el apartado siguiente. Las segundas afectan a un modelado diferencial (campos vectoriales y su evaluación mediante formas) e integral (estimación del modelo conjunto asociado a “cajas de flujos”). La conexión entre ambos aspectos se lleva a cabo en términos de modelos ocultos de Markov <sup>16</sup>

#### 4.4.3. Aspectos estadísticos del modelo

Los modelos ARMA (Auto Regressive and Moving Average) proporcionan un paradigma econométrico que resulta de utilidad para identificar tendencias estables dentro de series econométricas. La correlación entre dichos modelos permite evaluar patrones de conducta a los que tratan de ajustarse diferentes agentes económicos.

---

<sup>16</sup> Todos estos aspectos se tratan con más detalle en el Curso sobre Métodos Diferenciales en Teoría Económica

Para completarlos sería necesario incorporar aspectos espaciales en términos de matrices de covarianza que puedan dar cuenta de la falta de elasticidad del mercado (elevada curvatura local), de la alternancia entre concavidad y convexidad (que dificulta o impide la identificación de soluciones óptimas), la selección de las estrategias más apropiadas en función de la realimentación con inputs procedentes de otras áreas (sobre todo procedentes del Comercio Internacional o de la Economía Financiera).

El objetivo de este apartado consiste en desarrollar los aspectos más básicos del enfoque estadístico del problema que presentamos según un orden creciente de dificultad. Con ello se pretende proporcionar elementos para un análisis basado en Termodinámica Estadística por un lado y Campos Ocultos de Markov por otro. Ambos modelos incorporan efectos diferenciales que se comentan en el apartado siguiente.

#### 4.4.4. Campos para representar la dinámica económica

El modelo a desarrollar en este apartado se presenta en la formulación diferencial del modelo básico IS-LM en Macroeconomía. Una introducción a estos aspectos se presenta en el módulo 4; y sus extensiones a Comercio Internacional y a Finanzas se presentan con más detalle en los módulos 5 y 6 del Curso sobre Métodos Diferenciales en Teoría Económica. De forma adicional y para terminar esta práctica se propone desarrollar la integración con modelos estadísticos para campos (basados en modelos ocultos de Markov) mediante distribuciones de Gibbs, completando así el enfoque diferencial en un marco que amplía la Mecánica Estadística tradicional.

## 5. Complementos

### 5.1. Conclusiones

Los fibrados vectoriales proporcionan una linealización de las estructuras más simples que se pueden superponer a una variedad diferenciable  $M$ . Inicialmente, están dadas por el fibrado tangente  $\tau_M$  y el cotangente  $\tau_M^*$  (dual del tangente) que se pueden describir localmente en términos de las secciones dadas por campos vectoriales y por formas diferenciales, respectivamente. Su estructura localmente trivial proporciona el ejemplo más sencillo para estructuras más generales (prehaces y haces) que se introducen en GAGA para el estudio de variedades algebraicas o analíticas en presencia de singularidades.

Desde el punto de vista analítico, los fibrados vectoriales extienden a variedades (inicialmente diferenciables)  $M$  los sistemas de EDO y de EDP utilizados de forma habitual en el Análisis Diferencial Local. En el módulo  $A_{15}$  (Integración de Formas) veremos que extienden asimismo el Cálculo Integral Local al caso de (Sistemas de) Formas Diferenciales sobre Variedades. El producto formal de  $s$  campos vectoriales y de  $r$  formas diferenciales proporciona un tensor de tipo  $(r, s)$  que “codifica” de forma simultánea desplazamientos o deformaciones y la evaluación numérica de algunas de sus componentes.

Los fibrados vectoriales se describen localmente en términos de secciones locales que proporcionan sistemas de referencia sobre cada abierto de trivialización. El “desplazamiento” de referencias (método de la referencia móvil en el sentido de Frenet, Cartan, etc) se describe en términos de la acción de un grupo clásico. La clasificación de grupos de Lie  $G$  o de las álgebras de Lie  $\mathfrak{g} := T_e G$  correspondientes, proporciona criterios para visualizar el comportamiento de las soluciones de sistemas integrables de ecuaciones dadas por distribuciones  $\mathcal{D}$  de campos vectoriales o por sistemas  $\mathcal{S}$  de formas diferenciales sobre  $M$ .

La clasificación de fibrados vectoriales módulo isomorfismo (equivalente a la clasificación de sistemas de transición módulo conjugación) proporciona un marco general para abordar la clasificación de las extensiones de sistemas locales de EDO o de EDP presentadas en Análisis. Más adelante, se describen métodos que permiten identificar la “obstrucción” a la integración de dichos sistemas en toda la variedad (incluso aunque localmente sí sean integrables).

La descripción de la Mecánica Clásica (Newton, Lagrange, Hamilton) en términos de EDO y de una gran cantidad de fenómenos que aparecen en la Mecánica de Medios Continuos, proporciona un banco de pruebas para la aplicación de Fibrados Vectoriales. De este modo, es posible obtener resultados globales que extienden las formulaciones clásicas llevadas a cabo hasta mediados del s.XX.

En multitud de aplicaciones, la estructura de la fibra como espacio vectorial no es necesaria, ni siquiera realista. La interacción entre observables en Mecánica Cuántica se describe al más bajo nivel módulo la acción de productos finitos de subgrupos (eventualmente discretos) de grupos clásicos. En este caso, la noción

de fibrado vectorial debe ser reemplazada por la de fibrado principal, donde la fibra es un grupo clásico. De este modo, los fibrados principales proporcionan el marco para el modelo estándar que unifica las interacciones electromagnética, débil y fuerte con grupo estructural  $U(1)$ ,  $SU(2)$  y  $SU(3)$ , respectivamente.

En el último tercio del siglo XX se inicia el estudio de fibrados vectoriales sobre variedades algebraicas o analíticas, con aplicaciones muy relevantes en el caso de superficies algebraicas compactas complejas [Bar84]<sup>17</sup>; aún se carece de resultados similares para el caso de variedades tridimensionales (threefolds) incluso para el caso complejo.

La Teoría Clásica de fibrados principales se ha extendido a la Mecánica de Medios Continuos, donde es necesario reemplazar el grupo clásico  $G$  por un grupo de difeomorfismos<sup>18</sup> que, eventualmente, pueden conservar una métrica, una forma de volumen o la forma simpléctica.

A principios de los noventa se inicia la aplicación de los Fibrados Principales a Robótica en términos de una descripción de los espacios de configuraciones  $\mathcal{C}$  y de trabajo  $\mathcal{W}$  de un robot  $\mathcal{R}$  como una subvariedad semianalítica de un producto finito de grupos clásicos. Este enfoque se puede extender al estudio de sistemas multiagente en el que varios dispositivos “inteligentes” interactúan en un espacio compartido.

El desarrollo de la Teoría de Fibrados (Vectoriales o Principales) a otras áreas de Ingeniería (Visión Computacional, Informática Gráfica, Sistemas Expertos) es aún incipiente pero muy prometedor. Permite unificar diferentes aspectos que, actualmente, presentan una elevada casuística. Para desarrollos recientes, ver las introducciones a los diferentes módulos de las materias  $B_1$  (Mechanics of Continuous Media),  $B_2$  (Robotics, a hierarchical approach),  $B_3$  (Computer Vision) y  $B_4$  (Computer Graphics).

## 5.2. Ejercicios

### 5.2.1. Fibrado tautológico sobre el espacio proyectivo

Sea  $\gamma_n^1$  el fibrado tautológico sobre el espacio proyectivo  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  y  $\varepsilon^1$  el fibrado trivial de rango 1. Demuestra que

$$\tau\mathbb{R}\mathbb{P}^n \oplus \varepsilon^1 \simeq (n+1)\gamma_n^1 := \gamma_n^1 \oplus \dots \oplus \gamma_n^1.$$

(Indicación: Obsérvese que el fibrado  $\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$  es trivial, por lo que usando la descripción del fibrado tangente al espacio proyectivo presentada en el capítulo 2 tenemos

$$\tau\mathbb{R}\mathbb{P}^n \oplus \varepsilon^1 \simeq \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1 \perp) \oplus \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \simeq \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1})$$

<sup>17</sup> W.Barth, C.Peters and A.Van de Ven: *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag, 1984.

<sup>18</sup> R.Abraham, J.E.Marsden and T.Ratiu: *Manifolds, Tensor Analysis and Applications* (2nd ed), Springer-Verlag, 1983.

### 5.2.2. Orientabilidad de la suma de fibrados vectoriales

Demuestra que si  $\xi$  y  $\eta$  son fibrados vectoriales orientables, entonces  $\xi \oplus \eta$  es orientable.

Demuestra que, si  $\xi$  es orientable, pero  $\eta$  no lo es, entonces  $\xi \oplus \eta$  es no orientable.

### 5.2.3. Imagen recíproca de la suma de Whitney

Demuestra que  $f^*(\xi \oplus \eta) \simeq f^*(\xi) \oplus f^*(\eta)$ .

### 5.2.4. Fibrados lineales sobre la circunferencia

Sea  $\mathcal{L}$  un fibrado lineal sobre la circunferencia  $\mathbb{S}^1$ . Demuestra que la suma de Whitney  $\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}$  es un fibrado trivial de rango 2 sobre  $\mathbb{S}^1$ .

### 5.2.5. Producto paralelizable de variedades

Si  $TM$  tiene una sección siempre no nula y  $TM \oplus \varepsilon^1$  y  $TN \oplus \varepsilon^1$  son triviales, entonces  $M \times N$  es paralelizable. (*Indicación:* nótese que tenemos la siguiente cadena de isomorfismos de fibrados vectoriales sobre  $M \times N$ :

$$T(M \times N) \simeq TM \oplus TN \simeq \eta \oplus \varepsilon^1 \oplus TN \simeq \eta \oplus \varepsilon^{n+1} \simeq \eta \varepsilon^1 \oplus \varepsilon^n \simeq TM \oplus \varepsilon^1 \oplus \varepsilon^{n-1} \simeq \varepsilon^{m+1} \oplus \varepsilon^{n-1}$$

*Nota.-* Este ejercicio se aplica obviamente al caso en que  $M$  y  $N$  son esferas (verifícalo). Usando los resultados del capítulo anterior relativos a la existencia de subfibrados isomorfos al trivial para esferas de dimensión impar, podemos formular el ejercicio siguiente:

### 5.2.6. Producto paralelizable de esferas

Un producto de dos o más esferas es paralelizable si todas tienen dimensión *positiva* y al menos una tiene dimensión *impar*.

*Indicación:* En efecto, razonando por inducción basta demostrarlo para el producto de dos esferas. En este caso, como  $T\mathbb{S}^n \oplus \varepsilon^1$  y  $T\mathbb{S}^m \oplus \varepsilon^1$  son triviales, y al menos una de las dimensiones es impar, tenemos también que  $T\mathbb{S}^n \simeq \varepsilon^1 \oplus \eta$ . Aplicando el resultado mostrado en el ejercicio anterior, se obtiene la tesis.

## 5.3. Prácticas

*Desarrollar alguno de los items presentados en la sección 4 de este capítulo*