2.1 Noción de fibrado tangente

Javier Finat

Índice

1. **Conceptos básicos** . . . 5
1.1. La noción de fibrado tangente . . . 5
1.1.1. Compatibilidad entre trivializaciones locales . . . 6
1.1.2. El espacio total del fibrado tangente como variedad . . . 6
1.2. Fibrados y fibraciones . . . 6
1.2.1. Fibrado Vectorial . . . 7
1.2.2. Fibración . . . 8
1.3. Tangente de una Aplicación entre variedades . . . 8
1.3.1. Noción de aplicación tangente . . . 9
1.3.2. Expresión coordenada local . . . 9
1.4. Secciones de un Fibrado . . . 9
1.4.1. Secciones del Fibrado Tangente . . . 10
1.4.2. Secciones de un Fibrado Vectorial . . . 10
1.4.3. Variedades de Stiefel . . . 10
1.5. Variedades paralelizables . . . 11
1.5.1. Noción de variedad paralelizable . . . 11
1.5.2. Ejemplos triviales . . . 11
1.5.3. Producto de variedades paralelizables . . . 12
1.5.4. Toro m-dimensional . . . 13
1.5.5. Cadenas cinemáticas en robótica . . . 14
2. **Fibrados Tangentes de Esferas** . . . 15
2.1. Fibrado tangente de la circunferencia . . . 15
2.1.1. La circunferencia es paralelizable . . . 15
2.1.2. Fibrado normal a la circunferencia . . . 16
2.1.3. Banda de Moebius extendida . . . 17
2.1.4. Curvas simples y fibrados de circunferencias . . . 17
2.2. Fibrado tangente de la esfera 3-dimensional . . . 18
2.2.1. La esfera 3-dimensional como variedad paralelizable . . . 19
2.2.2. Una nota sobre cuaterniones . . . 19
2.2.3. Una nota avanzada sobre Geometría No-Conmutativa . . . 20
2.3. Fibrado tangente de la esfera 7-dimensional . . . 21
2.3.1. La esfera 7-dimensional como variedad paralelizable . . . 22
2.3.2. Campos vectoriales octoniónicos . . . 23
2.3.3. Algunas aplicaciones de los octoniones a Física Teórica . . . 24
2.4. Práctica: Caracterización de las Esferas Paralelizables . . . 25

2.4.1. Esferas paralelizables y álgebras de división 26
2.4.2. Una excursión por el multiverso 27
2.4.3. Algebras de división y espacios spinores 27
3. **Orientabilidad y fibrados lineales** 29
3.1. Variedades orientables 29
3.1.1. La noción de orientación para un e.v. 29
3.1.2. Variedades orientables 29
3.1.3. Propiedades elementales 30
3.1.4. Coherencia entre orientaciones locales 30
3.2. El Fibrado Tautológico sobre el Espacio Proyectivo 31
3.2.1. El espacio proyectivo como cociente de la esfera 31
3.2.2. El espacio proyectivo como cociente del espacio cartesiano 31
3.2.3. El fibrado tautológico sobre el espacio proyectivo 32
3.2.4. No-trivialidad del fibrado tautológico 32
3.3. Fibrado tangente de Espacios Homogéneos 32
3.3.1. Fibrado tangente del espacio proyectivo 33
3.3.2. Descripción formal 33

Motivación: En el módulo §1 se han introducido los conceptos básicos relativos a diferentes tipos de C^r-estructuras. La linealización proporciona una estrategia general para simplificar aplicaciones y estructuras. La linealización de aplicaciones está dada por la diferencial que se representa localmente por la matriz jacobiana. Los datos locales correspondientes a la linealización se pegan mediante cambios de carta, por lo que se trata básicamente de objetos equivalentes a (abiertos de) el espacio cartesiano. Suponemos que $\mathbb{R}^m$ admite una estructura diferenciable única [1]

La idea de linealización se extiende al estudio de C^r-estructuras superpuestas a una variedad mediante la diferencial $d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$ que es la elevación del cambio de carta al espacio TM como unión disjunta de espacio tangentes T_pM cuando p recorre M. El pegado de los espacios tangentes proporciona una C^r-estructura sobre TM que es compatible con la C^r-estructura del espacio base M.

La existencia de cierto tipo de propiedades para la linealización tanto de aplicaciones como de variedades, permite abordar el estudio de subvariedades de forma intrínseca, es decir, sin recurrir a la descripción en términos de cartas. Esta idea es de gran utilidad, no sólo para el estudio de los grupos de Lie (como veremos en §2,5), sino también para la Geometría de los Espacios de Funciones y es asimismo útil para aquellas aplicaciones de la Teoría (relacionadas por ejemplo con la Mecánica de Medios Continuos), donde no disponemos de sistemas coordenados locales [2].

Aunque la mayor parte de las definiciones se pueden adaptar a variedades algebraicas ó analíticas, para fijar ideas nos restringimos habitualmente al caso diferenciable. La traslación al marco GAGA se lleva a cabo reemplazando los campos vectoriales, dados localmente por $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) < \partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_m >$ por el álgebra de las derivaciones de un anillo A que puede ser el de las funciones regulares (polinomios ó funciones holomorfas, según el contexto) ó el anillo coordenado local $A[\underline{x}]/I_{X,\underline{x}}$ donde $\underline{x}$ representa un sistema de coordenadas locales en el entorno de un punto $\underline{x} \in X$, siendo I_X el ideal de la variedad X en el punto $\underline{x} \in X$.

La situación en el caso analítico ó algebraico singular es más complicada, debido a la falta de unicidad local en el entorno de un punto: En efecto, en cualquier punto singular se tienen diferentes "ramas" (componentes de X de dimensión maximal que pasan por el punto); por ello, es necesario extender el enfoque diferencial para obtener una parametrización local para cada una de las "ramas", resultado que es consecuencia del Teorema preparatorio de Weierstrass, resultado altamente no trivial que se demuestra en Geometría Analítica [3]. A la vista de la mayor complejidad que presenta el marco GAGA y para fijar

[1] Esta hipótesis es cierta "casi siempre" salvo para el caso 4-dimensional que presenta diferentes estructuras diferenciables, una patología para la que aún no se dispone de una explicación satisfactoria

[2] La desaparición de las asignaturas GAGA del Grado en Matemáticas motiva el desarrollo de un lenguaje común a las diferentes Geometrías en esta asignatura para tratar de remediar las deficiencias actualmente detectadas en la formación de los graduados

[3] Para más detalles ver R.Gunning and H.Rossi: *Analytic Functions of Several Complex Variables*, reprt by AMS, 2009

ideas, a lo largo de todo el módulo A_{12} nos restringiremos al caso diferenciable, aunque la mayor parte de los resultados se extienden al marco de la Geometría Algebraica ó la Analítica utilizando herramientas de Álgebra Local en lugar de Análisis Diferencial Local.

La idea básica transversal a todo el módulo 2 se resume en *linealizar* estructuras diferenciables. El "ejemplo" más simple corresponde al fibrado tangente como linealización de la C^{∞}-estructura de una variedad diferenciable M. La integración de la distribución asociada a coordenadas cartesianas proporciona el primer ejemplo de linealización de una estructura que, en este caso, es isomorfa de forma canónica a la estructura original como espacio cartesiano (ver §1,6 para un tratamiento más formal de esta cuestión).

Sea $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^m}$ la distribución generada por los campos $\{\partial/\partial x_1, \ldots \partial/\partial x_m\}$. La imagen directa de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^m}$ por la aplicación $\varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \to U_\alpha$ genera una distribución $(\varphi_\alpha)_*(\mathcal{D}_{\mathbb{R}^m})$ sobre U_α que tomamos como trivialización local de TU_α. La primera cuestión a resolver concierne a la compatibilidad entre datos locales $(\varphi_\alpha)_*(\mathcal{D}_{\mathbb{R}^m})$ y $(\varphi_\beta)_*(\mathcal{D}_{\mathbb{R}^m})$ sobre $U_{\alpha\beta}$. El fibrado tangente a una variedad permite formalizar esta idea de una manera elemental utilizando para el pegado de datos locales la elevación de las cartas asociadas a la estructura de M como variedad diferenciable.

Una vez construido el fibrado tangente, es necesario mostrar su comportamiento por C^r-aplicaciones, el paso al dual y describir operaciones básicas sobre fibrados (suma, paso al cociente). Aunque el enfoque predominante sea global, se presentan la versión local de los resultados con objeto de facilitar algunas aplicaciones a otras áreas de conocimiento, en las que predomina el enfoque local. Cuando se "multiplican formalmente" q copias del fibrado tangente TM y p copias del cotangente T^*M se obtienen los tensores de tipo (p, q) que tienen multitud de aplicaciones en Física, Ingeniería y más recientemente en otras áreas científicas (Geología, Biología, Economía, Visión Computacional, Visualización Avanzada). El módulo 3 está dedicado a presentar las nociones básicas de Cálculo Tensorial y algunas aplicaciones.

La primera sección del capítulo está dedicada a presentar los conceptos básicos relativos al fibrado tangente. La segunda sección está dedicada a mostrar ejemplos relativos al fibrado tangente de esferas. En la tercera sección se presenta una versión sintética de variedades orientables y se extiende la noción de orientación a otros fibrados lineales, es decir, de rango 1. A continuación se muestran ejemplos correspondientes al fibrado tangente de espacios proyectivos (no orientables en el caso real), con una extensión al caso de espacios homogéneos más generales (grassmannianas y variedades de banderas). Este desarrollo plantea la posibilidad de extensiones más avanzadas relacionadas con acciones de grupos y sus aproximaciones lineales que se presentan como una posible práctica avanzada a desarrollar por el alumno.

1. Conceptos básicos

Del mismo modo que la diferencial de una aplicación es una aproximación lineal al comportamiento de la función, el espacio tangente T_pM es una aproximación de primer orden al estudio de una variedad M en cada punto $p \in M$. Cuando p recorre toda la variedad M, la C^r-estructura global que se tiene sobre M induce una estructura global sobre el espacio topológico TM unión de espacios tangentes a dicha variedad, dando lugar a un importante ejemplo de lo que llamaremos "fibrado vectorial".

El *objetivo de esta sección* consiste en familiarizarse con la C^r-estructura de fibrado tangente, como ejemplo de este tipo de estructura. El primer paso consiste en dotar de estructura de C^r-variedad al espacio topológico obtenido mediante "pegado" de espacios tangentes. La idea consiste en "elevar" la información como C^r-variedad que se tiene sobre M al espacio topológico TM unión disjunta de espacios vectoriales tangentes a la variedad.

La elevación de la información de M a TM se lleva cabo localmente mediante campos vectoriales definidos sobre abiertos coordenados $U_i \subset M$. Los datos locales se "pegan" mediante $d\varphi_j \circ (d\varphi_i)^{-1}$; la expresión en coordenadas locales está dada por la matriz jacobiana del cambio de base $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sobre $U_i \cap U_j$. Un campo vectorial asigna a cada punto base $b \in U_i \cap U_j \subset M$ un vector tangente en el punto que se representa mediante $(p, \mathbf{v}_p) \in M \times T_pM$; obviamente, la proyección π sobre la primera componente da lugar a la identidad, es decir, $\pi \circ s = 1_M$. Esta propiedad se extiende a la noción de sección de un fibrado vectorial, con una extensión de propiedades típicas de los campos vectoriales.

1.1. La noción de fibrado tangente

Dada una variedad m-dimensional M, llamamos *fibrado tangente*a la 4-upla $\tau M := (TM, \pi_M, M, F)$, donde

$$TM \ := \ \cup_{p\in M} T_pM$$

es el *espacio total*del fibrado, M es el *espacio base*π_M es la aplicación *proyección sobre la primera componente*y F es la *fibra general*isomorfa al espacio de derivaciones en $\mathbb{R}^m$, verificando que $\forall p \in M$, existe una carta coordenada local (φ, U) tal que

- $\varphi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^m$ (condición de *trivialidad local*), y
- La restricción a la fibra $F_p := \pi_M^{-1}(p) = T_pM$ de dicha equivalencia da un isomorfismo de R-espacios vectoriales

$$T_pM \simeq F = \mathbb{R} < \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m} > \ .$$

En virtud de los resultados mostrados en el §1 (ver en particular, el *Ejercicio 1.2.6.6*y el §1,6), el fibrado vectorial de $\mathbb{R}^m$ es *trivial* para cualquier m, es decir,

$$T\mathbb{R}^m \;\simeq\; \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} < \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m} > \ .$$

De hecho esta propiedad para cualquier abierto $U \subset M$ que sea C^r-equivalente a (un abierto de) $\mathbb{R}^m$.

Ejercicio.- Verifica que esta condición se extiende a cualquier abierto de un espacio afín (*Indicación:* Utilizad que la condición de paralelismo se conserva por transformaciones afines y la representación coordenada para las "traslaciones afines" que se ha mostrado en el §1,5)

Además, la condición de trivialidad local para el fibrado tangente es en el caso diferenciable redundante, pues el isomorfismo dado por $\pi^{-1}(p) := T_pM \simeq \{p\} \times \mathbb{R}^m$, se extiende (en virtu del Teorema de la Función Inversa) a un difeomorfismo local para un pequeño entorno U de p, al que se llama abierto de trivialización del fibrado. La condición de trivialidad local se mantiene para que la definición sea válida en categorías topológicas más generales en las que no existe necesariamente un Teorema de la Función Inversa.

1.1.1. Compatibilidad entre trivializaciones locales

La aplicación de trivialización para el fibrado tangente es la diferencial de la carta local de la base, es decir, $d\varphi_\alpha : TU_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{R}^m$.

Como la restricción de $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es una $\mathcal{C}^r$-equivalencia sobre $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, se tiene que su diferencial es una $\mathcal{C}^{r-1}$-equivalencia sobre la diferencial $d\varphi_\alpha(TU_\alpha \cap TU_\beta)$ de la restricción de la carta local a $U_\alpha \cap U_\beta$. Esto da la estructura de $\mathcal{C}^{r-1}$ variedad requerida para el espacio total TM del fibrado tangente de una $\mathcal{C}^r$-variedad M.

1.1.2. El espacio total del fibrado tangente como variedad

El espacio total TM del fibrado tangente de una $\mathcal{C}^r$-variedad M tiene estructura asimismo de $\mathcal{C}^r$-variedad. En efecto, para cualquier par (α, β) con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, los cambios de carta en la variedad base M están dados por

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \mid_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} \,:\; \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \ .$$

Por ello, la restricción de la diferencial $d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$ a $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) = \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ da el cambio de carta sobre $T(U_\alpha \cap U_\beta) \simeq_{\mathbb{C}^r} (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m$ (nótese que en esta identificación estamos usando la restricción de la condición de trivialidad local del fibrado a la intersección $U_\alpha \cap U_\beta$).

1.2. Fibrados y fibraciones

La noción de fibrado vectorial ξ sobre una variedad M es una generalización obvia de la de fibrado tangente, reemplazando la fibra (dada por el espacio tangente T_pM en el caso de τM) por un espacio vectorial F de dimensión r *constante*. A esta dimensión se le llama el *rango del fibrado*y se dice que ξ es un fibrado vectorial de rango r sobre M; en particular, el rango del fibrado tangente

τM es siempre igual a la dimensión m de la variedad base M. A pesar de esta mayor generalidad, en este apartado, nos centraremos sobre todo en propiedades del fibrado tangente, dejando para el §2,2 su generalización a fibrados vectoriales más generales.

1.2.1. Fibrado Vectorial

Definición.- Un fibrado vectorial ξ sobre un espacio base B de rango r es una 4-upla $(E(\xi), \pi, B, F)$ dada por

- Un *espacio total* $E(\xi)$ que tiene estructura localmente producto
- Un *espacio base* B que, en esta asignatura, será una C^r-variedad X
- Una C^r-*aplicación proyección* $\pi : E(\xi) \to B$
- Una *fibra genérica* F isomorfa a un espacio vectorial r-dimensional que identificamos con $\mathbb{K}^r$

verificando las *condiciones de compatibilidad* siguientes:

- Para cada punto base $b \in B$ existe un *abierto de trivialización local* $U \subset B$ tal que $\pi^{-1}(U) \sim_{C^r} U \times F$ (lo cual justifica la descripción de $E(\xi)$ como espacio localmente producto)
- La C^r-equivalencia $\pi^{-1}(U) \sim_{C^r} U \times F$ se restringe a un *isomorfismo entre espacios vectoriales* $F_b := \pi^{-1}(b) \simeq_{\mathbb{K}} \{b\} \times F = \{b\} \times \mathbb{K}^r$

Ejemplos de fibrados vectoriales.- Para simplificar supongamos que el espacio base B es

1. El *fibrado trivial de rango* r sobre B que denotamos mediante $\varepsilon_B^r = B \times \mathbb{K}^r$. Ene ste caso, se dice que el fibrado es *globalmente* trivial (no sólo localmente)
2. El *fibrado tangente* $\tau_M = (TM, \pi, M, \mathbb{R}^m)$ es un fibrado vectorial de rango m sobre M cuya fibra en cada punto $\underline{p} \in M$ está generada por $\{\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_m\}$ siendo $(x_1, \ldots, x_m)$ un sistema coordenado local para un entorno de $\underline{p} \in M$
3. El *fibrado cotangente* $\Omega_M^1 = (T^*M, \pi, M, \mathbb{R}^m)$ es un firbado vectorial de rango m sobre M cuya fibra en cada punto $\underline{p} \in M$ está generada por $\{dx_1, \ldots, dx_m\}$ siendo $(x_1, \ldots, x_m)$ un sistema coordenado local para un entorno de $\underline{p} \in M$.

Estas nociones se desarrollan con más detalle en el §2,2

1.2.2. Fibración

La noción de fibración es similar a la de fibrado vectorial, con la siguiente diferencia; La fibra genérica F no tiene por qué ser un espacio vectorial sobre un cuerpo. Puede ser un conjunto discreto de puntos o bien una variedad (curvas o superficies, habitualmente) con características prefijadas:

- Si la *fibra genérica F* es *discreta*, puede tener un número finito ó infinito de puntos como p.e. los asociados a las m raíces de un polinomio complejo de grado m ó las determinaciones del logaritmo de una función compleja, p.e. El estudio del lugar de ramificación asociado a la proyección de esta fibración se realiza en Topología Geométrica. En este caso el grupo de automorfismos de la fibra recibe el nombre de *grupo de monodromía* y tiene gran interés para el análisis de las soluciones de ecuaciones diferenciales que pueden presentar múltiples soluciones, es decir, "ramificar" en torno a los puntos singulares de la ecuación (el caso complejo da lugar a la teoría de Picard-Lefschetz). El caso más simple corresponde a grupos de monodromía dados como representaciones del grupo simétrico S_m de m elementos ó bien al producto de dicho grupo por grupos alternados. Interesa encontrar el espacio recubridor "universal", es decir, con la topología más sencilla asociado a recubrimientos genéricos (ver notas del Curso de Topología Algebraica para detalles adicionales).
- Un caso típico para *fibra genérica F continua* corresponde a las fibraciones por curvas racionales, elípticas ó hiperelípticas en Geometría Algebraica Compleja. Estos objetos son de gran utilidad en la clasificación birracional de superficies algebraicas en Geometría Algebraica. La extensión de este enfoque a dimensión superior presenta aún un gran número de problemas abiertos y no se aborda en el grado de Matemáticas. En los años setenta del siglo XX surgieron asimismo extensiones de gran interés para el caso analítico que dieron lugar a un estudio de deformaciones de variedades analíticas desde el punto de vista de fibraciones sobre curvas o sobre superficies analíticas. Interesa "controlar" el comportamiento de estas deformaciones en términos de grupos infinitesimales que permitan generar de forma automática objetos próximos entre sí. Las aplicaciones de este enfoque a cuestiones de morphing ó de animación automáticas se encuentran aún en un estado preliminar desde el punto de vista matemático.

1.3. Tangente de una Aplicación entre variedades

Usando la noción de fibrado vectorial tangente, se puede globalizar la noción de aplicación tangente y extenderla a la noción de *tangente de una aplicación* $f : M \to N$ entre C^r-variedades no-singulares:

1.3.1. Noción de aplicación tangente

Dada una $\mathcal{C}^r$-aplicación $f : M \to N$ entre $\mathcal{C}^r$-variedades no-singulares, llamamos *aplicación tangente de* f y la denotamos por Tf ó df, al morfismo entre los fibrados vectoriales tangentes, cuya fibra en $p \in M$ es la aplicación tangente d_pf, es decir, la aplicación tangente es el morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} TM & \longrightarrow & TN \\ \pi_M \downarrow & & \pi_N \downarrow \\ M & \longrightarrow & N \end{array}$$

y cuya restricción a las fibras respectivas da d_pf. Llamamos *rango de* f en $p \in M$ al rango de la aplicación lineal $d_{\varphi(p)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$, donde (φ, U) y (ψ, V) son cartas coordenadas locales correspondientes a p y $f(p)$, respectivamente.

1.3.2. Expresión coordenada local

La aplicación tangente $Tf : TM \to TN$ de una aplicación $f \in \mathcal{C}^r(M, N)$ está dada localmente en un abierto $\pi_M^{-1}(U)$ de trivialización de τ_M mediante

$$(Tf)(p, \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x^i}) \ := \ \sum_{i=1}^m a_i (d_pf)(\frac{\partial}{\partial x^i}) \ ,$$

donde $x^1, \ldots, x^m$ son coordenadas locales en un entorno U de $p \in M$, y si denotamos por $y^j := f^j(x^1, \ldots, x^m)$ para $j = 1, \ldots, n$ a las componentes de f en un pequeño entorno de $f(p) \in N$, como (por la regla de la cadena)

$$\frac{\partial}{\partial y^j} \ = \ \sum_{i=1}^m \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \ ,$$

se obtiene que $(T_pf)(\partial/\partial x^j)$ está determinada localmente por la (inversa de la) matriz jacobiana de f en p.

1.4. Secciones de un Fibrado

Las secciones de un fibrado permiten "elevar" al espacio total del fibrado la información contenida en el espacio base del fibrado de forma compatible con la estructura de la base. Empezamos recordando el caso del fibrado tangente como ejemplo que motiva desarrollos posteriores. El tratamiento global de las secciones se realiza por "paquetes", es decir, mediante *referencias*. El enfoque que adoptamos en esta subsección para las referencias utiliza su descripción en términos de espacios homogéneos, siguiendo una aproximación cercana a la descripción de las grassmannianas como espacio homogéneo.

1.4.1. Secciones del Fibrado Tangente

Llamamos *sección del fibrado tangente*TM a cualquier $\mathcal{C}^r$-aplicación $s : M \to TM$ tal que $\pi_M \circ s = id_M$. El ejemplo más elemental corresponde a la *sección nula* dada por la asignación $p \mapsto (p, \underline{0})$. Denotamos mediante $\Gamma(M, TM)$ al conjunto de secciones de TM.

Los *campos vectoriales* (resp. formas diferenciales) presentados en el §1 proporcionan ejemplos de secciones del fibrado tangente (resp cotangente). El producto tensorial de p formas y q campos da lugar a tensores de tipo $(p.q)$ que también son secciones de un fibrado tensorial de tipo $(p.q)$; estos campos resultan de utilidad para representar fenómenos asociados a la mecánica de medios continuos (ver §3) ó a Relatividad General (ver §6). Por lo general, dichos campos se anulan en algún punto (correspondiente al lugar en el que la imagen de la sección corta a la sección nula). Por ello, es infrecuente encontrar secciones que sean siempre no nulas y el concepto siguiente es de utilidad

1.4.2. Secciones de un Fibrado Vectorial

Llamamos *sección local*de un fibrado vectorial ξ a una aplicación $s_U : U \to TU \simeq U \times \mathbb{R}^m$ tal que $\pi \circ s_U = id_U$. La condición de trivialidad local para el fibrado tangente muestra que siempre existen m secciones locales que denotaremos $s_U^{(1)}, \ldots, s_U^{(m)}$ linealmente independientes para cada abierto de trivialización. Pero dichas secciones pueden anularse ó convertirse en linealmente dependientes fuera de dicho abierto. Como existen algunos casos excepcionales donde disponemos de "suficientes" secciones globales siempre no nulas, es conveniente caracterizar dicha situación:

1.4.3. Variedades de Stiefel

Originalmente, una *variedad de Stiefel* $V_k(\mathbb{R}^n)$ se definió de forma conjuntista como la colección de todas las referencias ortonormales generadas por k vectores. Según esta acepción, $V_k(\mathbb{R}^n) := SO(n)/SO(n-k)$ pues

- El grupo $SO(n)$ actúa de forma transitiva sobre las k-referencias ortonormales
- El estabilizador de una k-referencia ortonormal es el subgrupo de las transformaciones ortonormales que dejan invariante el subespacio complementario.

Una extensión inmediata de este enfoque permite reemplazar el grupo especial ortogonal por cualquier otro grupo clásico, es decir, por subgrupos de $GL(n)$ obteniéndose la versión ortogonal $O(n)/O(n-k)$, unitaria $U(n)/U(n-k)$, especial unitaria $SU(n)/SU(n-k)$ y simpléctica $Sp(k)/Sp(n-k)$ para las correspondientes variedades de Stiefel que adquieren una estructura de *espacio homogéneo* como cociente de grupos.

Salvo el caso trivial de la esfera $\mathbb{S}^1$ (con la multiplicación compleja como operación de grupo), en ningún caso, la variedad de Stiefel es un grupo (el denominador no es un subgrupo normal).

Si se pasa al cociente modulo el correspondiente subgrupo (ortogonal / unitario o bien espacial ortogonal / unitario ó bien simpléctico) de $GL(k)$ se obtiene una fibración sobre la grassmanniana descrita inicialmente como $Grass(k, n) := GL(k)/GL(k) \times GL(n-k)$ pero que se restringe a las correspondientes versiones ortogonal, unitaria y simpléctica. Más adelante, veremos que estas fibraciones son ejemplos de "fibrados principales" en los que la fibra es precisamente el grupo por el que se pasa al cociente. Así, p.e., para el grupo lineal general se tiene una *doble fibración*:

$$GL(n) \to GL(n)/GL(n-k) \to GL(n)/(GL(n-k) \times GL(k))$$

con fibra isomorfa a $GL(n-k)$ y $GL(k)$, respectivamente. Estas fibraciones se restringen a las correspondientes variedades de Stiefel y grassmannianas para el caso ortogonal, unitario y simpléctico con las adaptaciones obvias.

Nota.- Las versiones ortogonal, unitaria y simpléctica tienen gran itnerés para cuestiones de optimización: la convergencia en el espacio tangente está garantizada y es más rápida cuando se toma un grupo compacto (o al menos cerrado) en lugar del grupo lineal general. [4]

Ejercicio.- Â¿Tiene sentido hablar de referencias para la acción del grupo especial lineal? Razona la respuesta.

1.5. Variedades paralelizables

Intuitivamente se trata de variedades que tienen una estructura diferencial "trivial", es decir, producto de la variedad base por la fibra general.

1.5.1. Noción de variedad paralelizable

Definición.- Diremos que una variedad M es *paralelizable*si su fibrado tangente es isomorfo al trivial. En términos coordenados, esta condición equivale a que existan m secciones globales *siempre no nulas*que son linealmente independientes.

1.5.2. Ejemplos triviales

1. Cualquier espacio euclídeo de cualquier dimensión sobre cualquier cuerpo es paralelizable como variedad (ver *Ejercicio 1.2.6.7*y §1,4 para detalles y notación relacionada).

[4] Algunas aplicaciones a cuestiones de control y optimización en Robótica usando variedades de Stiefel se pueden ver a partir del módulo 4 de mi Curso sobre Robótica

2. Cualquier espacio de Banach es paralelizable (comprobarlo como ejercicio). De una forma más explícita, si $x^1, \ldots, x^m$ son coordenadas en $\mathbb{R}^m$, las m secciones globales del fibrado tangente $T\mathbb{R}^m$ están dadas por $\xi^i := \partial/\partial x^i$ para $i = 1, \ldots, m$.

3. Representaremos mediante ε^k_M a un fibrado trivial de rango k sobre la variedad M. Para cualquier k el producto cartesiano $M \times \mathbb{R}^k$ es el espacio total del fibrado vectorial trivial de rango k sobre M. Desde el punto de vista de los fibrados tangentes podemos pensar que las variedades paralelizables son "tangencialmente triviales", en el sentido de que el espacio total de su fibrado tangente puede ser expresado como producto de la variedad base por un espacio euclídeo. Este fenómeno es extremadamente infrecuente, pero ocurre para variedades que no son topológicamente triviales como se muestra en el ejemplo siguiente:

4. La circunferencia $\mathbf{S}^1$ es paralelizable: En efecto, un campo vectorial $\xi : \mathbf{S}^1 \to T\mathbf{S}^1$ siempre no nulo está dado por la asignación

$$\xi(x, y) := ((x, y)\ ,\ (-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}))\ =\ ((x, y)\ ,\ (-y, x))$$

(en la primera expresión usamos la descripción del campo como operador y en la segunda como vector en el espacio tangente $T_p\mathbf{S}^1$ para $p = (x, y)$). Si razonamos en términos de la parametrización $\theta \mapsto exp(2\pi i\theta)$, comprobad como ejercicio que la "traslación" de ángulo θ sobre R corresponden a la multiplicación compleja sobre $\mathbf{S}^1$ (visualizarlo también de forma infinitesimal, calculando el campo vectorial imagen de $\partial/\partial\theta$ en S^1).

1.5.3. Producto de variedades paralelizables

Proposición.- Si M y N son variedades paralelizables, entonces $M \times N$ es paralelizable.

Demostración.- En efecto, supongamos que $s^1_M, \ldots, s^m_M$ y $s^1_N, \ldots, s^n_N$, representan un sistema de secciones siempre no nulas y linealmente independientes en cada punto de M y N, respectivamente. Entonces, la colección de $m + n$ secciones

$$(s^1_M, \underline{0}), \ldots, (s^m_M, \underline{0}), (\underline{0}, s^1_N), \ldots, (\underline{0}, s^n_N)$$

proporciona un sistema de secciones linealmente independientes siempre no nulas en cada punto de la variedad $(m+n)$-dimensional $M \times N$ (en el §2,2 veremos otra demostración usando la descripción explícita del fibrado tangente $T(M \times N)$ en términos de la suma de Whitney de los fibrados tangentes).

1.5.4. Toro m-dimensional

Cualquier toro m-dimensional $\mathbb{T}^m := \mathbf{S}^1 \times \ldots \times \mathbf{S}^1$ es paralelizable (aplicar el resultado precedente a $\mathbf{S}^1$ de forma iterada. Visualizar como ejercicio el caso correspondiente a $m = 2$, usando la parametrización compleja de $\mathbb{T}^2$ dada por $(\theta^1, \theta^2) \mapsto (exp(2\pi i\theta^1), exp(2\pi i\theta^2))$.

Ejemplo.- Las funciones definidas propiamente sobre el toro m-dimensional corresponden a funciones múltiplemente periódicas sobre el plano $\mathbb{R}^m$. Por ello, el fibrado tangente del toro permite describir la cinemática básica de fenómenos que presentan comportamientos periódicos (este enfoque se extiende al caso casi-periódico usando argumentos topológicos sobre estabilidad "marginal" en torno a un atractor). El acoplamiento de dos osciladores armónicos simples da lugar a trayectorias (soluciones de curvas integrales) que presentan gran interés sobre el toro 2-dimensional $\mathbb{T}^2$. Mostrar el tipo de trayectorias cuando el desfase entre los períodos asociados a los osciladores es un número racional p/q. Â¿Qué ocurre si el desfase es irracional?

"Ejercicio".- Muestra un modelo básico para el acoplamiento de 2 sectores en Teoría Económica pertenecientes a un mismo marco (Micro, Macro, Internacional, Finanzas). Es bien conocido que el acoplamiento de 3 osciladores da lugar a soluciones que "genéricamente" presentan un comportamiento caótico. Interesa identificar las regiones asociadas a soluciones con comportamiento stable. Para facilitar un comportamiento controlado de la dinámica económica (en cada uno de los marcos anteriores), es necesario identificar los parámetros críticos que pueden dar lugar un comportamiento caótico en las soluciones.

Un argumento tan sencillo muestra que la planificación es absolutamente necesaria para evitar el caos económico. Obviamente, las primeras interesadas en que esto no ocurra son las entidades financieras que practican la especulación a gran escala con micro-movimientos de capitales. Como el valor estimado de la Economía Financiera es aproximadamente el 75 veces el valor de la Economía Real, ello implica que pequeños micro-movimientos diarios generan un beneficio permanente que se paga por parte de todos los ciudadanos. Por ello y para minimizar los efectos de esta nueva piratería que opera con patente de corso de estados y entidades supranacionales (EC, BCE, Banco Mundial, FMI), la primera medida es imponer tasas tipo Tobin que pulvericen las ganancias por los micro-movimientos de capitales; la segunda es llevar a cabo una política fiscal coordinada.

Desde el punto de vista matemático, la cuestión crucial consiste en identificar los parámetros críticos que son cruciales para dotar de estabilidad al sistema. La significación de los parámetros más relevantes del afectan al análisis de las correlaciones entre los comportamientos (cíclicos ó anticíclicos). Formula un modelo simplificado para 3 sectores utilizando políticas anti-cíclicas que estabilicen el sistema, sin dar lugar a una depresión prolongada [5].

[5] Para los detalles ver el Curso sobre Métodos Diferenciales en Teoría Económica

1.5.5. Cadenas cinemáticas en robótica

Un *multicuerpo* en Robótica está compuesto por un número finito de cadenas cinemáticas conectas a un elemento central (eventualmente articulado) al que se llama “cuerpo”. Una de las cadenas cinemáticas puede ser la cabeza. Las operaciones básicas de un multicuerpo son la locomoción y las operaciones de agarre-manipulación de objetos. Ambos tipos de operaciones presentan una elevada dificultad de modelado, control y optimización desde el punto de vista matemático. Por ello, empezamos analizando el caso más simple.

Existe una *jerarquía natural* entre Geometría, Cinemática (estudio de tasas de variación de orden bajo de “cantidades“ con independencia de las fuerzas o momentos que los producen) y Dinámica (estudio de movimientos y de las causas que los producen). Esta jerarquía se puede expresar desde el punto de vista matemático en términos de variedades, del fibrado tangente y del fibrado tangente del tangente ... o bien pasando al dual. Esta descripción presupone que la variedad base M es suave, algo que en general no es cierto. Por ello, resulta más apropiado considerar que M es una variedad analítica (con borde) y adaptar el lenguaje de los k-jets (extensiones sucesivas de orden k) para las funciones o funcionales a definir sobre los espacios matemáticos relevantes.

Los espacios matemáticos relevantes para la Robótica son los espacios de configuraciones $\mathcal{C}$ y de trabajo $\mathcal{W}$. La existencia de simetrías locales para los movimientos a realizar por un robot, permite describir ambos espacios como subvariedades analíticas de un producto de grupos asociados a los tipos de movimientos permitidos por cada junta (prismática, rotacional, esférica) de un robot $\mathcal{R}$. La transmisión de movimientos de las juntas al efectos final de cada cadena cinemática se representa mediante una aplicación de transmisión $\tau : \mathcal{C} \to \mathcal{W}$ sobre cuyas extensiones se pueden reformular la Cinemática y la Dinámica del robot.

La arquitectura mecánica de una cadena cinemática planar en Robótica está formado por una colección de segmentos y juntas rotacionales. Un espacio de configuraciones ideal estaría dado por un toro m-dimensional $\mathbb{T}^m$ donde m es el número de juntas rotacionales. Habitualmente, no se permite el alineamiento de dos componentes consecutivas (generan una singularidad en el espacio de trabajo que dificulta el control en el espacio de configuraciones). Por ello, una versión más apropiada del espacio de configuraciones es una subvariedad parametrizada por $]-\pi/2, \pi/2[^m$.

Una cuestión importante a resolver en relación con el control de este tipo de mecanismos concierne no tanto a las singularidades de este espacio (en el borde, a lo sumo), sino al análisis de las singularidades para la cinemática ó la dinámica asociadas a la realización de las tareas que están asociadas a la matriz jacobiana de τ o a las ecuaciones matriciales que controlan la dinámica tanto en la formulación diferencial (Lagrange-Hamilton) como en la versión integral (Newton-Euler).

Práctica avanzada: Detalla las singularidades que pueden aparecer asociadas a la interacción con el entorno en operaciones de agarre y manipulación ó bien de locomoción para una cadena cinemática de N juntas rotacionales

2. Fibrados Tangentes de Esferas

En esta sección se analiza el fibrado tangente de una esfera m-dimensional $\mathbb{S}^m$, discutiendo las diferentes situaciones que pueden presentarse en relación con diferentes aplicaciones.

Sea $\mathbf{S}^n$ la esfera de radio unidad en $\mathbb{R}^{n+1}$. Es fácil comprobar que si n es *impar*, entonces su fibrado tangente $T\mathbb{S}^n$ tiene una sección siempre no nula. En efecto, si $n = 2m-1$, entonces $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{2m} \simeq \mathbb{C}^m$, por lo que tomamos como sección la aplicación dada por la *multiplicación compleja*por $i = \sqrt{-1}$.

2.1. Fibrado tangente de la circunferencia

En esta subsección se describe el fibrado tangente y el fibrado normal a la circunferencia y se presentan algunas extensiones relacionadas con fibraciones de circunferencias.

2.1.1. La circunferencia es paralelizable

Lema.- La circunferencia $\mathbb{S}^1$ es *paralelizable*, es decir, su fibrado tangente es isomorfo al fibrado trivial $\varepsilon^1_{\mathbb{S}^1} := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ sobre $\mathbb{S}^1$.

Demostración.- En efecto, si $n = 1$, una sección siempre no nula del fibrado tangente $\tau\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{S}^1$ está dada por la asignación

$$s : \mathbf{S}^1 \to T\mathbf{S}^1 \ \mid \ s(\underline{p}) = s(x^1, x^2) = (\underline{p}, (-x^2, x^1)) \ ,$$

que está representada gráficamente por un giro de $\pi/2$ en el plano real $\mathbb{R}^2$, es decir, por la multiplicación $\underline{p} \mapsto i\underline{p}$ en coordenadas complejas $z = x + iy$ correspondientes a la recta $\mathbb{C}^1$ cuyo modelo real es $\mathbb{R}^2$. Nótese que la multiplicación compleja por $i = \sqrt{-1}$ corresponde a la raíz imaginaria de 1 sobre $\mathbb{C}$ como álgebra de división sobre $\mathbb{R}$.

La parametrización local dada por el ángulo polar θ muestra que $\partial_\theta := \partial/\partial\theta$ es un campo vectorial que, como sección del fibrado tangente $\tau\mathbb{S}^1$, genera el espacio tangente en cada punto [6].

Por dualidad, la 1-forma diferencial $d\theta$ dual del campo ∂_θ es el generador del espacio cotangente $(T_p\mathbf{S}^1)^\nu = Hom_{\mathbb{R}}(T_p\mathbf{S}^1, \mathbb{R})$, dual del espacio tangente $T_p\mathbf{S}^1$. A dicho espacio cotangente se le denota también mediante $\Omega_{\mathbf{S}^1,p}$

Ejercicio.- Verifica que la asignación $\underline{p} \mapsto i\underline{p}$ define un difeomorfismo sobre la fibra.

Nota.- Más adelante, veremos que este resultado se demuestra también usando que $\mathbf{S}^1$ es un grupo de Lie, es decir, un grupo con estructura de C^∞-variedad (con la multiplicación compleja como operación), en el que la operación de grupo

[6] Aquí estamos utilizando la equivalencia entre las descripciones del espacio tangente en términos de derivaciones y en términos de vectores tangentes a las curvas que tienen un contacto de orden 2 en cada punto

es una aplicación de clase $\mathcal{C}^\infty$. Usando cartas locales es fácil ver que la asignación que se ha definido más arriba es un representante local de la aplicación inversión (para los detalles ver p.e. [A+M+R], p.164).

2.1.2. Fibrado normal a la circunferencia

Se considera la circunferencia $\mathbb{S}^1$ con el embebimiento habitual en $\mathbb{R}^2$, es decir, dadacomo

$$\mathbb{S}^1 \; = \; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; | \;\; x^2+y^2=1\}$$

El espacio normal a $\mathbb{S}^1$ en $p \in \mathbb{S}^1\mathbb{R}^2$ se define como el cociente

$$N_p\mathbb{S}^1 \; := \; T_p\mathbb{R}^2/T_p\mathbb{S}^1 \; \simeq \; \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^1 \; \simeq \; \mathbb{R}^1$$

donde la recta normal en $p \in \mathbb{S}^1$ es $\overline{Op}$. Esta definición permite escribir una sucesión exacta de espacios vectoriales

$$0 \to \; T_p\mathbb{S}^1 \to \; T_p\mathbb{R}^2 \to \; N_p\mathbb{S}^1 \to \; 0$$

La unión $\cup_{p\in M} N_p\mathbb{S}^1$ de los espacios normales es un espacio topológico al que se dota de la estructura de C^r-variedad usando las mismas cartas que dan la trivialización para el fibrado tangente $\tau\mathbb{S}^1$. Por consiguiente, el espacio total $N\mathbb{S}^1$ del fibrado normal que se define como el cociente

$$\mathcal{N}\mathbb{S}^1 \; := \; \cup_{p\in\mathbb{S}^1} N_p\mathbb{S}^1 \; = \; (\tau\mathbb{R}^2) \mid_{\mathbb{S}^1} /\tau\mathbb{S}^1 \; =: \; e^*(\tau\mathbb{R}^2)/\tau\mathbb{S}^1$$

del fibrado tangente $(\tau\mathbb{R}^2) \mid_{\mathbb{S}^1}$ del espacio ambiente restringido a la circunferencia $\mathbb{S}^1$ módulo el fibrado tangente $\tau\mathbb{S}^1$ a la circunferencia, donde $e : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ es el embebimiento canónico de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ en el plano $\mathbb{R}^2$.

Lema.- El fibrado normal $\mathcal{N}\mathbb{S}^1$ a la circunferencia es isomorfo al trivial $\varepsilon^1_{\mathbb{S}^1}$

Demostración.- Como $\mathcal{N}\mathbb{S}^1$ es un fibrado vectorial de rango 1, basta encontrar una sección siempre no nula que está dada por $s(p) = (x,y)$ donde estamos cometiendo el abuso de notación de identificar el punto $p \in \mathbb{S}^1$ de coordenadas (x,y) en $\mathbb{R}^2$ con el vector $\mathbf{v} \in V \simeq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ de componentes (x,y).

Aunque todavía no se ha introducido la noción de sucesión exacta de fibrados vectoriales, las igualdades anteriores se "empaquetan" de forma simbólica, diciendo que se tiene una sucesión exacta de fibrados vectoriales que escribimos ahora como

$$0 \to \; \tau\mathbb{S}^1 \to \; e^*\tau\mathbb{R}^2 \to \; \mathcal{N}\mathbb{S}^1 \to \; 0$$

donde $e : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ es el embebimiento canónico de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^2$ dado por la ecuación $x^2+y^2=1$ de la circunferencia [7]

[7] Nótese que cualquier curva cerrada simple (sin auto-intersecciones) es topológicamente equivalente a la circunferencia $\mathbb{S}^1$, por lo que es necesario identificar el embebimiento de la circunferencia en el plano.

A pesar del carácter casi-trivial de la descripción anterior, nótese que el primer término no nulo $\tau\mathbb{S}^1$ es un dato intrínseco (es decir, independiente del embebimiento elegido), mientras que el último término no-nulo $\mathcal{N}\mathbb{S}^1$ es un dato extrínseco (es decir, asociado al embebimiento dado en este caso por la aplicación e). Por consiguiente, (la extensión de) la sucesión exacta precedente muestra una relación estructural entre la geometría intrínseca y la extrínseca de una variedad.

Ejercicio.- Construir un "collar" para la circunferencia de radio unidad.

2.1.3. Banda de Moebius extendida

La *banda de Moebius extendida* B_M se obtiene como paso al cociente

$$B_M \ := \ [0,1] \times \mathbb{R}/\sim \quad \textbf{donde} \quad (0,t) \sim (1,-t)$$

Por consiguiente, la extensión B_M de la banda de Moebius es un fibrado lineal sobre $\mathbb{S}^1$ que es no-trivial. La no trivialidad se demuestra encontrando una función definida sobre la banda de Moebius que toma valores opuestos al completar una vuelta, es decir,

$$s(\underline{p}) = -s(-\underline{p})$$

donde $\underline{p}$ es un elemento sobre la fibra. En virtud del Teorema del Valor Medio, como la sección es una aplicación continua, al tomar valores con signo positivo y negativo sobre un punto y su opuesto, debe existir un punto intermedio sobre el que se anula. Este argumento se extiende más adelante para demostrar que el fibrado tautológico γ_m^1 (que a cada punto $\underline{p} = [\ell]$ le asocia el subespacio lineal 1-dimensional $\ell \subset V^{m+1}$ del que procede) sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}^m$ es no-trivial.

Nótese que la circunferencia "central" de la banda de Moebius es la imagen de la sección nula. Si se considera una orientación sobre la recta correspondiente a la fibra, al cabo de una vuelta se observa que la orientación de la recta es la contraria a la inicial; en particular, al cabo de dos vueltas se obtiene la misma orientación que la de partida. De una manera más sintética, se tiene un recubrimiento de dos hojas que, analíticamente, se puede interpretar en términos de la aplicación recubridora de dos hojas $\varphi(z) = z^2$

2.1.4. Curvas simples y fibrados de circunferencias

Cualquier curva cerrada simple (sin autointersecciones) es topológicamente equivalente a una circunferencia; en particular, cualquier silueta plana es equivalente a $\mathbb{S}^1$. En problemas de Reconocimiento de objetos (a partir de sus siluetas), interesa introducir una métrica sobre el conjunto de siluetas para evaluar la "proximidad entre formas", para lo cual se utiliza la aplicación inducida por un "remapeado conforme" sobre la curva de la métrica definida sobre la circunferencia [8].

Una extensión de los fibrados vectoriales está dada por los fibrados de circunferencias. Dos ejemplos triviales corresponden a

- El cilindro $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$ (fibrado tangente a la circunferencia) que se puede interpretar como un fibrado de circunferencias sobre $\mathbb{R}^1$.
- El toro 2-dimensional $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ que es un fibrado trivial de circunferencias sobre $\mathbb{S}^1$.

La existencia de fibrados de circunferencias que no son triviales ya era conocida por Dirac (1931) que les etiquetó como *monopolos magnéticos*. En este caso, interesa calcular invariantes topológicos (clases características) asociados a estos monopolos que permitan distinguir entre diferentes configuraciones [9]. En este caso, dichos invariantes topológicos reciben el nombre de "número cuántico geométrico".

La noción de fibrado de circunferencias se extiende a fibrados de esferas. Para desarrollar este enfoque, es conveniente disponer de más información sobre fibrados tangentes a esferas, tópico que se aborda en las próximas subsecciones.

2.2. Fibrado tangente de la esfera 3-dimensional

Las ventajas asociadas a la circunferencia $\mathbb{S}^1$ como variedad paralelizable, plantean la cuestión de qué otras esferas $\mathbb{S}^k$ son paralelizables. El Teorema del Punto Fijo de Brouwer muestra que $\mathbb{S}^2$ no es paralelizable; por ello, el caso siguiente corresponde a la esfera 3-dimensional $\mathbb{S}^3$ que sí resulta ser paralelizable. Para ello, basta encontrar tres campos vectoriales linealmente independientes siempre no-nulos en cada punto. En esta subsección se muestra este resultado y se describen algunas propiedades básicas que tienen gran interés para aplicaciones de este resultado.

Una gran ventaja de este caso radica en la analogía entre la acción de los 3 campos vectoriales y la multiplicación cuaterniónica asociada los generadores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ de $\mathbb{H}$ como $\mathbb{R}$-álgebra de división sobre $\mathbb{R}$. El Algebra Geométrica ó de Clifford proporciona el marco teórico apropiado para un tratamiento unificado de estas cuestiones [10].

[8] Estos tópicos se abordan en capítulos avanzados del módulo 4 del CEViC

[9] En el módulo sobre Topología Diferencial Global se lleva a cabo un estudio sistemático de clases características y algunos de sus significados más relevantes

[10] Un enfoque moderno que incluye aplicaciones de Álgebras de Clifford a Robótica, Visión Computacional y Cálculo Neuronal se puede ver en E-Bayro-Corrochano: *Geometric Computing for Perception-Action Systems*, Springer-Verlag, 2001

2.2.1. La esfera 3-dimensional como variedad paralelizable

Proposición.- La esfera $\mathbb{S}^3$ es una variedad paralelizable, es decir, su fibrado tangente $\tau\mathbb{S}^3$ es isomorfo al fibrado trivial $\varepsilon^3_{\mathbb{S}^3} := \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{S}^3$.

En efecto, las asignaciones

$$s_1(\underline{p}) := (x^2, -x^1, x^4, -x^3)\ ,\ s_2(\underline{p}) := (x^3, -x^4, x^1, -x^2)\ ,\ s_3(\underline{p}) := (x^4, -x^3, x^2, -x^1)\ ,$$

definen tres secciones $s_i : \mathbf{S}^3 \to T\mathbf{S}^3$ siempre no nulas del fibrado tangente $\tau\mathbb{S}^3$ (existen otras formas de expresar 3 campos siempre no-nulos pero éstas son las equivalentes al producto cuaterniónico que se describe maÂ´s abajo)

Recordemos que el campo vectorial que trivializa el fibrado tangente a la circunferencia $\tau\mathbb{S}^1$ se representa en el plano cartesiano asociado a la representación real de $\mathbb{C}$ como el plano $\mathbb{R}^2$ con la estructura (casi-)compleja dada por la multiplicación compleja por $i = \sqrt{-1}$. Análogamente, los 3 campos vectoriales s_1, s_2 y s_3 que trivializan el fibrado tangente a la 3-esfera $\tau\mathbb{S}^3$ se representan mediante la multiplicación cuaterniónica en $\mathbb{H}$ por los generadores $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

Desde el punto de vista algebraico, nótese que la multiplicación cuaterniónico por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ corresponden al producto por las raíces imaginarias cuaterniónicas de 1 sobre $\mathbb{H}$ como álgebra de división 4 dimensional sobre $\mathbb{R}$ (la otra raíz real deja invariante el punto).

Nótese que la esfera $\mathbb{S}^3$ parametriza los cuaterniones de norma unidad que es topológicamente equivalente a los cuaternios imaginarios puros (es decir, cuya componente real es nula).

2.2.2. Una nota sobre cuaterniones

En este apartado siguiente se recuerdan las propiedades básicas de los generadores de $\mathbb{H}$ como álgebra de división sobre $\mathbb{R}$.

El conjunto de los cuaternios ó cuaterniones $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ está dado como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ con las propiedades

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$$

y de antisimetría

$$\mathbf{i}.\mathbf{j} = -\mathbf{j}.\mathbf{i}\ ,\ \mathbf{i}.\mathbf{k} = -\mathbf{k}.\mathbf{i}\ ,\ \mathbf{j}.\mathbf{k} = -\mathbf{k}.\mathbf{j}$$

La estructura como e.v. 4-dimensional sobre $\mathbb{R}$ permite expresar cada cuaternión $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ (Hamilton) como un vector 4-dimensional

$$\mathbf{h} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$$

con una *componente real* q_0 y *tres componentes imaginarias* (q_1, q_2, q_3). Para los *cuaterniones imaginarios puros* de norma unidad se tiene una regla cíclica para la multiplicación cuaterniónica que escribimos como

$$q_1 q_2 = q_3 \;\Rightarrow\; q_2 q_3 = q_1 \;\Rightarrow\; q_3 q_1 = q_2$$

que junto a las propiedades de anti-conmutatividad del producto cuaterniónico permite escribir

$$q_1 \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ -q_0 \\ q_3 \\ -q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

que corresponde a la descripción del primer campo vectorial tangente a la esfera $\mathbb{S}^3$ presentado más arriba (verificad las otras multiplicaciones por q_2 y q_3 como ejercicio. Nótese que, a diferencia de la multiplicación compleja, la multiplicación cuaterniónica no es conmutativa, pero sí es asociativa.

La estructura como $\mathbb{R}$-espacio vectorial de $\mathbb{H}$ permite definir una norma sobre $\mathbb{H}$ de la forma usual, es decir,

$$|\mathbf{h}|^2 \;:= a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Descomponiendo un cuaternión $\mathbf{h}$ en su parte escalar r y su parte vectorial $\mathbf{v}$, la adición se reescribe como

$$(r_1,\ \mathbf{v}_1) + (r_2,\ \mathbf{v}_2) = (r_1 + r_2,\ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

mientras que la multiplicación se reescribe de forma más compacta como

$$(r_1,\ \mathbf{v}_1)(r_2,\ \mathbf{v}_2) = (r_1 r_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, r_1 \mathbf{v}_2 + r_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$$

donde $\cdot$ es el producto escalar y $\times$ es el producto vectorial. Esta notación justifica la introducción de un *producto de Clifford* con una componente escalar y otra vectorial afectando a escalares y bivectores.

Los cuaterniones de norma unidad se pueden interpretar como rotaciones en el espacio ordinario $\mathbb{R}^3$ (Clifford, 1874). La expresión de la composición de rotaciones en el espacio ordinario mediante producto de cuaterniones permite evitar errores de redondeo asociados a la utilización de funciones trigonométricas. Por ello, esta aproximación es la más apropiada para sus aplicaciones en Ingeniería (Ball, 1900).

Ejercicio.- Comprobar que la multiplicación cuaterniónica por los generadores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ corresponde a la acción de las secciones s_1, s_2, s_3 que trivializan el fibrado tangente a la 3-esfera.

2.2.3. Una nota avanzada sobre Geometría No-Conmutativa

Nótese que, a diferencia de la multiplicación compleja ó la cuaterniónica no es asociativa. Desde los años ochenta del siglo XX ha habido un gran desarrollo de la Geometría No-Conmutativa con diferentes aplicaciones a aspectos avanzados de la Mecánica Cuántica. Una geometrízación ingenua se presenta en el último capítulo de este módulo en el que se superpone una estructura de variedad riemanniana infinito-dimensional sobre el espacio de Hilbert que parametriza los estados (soluciones de ecuaciones estructurales); en este caso, el análisis espectral se aborda como un problema de valores propios (discretos) asociados a los observables del sistema. Más allá del carácter no conmutativo de acciones de grupos clásicos, la Geometría No Conmutativa tiene múltiples motivaciones procedentes de

- *Enfoque algebraico:* La acción del *grupo unitario simpléctico* sobre *espacios de Hilbert* que permite unificar las simetrías internas del modelo estándar con las gravitaciones.
- *Enfoque infinitesimal:* El estudio de los *automorfismos* de álgebras no-conmutativas de coordenadas para variedades Riemannianas spinoriales M construidas sobre un espacio no-conmutativo F.
- *Enfoque analítico:* Se puede obtener un acoplamiento entre el Lagrangiano del modelo estándar y la interacción gravitatoria a artir de invariantes espectrales asociadas a las fluctuaciones internas para la métrica producto construida sobre $M \times F$
- *Enfoque variacional:* El desarrollo asintótico del funcional de acción espectral (principio variacional que extiende los funcionales de acción tipo Yang-Mills) se puede describir en términos de los espacios de moduli para los operadores de Dirac en el marco no-conmutativo.

La formulación matemática de los aspectos físicos de estos enfoques se comenta en los últimos capítulos del módulo 7.

Desde un punto de vista formal básico y por analogía con el enfoque desarrollado en GAGA (basado en esquemas), en este caso se trata de caracterizar un espacio no-conmutativo en términos de propiedades de las C^*-álgebras asociadas. Este tópico requiere conocimientos avanzados de Geometría Algebraica; los detalles se pueden consultar en la literatura especializada [11].

2.3. Fibrado tangente de la esfera 7-dimensional

En esta subsección se extienden los argumentos presentados en la subsección anterior al caso de la esfera 7-dimensional $\mathbb{S}^7$ que suponemos inicialmente embebida en $\mathbb{R}^8$ de la forma habitual. Junto con la circunferencia $\mathbf{S}^1$ y la esfera $\mathbf{S}^3$, se tiene que $\mathbf{S}^7$ es también paralelizable, propiedad que se comenta en el primer apartado. La demostración de que son las únicas esferas paralelizables es bastante más difícil y es equivalente a demostrar que sólo hay tres álgebras

[11] La mejor referencia es el libro de A.Connes: *Non-commutative Geometry* para el que existe una versión libre en pdf; ver http://www.alainconnes.org/docs/book94bigpdf.pdf

de división no triviales sobre $\mathbb{R}$ (aparte de ella misma) dadas por los complejos $\mathbb{C}$, los cuaterniones $\mathbb{H}$ (Hamilton) y los octoniones $\mathbb{O}$ (ver más abajo). [12]

La forma de comprobar que $\mathbb{S}^7$ es paralelizable es similar a la utilizada para $\mathbb{S}^3$, es decir, construye de forma explícita el producto octoniónico. Esta construcción y la posibilidad de realizar diferentes tipos de productos asociados a campos (con sus correspondientes soluciones como curvas que dan diferentes PL-parametrizaciones locales) motivó a finales de los cincuenta el estudio de diferentes estructuras diferenciables sobre la esfera $\mathbb{S}^7$.

Una primera consecuencia fue la construcción de *esferas exóticas*, es decir, con estructuras diferenciables que no son topológicamente equivalentes a la estándar. La forma más simple para distinguir unas de otras consiste en identificar invariantes para la PL-estructura que permiten distinguir las estructuras diferenciables entre sí. Una extensión de este argumento permitió demostrar a Milnor (1956) que sobre $\mathbb{S}^7$ hay al menos 7 estructuras diferenciables no-equivalentes entre sí. Poco tiempo después, el propio Milnor (1963) demostró que hay exactamente 28 estructuras diferenciables no-equivalentes.

Las aplicaciones de las álgebras de división asociadas a los complejos $\mathbb{C}$ aparecen en múltiples contextos desde comienzos del s.XIX en relación con la formulación de diferentes propiedades de la electricidad (para representar la fase, p.e.) y el magnetismo (para representar los efectos inducidos por cambios de fase).

Las aplicaciones más conocidas de las álgebras asociadas a los cuaterniones $\mathbb{H}$ están relacionadas con la descripción de movimientos en el espacio con multitud de ramificaciones hacia mecánica de sólidos rígidos y, más recientemente, de cuerpos articulados en Robótica o en cualquier dispositivo que requiera actualizar la orientación en el espacio-tiempo [13].

Sin embargo, las aplicaciones de los octoniones se han hecho esperar más tiempo a pesar de haber sido descritos a mediados del s.XIX por Cayley en relación con las raíces de -1. Una primera aproximación surgió de un desarrollo puramente teórico en relación con la construcción de campos octoniónicos, que se aborda en el segundo apartado.

2.3.1. La esfera 7-dimensional como variedad paralelizable

Proposición.- La esfera $\mathbf{S}^7$ es una variedad paralelizable, es decir, su fibrado tangente es isomorfo al fibrado trivial $\varepsilon^7_{\mathbb{S}^7} := \mathbb{S}^7 \times \mathbb{R}^7$ sobre $\mathbb{S}^7$.

Ejercicio.- Calcular 7 campos vectoriales l.i. del fibrado tangente $\tau\mathbb{S}^7$ de la esfera $\mathbb{S}^7$ que son siempre no nulos (*Indicación:* construir los octoniones $\mathbb{O}$

[12] Un *álgebra de división real* es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial que es también un anillo con elemento identidad con respecto a la multiplicación en el que la ecuación $ax = b$ se puede resolver de forma única para x salvo que $a = 0$.

[13] Ver http://history.hyperjeff.net/hypercomplex para una relación de los hitos más significativos en relación con las álgebras de división construidas sobre los reales, también llamadas números hipercomplejos.

como espacio vectorial 7-dimensional sobre $\mathbb{R}$ y mostrar que las 7 secciones corresponden a la multiplicación de octoniones)

2.3.2. Campos vectoriales octoniónicos

proposición.- Si $n = 8m - 1$, entonces $T\mathbf{S}^n \simeq \varepsilon^7_{\mathbb{S}^7} \oplus \alpha$, donde $\varepsilon^7_{\mathbb{S}^n}$ es el fibrado vectorial trivial de rango 7 sobre $\mathbf{S}^n$ y α representa ahora un fibrado vectorial de rango $n - 7$

Análogamente a los dos casos anteriores, las 7 secciones siempre no nulas que describen este isomorfismo, corresponden a la *multiplicación octoniónica.*

Ejercicio.- Verifica la afirmación anterior.

Los resultados relativos a isomorfismo entre fibrados como el mencionado más arriba proporcionan una motivación para la clasificación de fibrados vectoriales sobre variedades o, con más generalidad, espacios topológicos. La *K-Teoría* tiene como objetivo la descripción de clases de fibrados (ó con más generalidad, fibraciones) definidas sobre espacios. Para ello, utiliza propiedades relativas a los invariantes topológicos asociados a los grupos estructurales de los fibrados, tales como el cálculo de grupos de homotopía de dichos grupos. Los Teoremas de Periodicidad de R.Bott proporcionan el primer paquete de resultados importantes para estos tópicos que se abordan en el módulo 5 de Topología Algebraica. Más recientemente, a lo largo de los noventa se han descubierto algunas conexiones inesperadas con Geometría No-Conmutativa en un contexto infinito-dimensional asociado a la cuantización de campos.

Nota.- A pesar de ser paralelizable, la esfera $\mathbb{S}^7$ tiene 28 estructuras que no son equivalentes entre sí., (Milnor, 1963?). Las dimensiones sobre $\mathbb{R}$ que juegan un "papel especial" son 2, 4, 8 y 24; esta última requiere una justificación relacionada con recubrimientos del grupo diedral D_4 que pueden ser reformuladas en términos del grupo asociado a las singularidades simples de tipo E_8 (asociado al grupo de simetrías del dodecaedro o dualmente del icosaedro); estos tópicos son bastante más avanzados y se abordan al final del último módulo de Topología Diferencial sobre Singularidades de Aplicaciones [14].

De forma independiente y bastante sorprendente, la ruptura de simetrías del primer grupo excepcional E_6 (asociado al grupo de simetrías del hexaedro o dualmente del octaedro) da lugar a la aparición de un espacio lorentziano con métrica $(3, 1)$ asociado a la aplicación momento. En este marco y de forma nuevamente sorprendente, el enfoque infinitesimal comentado más arriba es insuficiente (dificultades para controlar la ruptura de simetrías desde el punto de vista complejo) y es necesario trabajar directamente con el grupo. En [Man06] se pueden encontrar muchos más detalles y conexiones inesperadas de los octoniones con el grupo excepcional E_6 (que aparecen en casi todos los contextos

[14] El punto de vista infinitesimal se desarrolla en la tesis de Tomás Pérez en relación con cuestiones de determinación y operadores nilpotentes que conservan la órbita por la acción del grupo de difeomorfismos

de Matemáticas) y algunos aspectos de la Física de Partículas vinculados a los spinores de Cayley [15]

2.3.3. Algunas aplicaciones de los octoniones a Física Teórica

Desde finales de los años ochenta se han encontrado aplicaciones de los octoniones en teoría de cuerdas, relatividad especial y lógica cuántica. Todas ellas afectan a cuestiones muy abstractas de Física Teórica y, de una u otra forma, están relacionadas con fenómenos de "ruptura de simetrías" (para la falta de conmutatividad propia de los cuaterniones) ó bien de la ausencia de observabilidad (para las álgebras no asociativas) [16]

De una manera un tanto vaga (ver [Gun73] para más detalles [17]) la observabilidad cuántica está relacionada con la asociatividad de $\mathbb{C}$, mientras que la no-observabilidad estaría relacionada con la no-asociatividad de $\mathbb{C}$. Así, p.e. las quarks no se pueden "ver", pero son detectables, en términos de los efectos que producen. De ahí que sea tan difícil verificar la aplicabilidad del formalismo vinculado a las álgebras no-asociativas [18]

Desde un punto de vista algebraico más "clásico", recordemos que los aspectos básicos para las interacciones electromagnética, débil y fuerte están controlados por representaciones de los grupos estructurales $U(1)$ (complejos unitarios), $SU(2)$ (cuaterniones unitarios) y $SU(3)$, respectivamente. El formalismo variacional se basa en minimizar una integral de acción (asociada al funcional de Yang-Mills) correspondiente a la curvatura F_A (como generalización del funcional de energía) sobre el espacio de conexiones ω definidas sobre un fibrado principal. De acuerdo con la observación precedente, la unificación propuesta por el modelo estándar tiene como grupo estructural (un subgrupo de) el producto $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

Las Teorías de Gran Unificación proponen diferentes modelos de cuantización para la interacción gravitatoria que deben ser compatibles con la formulación anterior. Esta tarea se ha revelado mucho más difícil de lo que parecía en un principio y hay diferentes formas de aproximar el problema. La más próxima al enfoque adoptado en este módulo es la algebraica que utiliza propiedades de los grupos de Lie G o de sus álgebras de Lie $\mathfrak{g}$, extendidas inicialmente a operadores autoadjuntos sobre espacios de Hilbert.

Uno de los aspectos algebraicos más fascinantes en relación con los tópicos presentados en el capítulo 5 consiste en los isomorfismos entre el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{A})$ para las álgebras de división $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$, por un lado y el álgebra

[15] Ver C.A.Manogue and T.Dray: "Octonions, E_6, and Particle Physics" in http://www.physics.usu.edu/wheeler/fieldtheory/octonions/manoguedraye6.pdf

[16] Posiblemente, la fuente más completa de documentación sobre octoniones es http://www.7stones.com/Homepage/AlgebraSite/algebra0.html

[17] [Gun73] M. GÃ$\frac{1}{4}$naydin, F.GÃ$\frac{1}{4}$rsey: "Quark Structure and Octonions", *J. Math. Phys.* 14, 1651, 1973.

[18] Ver no obstante la última parte de la subsección siguiente dedicada al multiverso.

de Lie $\mathfrak{so}(n,1$ del grupo de Lorentz $SO(n,1)$ para $n=2,3,5$ y 9, respectivamente [19].

Sin embargo, la analogía señalada más arriba entre $U(1)$ con los complejos unitarios (para la interacción electromagnética) y de $SU(2)$ con los cuaterniones unitarios (para la interacción débil), se rompe con $SU(3)$ (para la interacción fuerte) que *no corresponde* a los octoniones unidad, pues la falta de asociatividad de $\mathbb{O}$ impide que sea un grupo. Sin embargo, el grupo de los automorfismos de los octoniones (como espacio vectorial) es el grupo excepcional G_2 que contiene a $SU(3)$ y que es una singularidad no-simple extendiendo la clasificación de las singularidades excepcionales: E_6, E_7, E_8 (simples), F_4 y G_2.

Para pasar de G_2 (automorfismos de octoniones) a $SU(3)$ (grupo estructural para la interacción fuerte) Manogue sugiere seleccionar un octonión imaginario unidad, obteniendo una copia de $\mathbb{C}$ dentro de $\mathbb{O}$. De este modo se obtiene una copia de $\mathfrak{s}\ell(2),\mathbb{C})$ dentro de $\mathfrak{s}\ell(2),\mathbb{O})$, que desde el punto de vista real, corresponde a seleccionar una copia de $\mathfrak{so}(3,1)$ dentro de $\mathfrak{so}(9,1)$ actuando sobre un espacio de Lorentz 10-dimensional con métrica $(9,1)$. En el capítulo 5 del módulo 7 se muestra que 10 es la "dimensión mágica" para las supercuerdas que es uno de los modelos más consistentes para las Teorías de Gran Unificación (GUT).

La "contracción" de un espacio 10-dimensional a uno 4-dimensional presenta múltiples aspectos desconocidos que requieren investigaciones adicionales desde diferentes puntos de vista. Una aproximación en el contexto de la Geometría Algebraica lleva a considerar las 3-folds con singularidades ordinarias que proceden de proyectar threefolds regulares en espacios proyectivos de dimensión al menos 7 [20]

2.4. Práctica: Caracterización de las Esferas Paralelizables

El propósito de esta práctica consiste en explorar más a fondo algunos de los tópicos que relacionan las álgebras de división con la Física de Partículas de cara a la comprensión del terreno en el que están planteadas algunas de las opciones más relevantes para las Teorías de Gran Unificación, con especial atención a supercuerdas. Las representaciones de los grupos de Lie estructurales para cada una de las interacciones del modelo estándar y y de sus versiones infinitesimales juega un papel fundamental.

Sin embargo, la cuantización del enfoque anterior presenta dificultades considerables que aún no han sido resueltas. Si se recurre a modelos inicialmente homogéneos en espacios de elevada dimensión, la comprensión de este tipo de resultados requieres desarrollar modelos que incluyan la ruptura de simetrías que permiten pasar de un modelo a otro o desglosar los diferentes tipos de

[19] Ver la fascinante nota http://math.ucr.edu/home/baez/week104.html para detalles

[20] Estos tópicos se abordan en el módulo 6 de Geometría Algebraica; el estudio de las singularidades genéricas que aparecen al proyectar fue realizado por JF entre 1988 y 1991, incluyendo fórmulas de Puntos Múltiples y una demostración de una cota débil tipo Castelnuovo-Mumford.

interacción a partir de un tronco común. Los modelos basados en grupos clásicos asociados a las interacciones del modelo estándar no permiten recuperar la descripción de fenómenos gravitatorios en un marco cuantizado.

Curiosamente y tal como se ha comentado más arriba, la introducción de singularidades excepcionales (procedentes inicialmente de grupos discretos de simetrías de los poliedros regulares en el espacio) proporciona claves inesperadas para la unificación desde el punto de vista algebraico. La comprensión de estos fenómenos requiere revisar algunos fenómenos que aparecen tanto desde el punto de vista infinitesimal (ligados a campos sobre esferas paralelizables o bien a álgebras de Lie de grupos clásicos) como desde el punto de vista algebraico en el marco de diferentes tipos de spinores (como casos particulares de álgebras de Clifford que se presentan al final de la práctica).

La versión geométrica de las álgebras de división se formula en términos de las esferas paralelizables; un resultado (debido a Adams, 1962) muestra que $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^7$ son las únicas esferas paralelizables. La demostración original de Adams es bastante complicada y requiere el uso de herramientas más avanzadas de cohomología. Sin embargo, usando la analogía mostrada (a través de las diferentes formas de multiplicar) con las 3 álgebras de división sobre $\mathbb{R}$, Micali (1976?) dio una demostración más elemental que se reproduce en el primer apartado a título puramente informativo (por las dificultades para encontrar el papel original de Micali):

2.4.1. Esferas paralelizables y álgebras de división

La condición para que una esfera n-dimensional sea *paralelizable*, consiste en que existan n funciones continuas $s_j : \mathbf{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ con $j = 1, \ldots, n$, tales que $\{p, s_1(p), \ldots, s_n(p)\}$ sean una base de $\mathbb{R}^{n+1}$. No hay restricción en tomar dichas bases como ortonormales (respecto a la métrica usual de $\mathbb{R}^{n+1}$)

Si traducimos el problema a términos algebraicos, el objeto a considerar es el módulo de las derivaciones $ker(A)$ del anillo

$$A \ := \ \mathbb{K}[x^0, \ldots, x^n]/(\sum_{i=0}^{n}(x^i)^2 - 1) \ ,$$

que es una A-módulo proyectivo de tipo finito generado por $\partial/\partial x^0, \ldots \partial/\partial x^n$. Estamos iinteresados en saber, bajo qué condiciones dicho módulo es *libre*. En esta situación, los elementos s_j están definidos por polinomios y mediante transformaciones elementales podemos suponer que son de grado 1, verificándose que

$$s_k = -1 \ \text{ para } \ 1 \leq k \leq n \quad \text{ y } \quad s_i s_j + s_j s_i = 0 \ \text{ para } \ i \neq j \ .$$

Estas condiciones equivalen a que sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ se pueda definir una estructura de módulo sobre el *álgebra de Clifford*$Cliff(\mathbb{R}^{n+1})$ usando la forma cuadrática $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que $f(e_i) = -1$ para $i = 0, \ldots n$. Entonces, $n+1$ debe ser forzosamente múltiplo de la dimensión de $Cliff(\mathbb{R}^{n+1})$, que es exactamente 2^n.

Por las observaciones del número anterior, n debe ser impar, por lo que debe existir una relación del tipo

$$2r+1 = p{,}2^r \quad \text{para algún par } (p,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbf{Z} \ .$$

Si $r \geq 4$, entonces $2^r > 2r+2$, por lo que necesariamente $0 \leq n \leq 3$. Pero, si $r=2$, entonces $p = 3/2 \notin \mathbf{Z}$. Por ello, las únicas soluciones posibles para r son $0, 1$ y 3, que dan los siguientes valores para el par (p,n): $(2,1), (2,3)$ y $(1,7)$, respectivamente. Por ello, la esfera $\mathbf{S}^k$ es paralelizable si, y solo si, $k = 1, 3$ ó 7.

2.4.2. Una excursión por el multiverso

Nota previa.- Este apartado es sólo para matemáticos interesados en Física Teórica (o viceversa) y debería ser saltado en primera lectura.

Los primeros intentos de unificación de la Relatividad Especial (Minkowski, Einstein) y de la Mecánica Cuántica fueron llevados a cabo en el primer cuarto del s.XX. P.A.M.Dirac, dando lugar a la Mecánica Cuántica Relativista. Según esta aproximación, el movimiento de un electrón se formula en términos de una matriz columna cuyas entradas con valores en $\mathbb{C}$ al que se llama *spinor de Dirac*; la representación habitual se realiza en términos de puntos del espacio tiempo con métrica $(3,1)$.

De forma simultánea, Pauli desarrolla una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{s}\ell(2;\mathbb{C})$ del grupo especial lineal $SL(2;\mathbb{C})$. Este álgebra tiene 3 generadores dados por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

a los que se llama *spinores de Pauli*. En particular, cualquier elemento del álgebra es combinación de 2×2-matrices a coeficientes complejos generadas por los 3 elementos descritos. En términos aritméticos, la aproximación de Pauli está conectada con el ejemplo más simple de grupo conmutativo con multiplicador no trivial es $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (H.Weyl, 1930). Este grupo de 4 elementos admite una representación 2-dimensional irreducible proyectiva dada por las *matrices de Pauli* (en términos de las cuales se interpreta el spin de una partícula).

Por ello, una representación alternativa del spinor de Dirac está dada por un par de spinores de Pauli. Esta diversidad de formulaciones da lugar a diferentes formas de representar el movimiento del electrón dependiendo de propiedades de las matrices que son parte del spinor de Dirac. Aunque existen infinitas clases de spinores, sólo los spinores de Pauli y de Dirac están asociados a partículas y la formulación del espacio-tiempo con métrica $(1,3)$.

2.4.3. Algebras de división y espacios spinores

Cualquier álgebra de división $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ó $\mathbb{O}$ sobre $\mathbb{R}$ se puede ver como un espacio spinor. Además, sus combinaciones siguen siendo álgebras de división.

Por ejemplo:

- Un par de spinores de Pauli es un elemento de la complexificación (Pauli) $\mathbb{P} := \mathbb{C} \times_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$ de los cuaterniones $\mathbb{H}$.
- La matriz columna formada por 2 spinores de Pauli da 2 spinores de Dirac.

La descripción en términos de pares de spinores tiene muchas ventajas, pues la descripción de partículas elementales se realiza mediante pares [21]. En el capítulo 5 de este módulo se muestra $SU(2;\mathbb{C})$ como el recubrimiento universal (doble en este caso) de $SL(2;\mathbb{C})$. Esta aproximación complementa el enfoque presentado más arriba según el cual el conjunto de los cuaterniones unidad es topológicamente equivalente a los puntos de la esfera paralelizable $\mathbb{S}^3$ que es una copia de $SU(2;\mathbb{C})$.

Más adelante se muestra que, $SO(1,3)$ es el grupo estructural de la Relatividad General, $U(1)$ el grupo del electromagnetismo, $SU(2)$ de la interacción débil y $SU(3)$ de la interacción fuerte. Por ello $SO(3,1) \times U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ aparece como el "grupo ambiente" para realizar la unificación. Para dar un sentido físico a esta afirmación es necesario reconocer las simetrías de los diferentes tipos de interacción, cuestión que llevamos a cabo en términos de diferentes tipos de spinores que extienden las construcciones bien conocidas para cada una de las componentes.

Una de las tentativas con mayor capacidad de explicación es la Teoría de Cuerdas en un espacio tiempo con métrica inicialmente Lorentziana de tipo $(1,9)$. Este espacio se puede describir en términos de la complexificación de la cuaternización de los octoniones, es decir, del álgebra de división

$$\mathbb{T} \ := \ \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$$

que es una especie de spinor de Pauli generalizado para el $(9,1)$-espacio-tiempo, que al ser "doblado" (mediante la consideración de pares) da lugar a un spinor de Dirac para el $(9,1)$-espacio-tiempo. De este modo, cuando se reduce el grupo estructural los elementos de $\mathbb{P}$ y de $\mathbb{T}$ son pares de elementos de $SU(2)$, lo cual permite reinterpretar las simetrías en términos de los campos (complejos, cuaterniónicos, octoniónicos) que las generan [22].

"Ejercicio".- Reinterpreta el soporte geométrico para los spinores ordinarios de Pauli y de Dirac en términos de bivectores o bien de las grassmannianas $Grass(2,4)$ de rectas complejas. Muestra una conexión con el enfoque de Penrose para la reglación de la cuádrica de Klein Q_K que representa la grassmanniana en $\mathbb{P}^5$ usando los α-planos y los β-planos (correspondientes en realidad a los ciclos $\sigma_{1,1}$ y $\sigma_{2,0}$ de Schubert).

---

[21] El electrón está emparejado con el electrón neutrino, el up-quark está emparejado con el down-quark, etc

[22] Ver http://www.7stones.com/Homepage/CHOarticle.pdf para más detalles.

3. Orientabilidad y fibrados lineales

Una orientación sobre un espacio vectorial V viene dada por una ordenación de los vectores de una base $\mathcal{B}_V$. Una transformación lineal puede conservar ó no la orientación inicial. Por ello, hay dos posibles orientaciones sobre un espacio vectorial V, según que la transformación lineal tenga determinantes positivo ó negativo. Esta noción se extiende al caso de variedades utilizando la orientación local del espacio tangente. Esta orientación local se propaga mediante las aplicaciones lineales tangentes asociadas a los cambios de cartas. Interesa saber si un cambio de carta en un punto induce un cambio en la orientación del espacio tangente.

3.1. Variedades orientables

En el primer apartado se presenta la noción de orientación como una forma de volumen en un espacio vectorial. Esta noción se extiende de forma natural a cualquier espacio vectorial como los correspondientes a la fibra $F_p = \pi^{-1}(p)$ para cualquier punto de un fibrado vectorial ξ sobre un espacio base B. El caso inicialmente más interesante corresponde al fibrado (co)tangente, pues en este caso, la condición de orientabilidad del fibrado (co)tangente es equivalente a la noción de orientabilidad de la variedad.

3.1.1. La noción de orientación para un e.v.

Dado un espacio vectorial V de dimensión m, diremos que dos bases ordenadas $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ y $\mathcal{B}'_V = \{w_1, \ldots, w_m\}$ relacionadas por una matriz A (que representa el cambio de base $\mathcal{B}'_V = A.\mathcal{B}_V$) tienen la misma orientación si $det(A) > 0$.

Como todos los e.v. de la misma dimensión son isomorfos por la acción del grupo lineal general, una orientación sobre un e.v. está dada como una clase de equivalencia del conjunto de referencias $Ref(V)$ modulo la acción de la componente de la identidad $GL^+(m;\mathbb{R})$ del grupo lineal general. Es claro que un espacio vectorial sólo admite dos orientaciones a las que denotaremos como positiva y negativa, respectivamente. Cada una de dichas orientaciones se puede representar por el elemento $e_1 \wedge \ldots \wedge e_m$ modulo las permutaciones pares ó impares, respectivamente, donde $\{e_1, \ldots, e_m\}$ representa una base de V.

3.1.2. Variedades orientables

Utilizando cartas locales $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^m$ para una variedad diferencaible M, se induce una *orientación local* sobre cada abierto coordenado. La orientación local se eleva a cualquier fibrado vectorial ξ sobre M gracias a la condición de trivialidad topológica local del fibrado sobre cada abierto de trivialización U_α.

Interesa evaluar si las orientaciones locales inducidas por este procedimiento son compatibles ó no. para ello, se utilizan los cambios de carta sobre el espacio total $E(\xi)$ del fibrado ξ inducidos por las transformaciones de coordenadas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ sobre cada intersección no vacía $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$.

Si nos restringimos al caso del fibrado tangente τ_M sobre M, los cambios de carta sobre $E(\tau_M) = TM$ están dados por las matrices jacobianas en cada punto $\underline{p} \in U_{\alpha\beta}$ que tienen determinante no-nulo por ser M una variedad diferenciable.

Definición Diremos que una C^r-variedad *conexa* no singular M es *orientable*si el determinante de la matriz que representa la diferencial de los cambios de carta tiene siempre signo positivo. La diferencial representa los cambios de carta en el fibrado tangente TM considerado *como variedad*. De una forma más explícita, si $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ representa el cambio de carta sobre $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, entonces dicha matriz está representada por la matriz jacobiana del cambio de coordenadas. Por ello, debe verificarse que

$$sign(det(\frac{\partial y_\beta^j}{\partial x_\alpha^i})_{1\leq i,j\leq m}) \;>\; 0 \quad \forall \alpha, \beta \text{ tales que } U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \ .$$

3.1.3. Propiedades elementales

proposición.- Las afirmaciones siguientes son equivalentes

- La condición para una variedad conexa M de ser orientable no depende de la trivialización del fibrado tangente.
- Si una variedad conexa es orientable, admite dos orientaciones a las que se califica como “opuestas”.
- Diremos que una $\mathcal{C}^r$-variedad conexa no-singular arbitraria es *orientable*si *todas sus componentes conexas*lo son (verificar que en este caso admite 2^n orientaciones distintas). Habitualmente trabajaremos con variedades conexas.
- $\mathbb{R}^m$, la esfera S^m, el toro m-dimensional S^m y el producto de variedades orientables es orientable.
- La banda de Moebius, la botella de Klein y cualquier espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ son variedades no-orientables.

Ejercicio.- Demuestra la proposición anterior

3.1.4. Coherencia entre orientaciones locales

Si elegimos una base $e_1, \ldots, e_m$ para una fibra arbitraria T_xM, la restricción de la orientación del fibrado a cada fibra permite dotar a dicho espacio vectorial de una orientación (representada por una ordenación de los vectores de una base de secciones). Esto da una familia de orientaciones parametrizada por $x \in M$ que es $\mathcal{C}^r$-coherente, en el sentido de que cambios de carta no alteran el signo de la orientación.

Recíprocamente, si $\{o_x\}_{x \in M}$ representa una familia coherente de orientaciones sobre $\{T_xM\}_{x \in M}$ (en el mismo sentido que antes), entonces M es una variedad orientable. Además, M es orientable si y sólo su fibrado tangente TM es orientable como variedad

3.2. El Fibrado Tautológico sobre el Espacio Proyectivo

3.2.1. El espacio proyectivo como cociente de la esfera

El *espacio proyectivo real* $\mathbb{RP}^m$ como $\mathcal{C}^r$-variedad es el cociente de $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ por la *aplicación antipodal* $\sim_a$ que identifica pares de puntos diametralmente opuestos, es decir,

$$\mathbf{p} \sim_a \mathbf{p}' \Leftrightarrow \mathbf{p} = -\mathbf{p}' \qquad \forall \mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{S}^m$$

Si no se especifica el cuerpo, se entiende que se trata del espacio proyectivo real. La construcción para el caso complejo es idéntica (reemplazando la esfera real por la compleja) y se denota mediante $\mathbb{CP}^m$. La construcción para cuerpos arbitrarios es similar y se presenta en GAGA.

Esta presentación permite denotar a los puntos de $\mathbb{P}^m$ mediante el símbolo $\{\pm x\}$, donde $x \in \mathbb{S}^m$.

El espacio proyectivo $\mathbb{P}^m$ hereda la topología cociente de la esfera m-dimensional $\mathbb{S}^m$

3.2.2. El espacio proyectivo como cociente del espacio cartesiano

La prolongación de la recta que conecta dos puntos diametralmente opuestos de una esfera permite obtener una descripción alternativa del espacio proyectivo como el cociente

$$\mathbf{p} \sim_h \mathbf{p}' \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 \mid \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}' \qquad \forall \mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^{m+1}$$

Como el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \neq 0\}$ es el grupo multiplicativo $\mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}$, se obtiene una descripción del espacio proyectivo $\mathbb{P}^m$ como el cociente de $\mathbb{R}^{m+1}$ por la acción de $\mathbb{R}^*$ o, si se prefiere, como espacio homogéneo por la acción del grupo cociente $GL(m+1;\mathbb{R})/\mathbb{R}^*$ donde $\mathbb{R}^*$ se identifica con el subgrupo (normal) de las homotecias $\{\lambda I_{m+1} \mid \lambda \neq 0\}$ siendo I_{m+1} la $(m+1) \times (m+1)$ matriz identidad

3.2.3. El fibrado tautológico sobre el espacio proyectivo

Consideremos el conjunto $E(\gamma_m^1)$ (que también se denota mediante la letra S) dado por los pares $(\{\pm x\}, \mathbf{v}) \in \mathbb{P}^m \times \mathbb{R}^{n+1}$, donde $\mathbf{v}$ es un vector tal que $\mathbf{v} = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Denotemos mediante

$$\pi : E(\gamma_n^1) \to \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \quad | \quad (\{\pm x\}, \mathbf{v}) \mapsto \{\pm x\}$$

a la primera proyección. La fibra de esta proyección sobre cada punto está dada por los vectores de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenidos en la recta determinada por el par $\{\pm x\}$. Tomamos ahora cartas coordenadas locales en $\mathbb{S}^n$ que no contengan puntos relacionados por la aplicación antipodal (se puede usar el sistema descrito por las $2(n+1)$ cartas mostradas en los ejercicios del §1,1, obtenido mediante proyección ortogonal sobre los $n+1$ hiperplanos coordenados). La elevación de estas cartas coordenadas a $E(\gamma_n^1)$ se puede describir mediante

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R} \to \pi^{-1}(U_\alpha) \quad | \quad \varphi_\alpha(\{\pm x\}, \lambda) := (\{\pm x\}, \lambda x)$$

da una $\mathcal{C}^r$-estructura localmente trivial para este espacio. Por ello, la 4-upla $\gamma_n^1 := (E(\gamma_n^1), \pi, \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathbb{R})$ define un "fibrado vectorial" sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ de rango 1. A este fibrado vectorial se le llama el *fibrado tautológico ó universal sobre*$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$.

3.2.4. No-trivialidad del fibrado tautológico

Proposición.- El fibrado tautológico $\gamma_n^1 := (E(\gamma_n^1), \pi, \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n)$ *es no trivial*, es decir, cualquier sección $s : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \to E(\gamma_n^1)$ se anula en algún punto.

Demostración: En efecto, la composición de la aplicación antipodal con una sección $s \in \Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, E(\gamma_n^1))$ del fibrado tautológico da una función *continua*, pues aplica $x \in \mathbb{S}^n$ en el par $(\{\pm x\}, g(x)x) \in E(\gamma_n^1)$. La imagen de x y de $-x$ debe ser la misma para la composición, se tiene que $g(-x) = -g(x)$. Como $\mathbb{S}^n$ es *conexo*, aplicando el Teorema del Valor Medio, debe existir un punto $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $g(x_0) = 0$, por lo que la sección s se anula en $\{\pm x_0\} \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$

3.3. Fibrado tangente de Espacios Homogéneos

Esta subsección se describe el espacio tangente a los espacios homogéneos descritos en el módulo 1. Estos tópicos se presentan con más detalle en el siguiente capítulo. Por ello, esta presentación se puede entender como un anticipo a modo de ejercicio que un alumno aventajado debería ser capaz de resolver por sí mismo

3.3.1. Fibrado tangente del espacio proyectivo

Ejercicio.- Calcula el fibrado tangente del espacio proyectivo $\mathbb{P}^m$ como espacio homogéneo $\mathbb{S}^m/\mathbb{Z}_2$ teniendo en cuenta la descripción del espacio tangente a $\mathbb{S}^m$.

3.3.2. Descripción formal

El fibrado tautológico γ_n^1 permite calcular el Fibrado Tangente del Espacio Proyectivo como $HOM(\gamma_n^1, \gamma^{\perp})$ que es el fibrado vectorial cuya fibra en cada punto $p \in \mathbb{P}^n$ está dada por $Hom(\gamma_n^1 \mid_p, \gamma^{\perp} \mid_p)$.

Esta descripción es un caso particular de la que se presenta en el apartado siguiente

3.3.3. Fibrado tangente de la Grassmanniana

El argumento usado en la demostración se extiende asimismo a la situación de Grassmannianas $Grass(d+1, n+1)$ de subespacios vectoriales $(d+1)$-dimensionales L^{d+1} en un espacio vectorial $(n+1)$-dimensional. La sucesión exacta corta de espacios vectoriales

$$0 \to L^{d+1} \to V^{m+1} \to Q^{m-d} = V^{m+1}/L^{d+1} \to 0$$

se extiende a una *sucesión exacta tautológica*

$$0 \to S \to \varepsilon_G^{m+1} \to Q \to 0$$

de fibrados vectoriales sobre la Grassmanniana $G = Grass(d+1, m+1)$, donde S es el fibrado tautológico universal (en cada punto p_L de la Grassmanniana tiene a L^{d+1} como fibra) de rango $d+1$ y donde Q es el fibrado tautológico universal (en cada punto p_L de la Grassmanniana tiene a $Q_L^{m+d} := V^{m+1}/L^{d+1}$ como fibra) de rango $m-d$.

Proposición.- El fibrado tangente $\tau_{Grass(d+1,m+1)}$ a la Grassmanniana está dado por $HOM(S, Q)$ donde S y Q son los fibrados universales tautológico y cociente. Para mostrar estos resultados necesitamos desarrollar un formalismo válido para fibrados vectoriales más generales, al que dedicamos el §2,2 de este módulo.

Ejercicio.- Demuestra la proposición anterior (*Indicación:* Utiliza la descripción del espacio tangente en cada punto presentada en el módulo 1).

3.3.4. Fibrado tangente de la Variedad de Banderas

Cualquier bandera $\mathbf{B}$ dada por una colección subespacios vectoriales encajados $\{0\} = L^{d_0} \subset L^{d_1} \subset \ldots L^{d_k} = V^{m+1}$ de un e.v. V^m se puede representar como una colección se subespacios cocientes $Q_i := L^{d_i}/L^{d_{i-1}}$ de dimensión $r_i = d_i - d_{i-1}$ para $1 \leq i \leq k$. La colección de datos $(r_1, \ldots, r_k)$ es una partición de $m+1$. Dos casos extremos interesantes corresponden a la grassmanniana de subespacios $(k+1)$-dimensionales con $k = 2$ correspndiente a la partición $(k+1, m-k)$ y a la variedad de banderas completas correspondiente a la partición $(1, \ldots, 1)$.

Extendiendo la construcción mostrada en el apartado anterior se obtiene que

$$T_{\mathbf{B}}\mathcal{B}(r_1, \ldots r_k) \ = \ \oplus_{j>i=1}^{k} HOM(Q_i, Q_j)$$

para cualquier bandera $\mathbf{B}$ de la variedad de banderas $\mathcal{B}$ de nacionalidad $r_1, \ldots, r_k)$.

Ejercicio.- Demuestra la afirmación precedente (*Indicación:* Razona por inducción)

3.4. Referencias generalizadas para jets

Una extensión de la noción de referencia a espacios de funciones se realiza mediante la acción sobre el espacio de k-jets. La idea intuitiva es muy simple y consiste en asociar a cada función su k-jet ó polinomio de Taylor formal de orden k. Dicho k-jet tiene una parte constante, una parte lineal, una cuadrática, etc hasta una de orden k.

3.4.1. Espacios de Jets

Al conjunto de polinomios de grado j en n variables como espacio de formas simétricas de orden j se le dota de forma natural de estructura de espacio vectorial generado por todos los monomios de la forma $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ con $i_1 + \ldots + i_n = j$ para cada $j = 0, 1, \ldots, k$. Como cada espacio de polinomios de grado k es un espacio vectorial, se tiene que la expresión formal del k-jet de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $\underline{p}$ está dado por una suma formal

$$j^k(f)(\underline{p}) \ = \ [f + Df + \frac{1}{2}D^2 f + \ldots + \frac{1}{k!}D^k f](\underline{p}) \in \oplus_{i=0}^{k} L^i_{sim}(n, 1) \ ,$$

donde $L^i_{sim}(n, 1)$ es el espacio vectorial de las formas simétricas de grado i en n variables.

El "espacio" de k-jets tiene una estructura de álgebra graduada en el que la componente de orden j es un álgebra simétrica de polinomios de orden j para $j = 0, 1, \ldots, k$.

Para una aplicación vectorial $f \in \mathcal{E}(n, p)$ como f tiene p componentes, se tiene que $\mathcal{E}(n, p)$

es un $\mathcal{E}_n$-módulo sobre el anillo de funciones regulares $\mathcal{E}(n)$. Si ahora escribimos

$$\mathcal{E}(n,p) \;=\; \oplus^p \mathcal{E}_n$$

el espacio de k-jets para aplicaciones vectoriales se identifica con el álgebra graduada correspondiente a la suma directa de p componentes como las descritas anteriormente para el caso de una única función y que ahora escribimos de forma simbólica como

$$\oplus_{i=0}^{k} L^i_{sim}(n,p)$$

Así el 0-jet en $\underline{p}$ de una función f se representa habitualmente como el par $[\underline{p}, f(\underline{p}]$, el 1-jet como la terna $[\underline{p}, f(\underline{p}), D^1 f(\underline{p})]$, el 2-jet com la 4-upla $[\underline{p}, f(\underline{p}), Df(\underline{p}), D^2 f(\underline{p})]$ y asi sucesivamente

Las bases canónicas para los operadores diferenciales que extienden los descritos para campos vectoriales ordinarios están generados localmente por las expresiones utilizadas habitualmente en Análisis:

$$\frac{\partial^I}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \quad \textbf{con} \quad \mid I \mid = i_1 + \ldots + i_n = r \quad 0 \leq r \leq k$$

Utilizando las fórmulas del cambio de variable y algunas herramientas del Álgebra Simétrica es posible obtener una formulación intrínseca para las expresiones anteriores [23].

3.4.2. Gérmenes de Jets

Sobre el espacio de k-jets se introduce la noción de germen de manera similar a la noción de germen para espacios de funciones. Dados dos k-jets $j^k f$ sobre U y $j^k g$ sobre V, diremos que son equivalentes en $\underline{p} \in U \cap V$ si y sólo si existe un abierto $W \subset U \cap V$ tal que

$$j^k f \mid_W \;=\; j^k g \mid_W$$

Es inmediato comprobar que esta condición da lugar a una relación de equivalencia sobre gérmenes de jets; la posibilidad de pasar k-jets a gérmenes de k-jets, da lugar a que en la práctica se utilice la misma letra para denotar ambos objetos.

Este enfoque tiene asimismo gran interés para la Geometría de Contacto que, en términos infinitesimales aparece asociada a la $\mathcal{K}$-equivalencia entre gérmenes de aplicaciones caracterizadas por la conservación local del contacto con el grafo de una aplicación [24]

[23] Estos aspectos se detallen en el módulo sobre Topología Diferencial Local para el caso general (ver Pohl, *Topology*, 1965?)

[24] Nótese que el grafo de una aplicación es lo mismo que el 0-jet $j^0 f$

3.4.3. Acciones infinitesimales

Dado un germen de aplicación $f \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, el espacio tangente del grupo de los homeomorfismos que conservan el origen es el producto de grupos lineales generales $GL(n;\mathbb{R}) \times GL(p;\mathbb{R})$. Las acciones infinitesimales sobre espacios de funciones y su extensión a k-jets se han presentado al final del capítulo 5 del módulo A_{11} (Variedades).

Ejercicio (avanzado).- Describe el espacio tangente a la $\mathcal{A}$-órbita en en cada punto

4. Complementos

4.1. Conclusiones

La *linealización de una variedad diferenciable* M está dada por su fibrado tangente τ_M ó de su dual dado por el fibrado cotangente τ_M^* al que se denota también como Ω_M^1 (notación común en el contexto GAGA). La extensión de esta noción a variedades algebraicas o analíticas X se lleva a cabo en términos de los haces de derivaciones Θ_X o de diferenciales ó Ω_X^1 que resultan de "pegar" los datos locales dados por los módulos de las derivaciones o las diferenciales locales, respectivamente. Nótese que en el caso singular, dichos módulos no tienen necesariamente rango constante (debido a la aparición de singularidades, p.e.).

La consideración simultánea de productos tensoriales del fibrado tangente y cotangente de una variedad, conduce de forma natural al estudio de tensores de tipo (r, s) sobre una variedad M que permiten trabajar de forma simultánea con la "evolución de cantidades" (representadas por distribuciones de campos vectoriales) y la "evaluación de algunas otras cantidades" (representadas por sistemas de formas diferenciales). La noción de fibrado vectorial proporciona un lenguaje unificado para abordar cualquier tipo de campos (escalares, covectoriales o, con más generalidad, tensoriales).

En este capítulo se ha presentado el formalismo básico relativo a fibrados vectoriales, incluyendo operaciones, representaciones locales, ó imágenes recíprocas, entre otras. Gracias a este formalismo es posible representar de una forma más compacta. Se presta una especial atención a espacios homogéneos (esfera, espacio proyectivo, grassmannianas o variedades de banderas), tanto en el caso orientable como no-orientable con fibrados "canónicos" correspondientes para disponer de "ejemplos" que más adelante juegan un papel fundamental en relación con cuestiones de clasificación (proporcionan el soporte para los "espacios clasificantes" asociados a diferentes grupos).

4.2. Ejercicios

4.2.1. Suavidad de la aplicación de Gauss

Sea M una subvariedad m-dimensional compacta de $\mathbb{R}^N$. En virtud del Teorema de Severi-Whitney, existe un embebimiento $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ para $N >> 0$. Definimos la *aplicación de Gauss* $g_M : M \to Grass(m, N)$ mediante la asignación que a cada punto $x \in M$ le hace corresponder el subespacio vectorial asociado al espacio afín T_xM. Demuestra que g_M es una aplicación $\mathcal{C}^\infty$

4.2.2. Isomorfismos inducidos por difeomorfismos locales

Demuestra que si dos variedades son localmente difeomorfas, entonces la aplicación tangente del difeomorfismo local es un isomorfismo entre espacios vectoriales. En particular, si M es compacta y Δ_M es la diagonal de $M \times M$, entonces $TM \simeq T\Delta_M$.

4.2.3. La esfera 3-dimensional es paralelizable

Demuestra que la esfera 3-dimensional $\mathbb{S}^3$ *no es una variedad topológicamente trivial*(es decir, no puede ser recubierta por una única carta), aunque su fibrado tangente $T\mathbb{S}^3 \simeq \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3 \simeq \varepsilon^3_{\mathbb{S}^3}$ sea “tangencialmente trivial” es decir, la esfera $\mathbb{S}^3$ es paralelizable.

4.2.4. Fibrado tautológico sobre la recta proyectiva

Demuestra que si $n = 1$, el espacio total $E(\gamma_1^1)$ del fibrado tautológico γ_1^1 sobre $\mathbb{RP}^1$ se puede parametrizar mediante el conjunto de pares

$$(\ \{\pm(cos(\theta), sen(\theta))\} \quad , \quad t(cos(\theta), sen(\theta)) \ ) \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \ , \ t \in R$$

(si se dibuja esta parametrización como una banda de Moebius indefinidamente prolongada, se obtiene una ”demostración gráfica” de por qué este fibrado no puede ser topológicamente equivalente a un cilindro sobre $\mathbb{RP}^1$).

4.2.5. Variedades orientables

Demuestra que $M \times N$ es una variedad orientable si y sólo si M y N son orientables. Aplica este resultado al primer paso de la clasificación de superficies reales compactas conexas.

4.2.6. Variedades paralelizables

Demuestra que cualquier variedad paralelizable es orientable.

4.2.7. Orientabilidad para recubrimientos por dos cartas

Sea M una $\mathcal{C}^r$-variedad que admite un atlas formado por dos cartas tales que la intersección de sus dominios de definición es una variedad conexa. Demuestra que M es orientable (este resultado muestra que $\mathbb{S}^m$ es orientable para $m \geq 2$. Razona el caso $m = 1$).

4.2.8. Invariancia de la orientabilidad

Demuestra que la noción de variedad orientable es invariante por $\mathcal{C}^r$-equivalencias, es decir, si N es orientable y $f : M \to N$ es una $\mathcal{C}^r$-equivalencia, entonces M es orientable (aunque puede tener una orientación distinta a la de N). *Indicación:* Razonad localmente mostrando que si o_V es una orientación para un abierto V de N, entonces f induce una orientación $f^*(o_V)$ cuyo dominio es $U := f^{-1}(V)$ y "pegar" los datos locales, usando que los cambios de carta tienen signo positivo para la variedad N.

4.3. Comentarios adicionales

4.3.1. Aplicación de Gauss generalizada

La aplicación de Gauss descrita en el primera ejercicio es la generalización obvia de la indicatriz de Dupin para curvas en $\mathbb{R}^3$ y de la aplicación de Gauss para superficies de la Geometría Diferencial elemental. En Topología Diferencial Global se muestra cómo esta aplicación permite clasificar (módulo isomorfismo) fibrados vectoriales sobre variedades compactas, modulo isomorfismo. De una forma más precisa, el fibrado tangente τM a M es isomorfo a la imagen recíproca g^*S del fibrado tautológico S sobre las Grassmanniana $Grass(m, N)$.

Como consecuencia, los invariantes topológicos de τ_M (clases de cohomología que introducimos en el §4) son la imagen recíproca de los invariantes topológicos del fibrado tautológico S sobre $Grass(m, N)$. Estos invariantes topológicos son invariantes de la clase de homotopía de g. Por ello, se dice que la Grassmanniana es un *espacio clasificante*. Este resultado muestra el interés adicional del estudio de las Grassmannianas $Grass(m, N) = GL(N)/GL(m) \times GL(N - m)$

Si en lugar de tomar el grupo lineal general, se consideran otros grupos clásicos significativos para el caso real, complejo ó cuaterniónico, se obtienen espacios clasificantes similares para cada uno de dichos casos. Este tipo de construcciones proporciona una metodología general para el cálculo de invariantes relativos a espacios homogéneos G/B (donde G es un grupo de Lie y B un subgrupo de Borel(a partir del comportamiento de subgrupos parabólicos P que son la generalización de matrices triangulares superiores por bloques y que incluyen las variedades de banderas incompletas presentadas en el módulo 1.

El paso siguiente es la extensión del argumento anterior al estudio de los espacios localmente homogéneos (espacios simétricos) que proporcionan la generalización natural de los espacios homogéneos. Estos espacios proporcionan un soporte para las soluciones de sistemas de ecuaciones muy generales tal y como veremos en relación con Relatividad General (módulo 6) y en relación con el modelo estándar (unificación del electromagnetismo con las interacciones débil y fuerte) ó incluso los intentos de gran unificación (módulo A_{17}).

4.3.2. Referencias comentadas

La referencia más completa sigue siendo la enciclopedia

[Spi99] M.Spivak, Michael: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (3rd ed.), 5 vols.

El vol.I es el más significativo para los materiales presentados en este módulo se pueden encontrar. Contiene uina traducción al inglés de la Memoria original de B.Riemann en la que introduce un antecedente de la versión de variedad.

Un enfoque más moderno se puede ver en

[Abr88] R.Abraham, J.E,Marsden and T.Raitu: *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, Springer-Verlag, 1998.

Algunos manuales con aplicaciones a Física Clásica son

[Bur85] W.L.Burke: *Applied Differential Geometry*, 1985.

[Fra04] T.Frankel: *The geometry of physics: an introduction* (2nd ed.), 2004.

Un enfoque más avanzado que incluye aspecto de Geometría Riemanniana (conexiones y curvaturas)[25] se presenta

[DoC94]M.do Carmo: *Riemannian Geometry*, 1994

Para las aplicaciones a otras áreas de Ingeniería se recomienda ver los materiales contenidos en las introducciones a las materias B_i disponibles en mi página web

[25] Estos tópicos proporcionan el núcleo central del módulo A_{16}

5. Práctica: Grupo actuando sobre un Espacio Topológico

En esta sección mostramos algunas herramientas topológicas que permiten dotar de estructura como C^0-variedad al cociente de una variedad por la acción topológica de un grupo. Los argumentos utilizados facilitan el estudio de espacios de órbitas por acciones de grupos y proporcionan las primeras herramientas de tipo topológico para el estudio de los espacios localmente simétricos. Toda esta sección debería ser saltada en una primera lectura.

5.1. Acción de un grupo topológico

En esta subsección se presentan algunas propiedades básicas de acciones de grupos sobre espacios topológicos y sus extensiones más sencillas al caso de variedades. Las extensiones a espacios de funciones o, con más generalidad aplicacicones, diferenciables o analíticas se abordan en los módulos A_{43} (Singularidades de Funciones) y A_{44}, respectivamente, de la materia A_4 (topología Diferencial). Una buena referencia para los aspectos básicos es el libro de Brickell y Clark, citado en la bibliografía (ver especialmente pp. 101 y ss.).

La extensión al caso de variedades singulares con diferentes tipos de estratificaciones se presenta en el módulo A_{45} (Estratificaciones analíticas). La extensión a cuestiones topológicas de bifurcación en sistemas dinámicos se presenta en el módulo A_{46} (Sistemas Dinámicos)

5.1.1. Acciones topológicas

En este apartado se presentan algunas nociones básicas que son válidas para cualquier espacio topológico. Más adelante se particularizan al caso de C^r-variedades.

Definición.- Diremos que un grupo topológico G actúa por la izquierda sobre un espacio topológico X si existe una aplicación continua $a : G \times X \to X$ definida sobre todo el producto $G \times X$, tal que

1. La aplicación $a_g : \{g\} \times X \to X$ dada por $a_g(x) := a(g, x)$ define una *transformación de* X, es decir, una aplicación continua de X en sí mismo.
2. $\forall g \in G$ se tiene que $a_g \circ a_h = a_{g*h}$, donde $*$ denota la ley de grupo sobre G.

Aunque en la mayor parte de los desarrollos se aplican estas construcciones al caso de variedades, debe tenerse presente que el espacio topológico puede ser un espacio de funciones o de campos (vectoriales o tensoriales) más general. Las aplicaciones de este enfoque más general a algunas áreas de Ingeniería se presentan en las materias B_1 (Fluid Mechanics), B_2 (Robotics), B_3 (Computer

Vision) y B_4 (Computer Graphics) a cuyas introducciones se puede acceder libremente en mi página web.

5.1.2. Acción libre

Definición.- Diremos que G actúa de forma *libre*sobre X si el elemento neutro es el único que verifica la condición $a_g(x) = x\ \forall x \in X$.

5.1.3. Motivación analítica: Soluciones de EDO

Dado un sistema de EDO (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias) con condiciones iniciales en un punto, el desplazamiento infinitesimal a lo largo de la curva solución del sistema da lugar a una acción sobre dicha solución. Cuando consideramos el conjunto de soluciones posibles con condiciones iniciales prefijadas, dicha acción está definida sobre el espacio ambiente.

Con más generalidad, podemos interesarnos por propiedades cualitativas de las soluciones de un sistema. El estudio de las acciones asociadas a simetrías infinitesimales de un sistema permite detectar la topología genéricas de las mismas, así como los cambios en el comportamiento cualitativo.

Una situación de gran interés en sistemas de EDO, corresponde a los puntos del espacio ambiente en los cuales la acción no es libre. La idea esencial consiste en visualizar dichos *puntos de equilibrio del sistema* como *puntos fijos*para la acción infinitesimal de un grupo (que en este caso, no actúa de forma libre sobre todo el espacio ambiente).

No obstante, para simplificar en este apartado supondremos que G actúa de forma libre sobre X. La acción de G sobre X induce una relación de equivalencia sobre X, dada por la condición:

$$x \simeq x' \ \Leftrightarrow \ \exists g \in G \ \mid \ x' = a_g(x) \ .$$

En la subsección siguiente se aborda el estudio de las órbitas por dicha acción.

5.2. Orbitas

Llamamos *órbita de*$x \in X$ y lo representamos mediante O_x a la clase de equivalencia de x por la relación anterior. Denotamos mediante $G\backslash X$ al conjunto de órbitas por $\simeq$. En general, este espacio cociente *no tiene estructura como* $\mathcal{C}^r$*-variedad*(en el §2,4 daremos condiciones para que dicho cociente sea una variedad).

5.2.1. Acción discreta de un grupo

Sea G un grupo de homeomorfismos de un espacio topológico X que actúa libremente sobre X. Diremos que G actúa de forma *discreta*sobre X, si

1. $\forall x \in X$ existe un entorno U de x tal que $g(U) \cap U = \emptyset \quad \forall g \in G \ , \ g \neq e$ (cuando sólo verifica esta condición se dice que el grupo actúa de forma *propiamente discontinua*).

2. $\forall x, y \in X$ con $y \neq gx \quad \forall g \in G$ existen entornos U de x y V de y verificando que $g(U) \cap V = \emptyset \quad \forall g \in G$.

5.2.2. El paso al cociente como homeomorfismo local

Si G actúa de forma libre y discreta sobre X, entonces la aplicación de paso al cociente $\mu : X \to G\backslash X$ es abierta y es un *homeomorfismo local*. En particular, $dim(X) = dim(G\backslash X)$.

En efecto, la primera condición se traduce en que existe un entorno U tal que la aplicación de paso al cociente $\mu_U : U \to G\backslash U$ es inyectiva. Comprobar el resto de las condiciones como ejercicio; de hecho más abajo mostramos un resultado más general, aunque es importante subrayar el carácter topológico de las condiciones sobre la aplicación μ de paso al cociente.

5.2.3. Topología de cocientes por grupos

En el caso de la proposición anterior, decimos que $\mu : X \to G\backslash X$ es un *recubrimiento no ramificado*(esta es la situación usual en la Teoría de Homotopía).

El resultado fundamental relevante para la topología de variedades es el siguiente:

Teorema.- Sea G un grupo de transformaciones que actúa sobre una $\mathcal{C}^r$-variedad M de forma *libre y propiamente discontinua*. Entonces, el cociente $G\backslash M$ es una $\mathcal{C}^r$-variedad. Si el grupo actúa de forma libre y discreta, entonces $G\backslash M$ es una variedad Hausdorff.

Idea de la demostración.- En virtud de la Prop. anterior, basta comprobar que $\mu_V \circ \mu_U^{-1}$ es de clase $\mathcal{C}^r$ sobre $\mu_U(U) \cap \mu_V(V) \neq \emptyset$ (razonarlo). Para ello, partimos de $\bar{u} \in W \subseteq \mu_U(U) \circ \mu_V(V)$, tomamos un elemento $u \in \mu_V(\bar{y})$ de la imagen recíproca y construimos $\bar{v} = (\mu_V \circ \mu_U^{-1})(\bar{u})$. Obviamente, u y v son G-equivalentes en M, por lo que existe $g \in G$tal que $gu = v$. En consecuencia, la restricción a W de $\mu_V \circ \mu_U^{-1}$ coincide con la transformación a_g definida por dicho elemento g, que es una $\mathcal{C}^r$-equivalencia por hipótesis acerca de la acción de G sobre M.

5.2.4. Apéndice: Topología de variedades analíticas complejas $1D$

Nota previa: Este apartado debe considerarse como un esquema para un trabajo práctico a realizar en conexión con la Geometría Analítica Compleja (etiquetada en Análisis como Teoría de Funciones de Varias Variables Complejas). La extensión de este enfoque a Geometría sobre otros cuerpos presenta una mayor dificultad que no se aborda en esta materia.

El primer gran resultado relativo a la clasificación de variedades analíticas complejas 1-dimensionales (que no demostraremos pues no es elemental y concierne a la Teoría de Funciones de una Variable Compleja) dice lo siguiente:

Teorema de Uniformización.- Los únicos tipos de variedades analíticas complejas de dimensión 1 simplemente conexas son la recta afín, el interior del disco unidad en $\mathbb{C}^1$ ó la recta proyectiva.

Comentario.- Los dos últimos resultados dan una motivación para el estudio de la acción de algunos grupos discretos sobre el plano real $\mathbb{R}^2$ (como modelo de $\mathbb{C}^1$) y sobre S^1. El caso más interesante corresponde a los grupos discretos que actúan sobre el modelo de Poincaré del plano hiperbólico obtenido a partir del disco unidad, pero este estudio excede los límites de la Geometría y Topología Elemental que consideramos aquí.

5.3. Ejemplos topológicos avanzados

5.3.1. El cociente del plano por una traslación

La acción de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}^2$ dada por la asignación $(x, y) \mapsto (x+1, y)$, es libre y discontinua (comprobarlo), por lo que $Z\backslash\mathbb{R}^2$ es una $\mathcal{C}^r$-variedad cociente. Para encontrar un atlas, debemos describir los abiertos sobre los cuales la aplicación $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}^2$ es *inyectiva.* Es fácil verificar que

$$U_1 \ := \ \{(x,y) \mid 0 < x < 1\} \quad \text{y} \quad U_2 \ := \ \{(x,y) \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}$$

cumplen dicha condición, lo cual permite obtener un atlas sobre $Z\backslash\mathbb{R}^2$ dado por las cartas $\{\mu(U_i), \varphi_i := (\mu\mid_{U_i})^{-1}\}_{i=1,2}$. Si $V_i := \mu(U_i)$, comprueba que

$$V_1 \cap V_2 \ = \ W_1 \cup W_2 \ := \ \mu(\{(x,y) \mid 0 < x < \frac{1}{2}\}) \ \cup \ \mu(\{(x,y) \mid \frac{1}{2} < x < 1\})$$

(donde estamos refiriendo ambos abiertos al mismo sistema coordenado) y que el cambio de carta $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ está dado sobre $\varphi_1(W_1)$ por la identidad y sobre $\varphi_1(W_1)$ por la asignación $(x, y) \mapsto (x - 1, y)$.

5.3.2. El toro como espacio cociente

Consideremos la acción de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}^2$ definida mediante las asignaciones

$$(x\ ,\ y)\ \mapsto\ (x+1\ ,\ y)\quad ,\quad (x\ ,\ y)\ \mapsto\ (x\ ,\ y+1)\ .$$

Ejercicio.- Comprobad que esta acción es discontinua y que la aplicación de paso al cociente $\mu:\mathbb{R}^2\to\mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{R}^2$ es inyectiva sobre los siguientes abiertos de $\mathbb{R}^2$: $U_1:=\{(x,y)\mid 0<x<1\ ,\ 0<y<1\}$, $U_2:=\{(x,y)\mid -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\ ,\ 0<y<1\}$, $U_3:=\{(x,y)\mid 0<x<1\ ,\ -\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}\}$ y $U_4:=\{(x,y)\mid -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}\}$ (*indicación:*: Dibujarlo). Por ello, las cartas $\varphi_i:=\mu\mid_{U_i}^{-1}$ permiten obtener una $\mathcal{C}^r$-estructura sobre el cociente $\mathbb{T}^2:=\mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{R}^2$

5.3.3. La Banda de Moebius como espacio cociente

Consideremos el grupo aditivo $\mathbb{Z}$ actuando sobre el plano $\mathbb{R}^2$ mediante

$$a:\mathbb{Z}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\quad\mid\quad a((x,y),n)\ :=\ (x+n\ ,\ (-1)^n y)\ .$$

Ejercicio.- Comprobad que la función $a_n:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por la asignación $a_n(x,y):=a((x,y),n)$ es un difeomorfismo local de $\mathbb{R}^2$.

Además, $\mathbb{Z}$ actúa libremente sobre $\mathbb{R}^2$ (pues $a_n(x,y)=(x,y)\Leftrightarrow n=0$) y la acción es discontinua (tomar entornos disjuntos de (x,y) y de su imagen $a_n(x,y)$, y verificarlo). Por ello, el paso al cociente $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}^2$ dota a $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}^2$ de una estructura de variedad, a la que denotaremos mediante B_M. Esta estructura coincide con la dada originalmente (en el §1,1,8,3) por las cartas

$$U_1:=\{(x,y)\mid 0<x<(1/2)\}\quad \text{y}\quad U_2:=\{(x,y)\mid (1/2)<x<1\}\ .$$

Verificad que la aplicación $\varphi_i:=f\mid_{U_i}$ es *biyectiva*y que las cartas dadas por (U_i,φ_i) forman un $\mathcal{C}^r$-atlas 2-dimensional sobre la banda de Moebius B_M. En efecto, la intersección $U_1\cap U_2$ tiene dos componentes conexas que denotamos mediante V y W, respectivamente (que son las imágenes via f de los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que $0<x<\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{2}<x<1$, respectivamente).

Para la primera, el cambio de coordenadas está dado por la aplicación identidad (por lo que el determinante de la matriz jacobiana de la transformación tiene signo positivo), mientras que el cambio de coordenadas para la segunda componente conexa está dado por la asignación $(x,y)\mapsto(x+1,-y)$ (por lo que el determinante de la matriz jacobiana tiene signo negativo). Por ello, $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}^2$ *no es orientable*como $\mathcal{C}^r$-variedad.

5.3.4. La Botella de Klein como variedad cociente

Este ejemplo es una combinación de los dos anteriores, por lo que nos limitaremos a esbozar el argumento (completar como ejercicio esta presentación). Consideremos la acción de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}^2$ definida mediante las asignaciones

$$(x\ ,\ y) \ \mapsto\ (x+1\ ,\ y) \quad , \quad (x\ ,\ y)\ \mapsto\ (x\ ,\ y+1)\ .$$

Ejercicio.- Comprueba que esta acción es discontinua y que la aplicación de paso al cociente $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2$ es inyectiva sobre los mismos abiertos de $\mathbb{R}^2$ que para el toro 2-dimensional. La diferencia estriba ahora en que debemos identificar el punto $(0, y)$ con el $(1, 1-y)$ y el punto $(x, 0)$ con el $(x, 1)$ (dibujarlo).

Usando el mismo argumento que el mostrado en la subsección precedente, comprobad que la botella de Klein es una 2-variedad compacta conexa Hausdorff, pero *no-orientable.*

5.3.5. El Fibrado Tautológico como cociente

La acción de $\mathbb{Z}_2$ permite visualizar el fibrado tautológico γ_1^1, que es un fibrado no trivial de rango 1 sobre $\mathbb{P}^1$ (ver §2,1,7 para detalles) como un cociente por la acción del grupo discreto $\mathbb{Z}_2$ de un fibrado sobre la circunferencia $\mathbb{S}^1$ (cuyo fibrado tangente es trivial: $T\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$).

Esta construcción se extiende de forma natural al fibrado tautológico γ_m^1 que es un fibrado no trivial de rango 1 sobre $\mathbb{P}^m$. Algunas consecuencias de esta construcción se muestran en el §2,2.

Por ello, *la no trivialidad de un fibrado vectorial* puede proceder ó bien de la geometría global de la variedad base (como ocurre con la esfera 2-dimensional, en virtud del Teorema de Brouwer del punto fijo), *ó bien de la propia estructura de fibrado que consideramos sobre la variedad.*