

1.3 Operaciones básicas

Javier Finat

Índice

1.	Operaciones con estructuras diferenciables	3
1.1.	Estructura Producto	3
1.1.1.	Construcción	4
1.1.2.	Propiedades	4
1.1.3.	Ejemplo 1: El tubo 2D	4
1.1.4.	Ejemplo 2: El toro n-dimensional	6
1.1.5.	Ejemplo 3: El producto fibrado	8
1.2.	Restricción de estructuras	10
1.2.1.	Estructuras suaves sobre cerrados	11
1.2.2.	Algunos grupos clásicos	11
1.3.	Variedades con borde	12
1.3.1.	La noción de semiespacio	12
1.3.2.	C^r -Estructura con borde	13
1.3.3.	Ejemplos no-triviales	15
1.3.4.	Apéndice: Pegado de Variedades con Borde	15
2.	Estructura Cociente	17
2.1.	Cociente topológico. Ejemplos	17
2.1.1.	La circunferencia	18
2.1.2.	El toro	19
2.1.3.	La botella de Klein	20
2.1.4.	El plano proyectivo real	21
2.2.	Espacios G -Homogéneos	21
2.2.1.	Caracterización de espacio homogéneos	22
2.2.2.	Ejemplos sencillos de espacios homogéneos	23
2.2.3.	Grassmannianas	24
2.2.4.	Variedades de banderas	26
2.3.	Complementos de Topología Algebraica	28
2.3.1.	Algunas motivaciones adicionales	28
2.3.2.	Espacios y Aplicaciones Recubridoras	28
2.3.3.	Fibrados vectoriales	29
2.3.4.	Fibraciones	30
2.4.	Espacios localmente simétricos	31
2.4.1.	Nociones básicas	32
2.4.2.	Anisotropía	33
2.4.3.	Funciones de onda invariantes	34

2.4.4.	Elementos de bifurcación	34
3.	Compatibilidad constructiva: Particiones de la Unidad	35
3.1.	Algunos resultados de Topología General	36
3.1.1.	La noción de partición de la unidad	36
3.1.2.	Una aplicación al problema del pegado	36
3.1.3.	El caso no orientable	37
3.1.4.	Orbifolds	37
3.2.	Complementos topológicos	38
3.2.1.	Existencia de particiones de la unidad	38
3.2.2.	Espacio paracompacto	39
3.2.3.	Caracterización de espacios paracompactos	39
3.3.	Práctica: Una conexión con Análisis Funcional	39
3.3.1.	Variedades sobre espacios de Banach	40
3.3.2.	Espacios de Banach y Particiones de la Unidad	41
3.3.3.	Embebimiento de una variedad compacta	42
4.	Práctica: Grassmannianas	43
4.1.	Descripción	44
4.1.1.	Producto exterior de vectores	44
4.1.2.	Álgebra exterior	45
4.1.3.	Descripción algebraica	45
4.2.	Estructura como variedad diferenciable	47
4.2.1.	Una representación local canónica	47
4.2.2.	Atlas para la Grassmanniana	47
4.2.3.	Descomposición celular del proyectivo	48
4.2.4.	La variedad de banderas completas como espacio homogéneo	48
4.2.5.	Descomposición celular de la Grassmanniana de Planos	49
4.3.	Estructura Algebraica de la Grassmanniana	49
4.3.1.	Caracterización algebraica	50
4.3.2.	Ejemplo Grassmanniana de Rectas en \mathbb{P}^3	51
4.4.	Apéndice: Algunas aplicaciones de Grassmannianas	51
4.4.1.	Aplicaciones a twistors y extensiones recientes	52
4.4.2.	Aplicaciones a Visión Computacional y Renderización	53
4.4.3.	Algunas aplicaciones a Teoría Económica	53
5.	Ejercicios	55

A diferencia del capítulo anterior, este capítulo tiene un carácter más global que local. Se muestra cómo construir variedades mediante las operaciones básicas tales como producto y paso al cociente por una relación de equivalencia. Asimismo, se aborda el problema de inducir C^r -estructuras mediante imagen inversa que extiende de forma natural la noción de C^r -subvariedad. Se muestran ejemplos significativos de C^r -variedades homogéneas por la acción de un grupo que proporcionan las piezas básicas para inducir estructuras de manera "universal"; estas construcciones son muy significativas para problemas de clasificación y de ahí el nombre de espacios ó de aplicaciones "clasificantes"

La condición de regularidad local para cada carta no tiene por qué verificarse de forma global. Por ello, es necesario identificar (si existen) cambios de coordenadas locales regulares que permitan mantener esta condición con respecto a los nuevos sistemas de coordenadas proporcionados por el Teorema de la Funciones Implícitas. Veamos condiciones que nos permitan sistematizar esta idea; más explícitamente, deseamos ver cuándo, tanto el paso al cociente como la imagen recíproca por una aplicación, induce una estructura de C^r -variedad sobre el espacio de llegada ó el de partida, respectivamente. Para $r = 0$, la solución de este problema se ha mostrado en la Topología General; el cálculo de invariantes se lleva a cabo en Topología Algebraica. El caso $r > 1$ requiere una mayor elaboración. Para fijar ideas, centramos la atención en el caso $r = \infty$; los casos $r = alg$ (resp $r = \omega$) requieren funciones racionales (resp. meromorfas) para garantizar la existencia del cambio de carta y, por consiguiente, un análisis más detallado de los lugares de ceros y de polos.

Se presta especial atención a la relación entre los enfoque local y global, mostrando una realimentación entre ambos.

- El paso de aspectos globales a locales resulta especialmente indicado cuando se dispone de una representación implícita (en términos de ecuaciones globales) o bien abstracta (como cociente de grupos, p.e.). Para ilustrar la metodología propuesta se analiza con cierto detalle el caso correspondiente a grassmannianas de rectas y sus extensiones.
- El paso de aspectos locales a globales se ha introducido en el capítulo 1 como una extensión de las condiciones de "pegado" de cartas para variedades topológicas. En este capítulo se incorporan condiciones adicionales que permiten "pegar" funciones, recurriendo a las particiones de la unidad subordinadas a un recubrimiento de la variedad.

1. Operaciones con estructuras diferenciables

Una cuestión fundamental a resolver es la construcción de C^r -variedades. Para ello, se han descrito

- *estrategias locales* mediante “pegado” de C^r -cartas locales (este enfoque extiende la aproximación topológica); y
- *estrategias globales* usando propiedades adicionales que deben verificar las aplicaciones f (submersión vs embebimiento) enfoque que utiliza propiedades de regularidad de la diferencial df por lo que se puede etiquetar como analítico o algebraico (dependiendo del marco conceptual en el que estemos trabajando).

Ambas estrategias proporcionan “objetos básicos” como C^r -variedades que permiten definir otras estructuras de C^r -variedad que se obtienen mediante *operaciones* (producto o paso al cociente) o bien mediante pegado global mediante técnicas de “cirugía” (suma amalgamada, cobordismo, etc) con propiedades adicionales para el pegado. El “pegado global” requiere especificar los objetos a lo largo de los cuales se pega que habitualmente son (C^r -equivalentes a) discos \mathbb{D}^m ; esta elección se deba a una mayor facilidad para definir aplicaciones sobre discos que (mediante la elección de una orientación apropiada) permite realizar el pegado. Esta estrategia proporciona una C^0 -variedad, pero no tiene por qué dar una C^r -variedad para $r \geq 1$; por ello, es necesario incorporar restricciones adicionales ¹

En este apartado se construyen estructuras diferenciables inducidas a partir de operaciones elementales (producto, cociente) definidas sobre estructuras diferenciables. El objetivo de estas construcciones consiste en mostrar cómo inducir C^r -estructuras a partir de aplicaciones sobre ciertos objetos y sobre ciertos grupos de transformaciones que permitan simplificar el análisis de modelos ó de sistemas con un comportamiento más sofisticado. La propiedad fundamental a evaluar es la *regularidad* de las transformaciones correspondientes a cambios de carta; la regularidad se evalúa localmente en términos de la condición de rango máximo para la matriz jacobiana que representa localmente la transformación, una vez fijados sistemas de referencia en los espacios de partida y de llegada de la aplicación correspondiente.

1.1. Estructura Producto

El producto cartesiano de C^r -variedades es una C^r -variedad con respecto al producto de C^r -atlas maximales para cada una de las variedades. Un extensión de esta construcción lleva a la noción de producto fibrado que es de gran utilidad adicional en Geometría Algebraica y Analítica.

¹ Las restricciones a incorporar dependen del C^r -marco estructural en el que estemos trabajando y se abordan en los capítulos siguientes en términos de campos vectoriales de clase C^r ; nótese que las soluciones (curvas itnegrales) los campos de clase C^0 pueden incluir “esquinas”, algo que no está permitido en el caso suave

1.1.1. Construcción

Dadas dos variedades (M, \mathcal{A}_M) y (N, \mathcal{A}_N) , la estructura $\mathcal{A}_M \times \mathcal{A}_N$ sobre el soporte $M \times N$ está dada por el producto cartesiano de las estructuras sobre cada uno de los factores. Más explícitamente:

si $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M$ y $(V, \psi) \in \mathcal{A}_N$ denotan cartas coordenadas locales admisibles en los atlas respectivos para $p \in M$ e $q \in N$, tenemos que $(U \times V, (\varphi, \psi))$ es una carta coordenada local admisible en $(\bar{p}, \bar{q}) \in M \times N$ para la estructura producto (verificar las condiciones de compatibilidad como ejercicio).

1.1.2. Propiedades

- producto de variedades $M \times N$ es una variedad de dimensión $m+n$, donde $m := \dim(M)$ y $n := \dim(N)$.
- Se verifican las propiedades conmutativa y asociativa para la estructura producto, dentro de la clase de C^r -equivalencia (por ello, usualmente no distinguiremos el orden en la notación, ni escribiremos paréntesis cuando haya varios factores).
- El ejemplo trivial de estructura producto corresponde a $\mathbb{R}^{m+n} \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ con sus correspondientes estructuras diferenciables.
- La interpretación vectorial de \mathbb{R}^p como traslaciones en el espacio p -dimensional permite dotar de estructura de variedad al conjunto de traslaciones definidas sobre cualquier espacio vectorial.
- El conjunto de las matrices $M(n \times p; \mathbb{R})$ hereda una estructura de variedad diferenciable a través del isomorfismo con $\mathbb{R}^{n \times p}$ que a cada matriz le hace corresponder el array ordenado de sus coeficientes; si $n = p$ esta C^r -variedad es el espacio $End(V)$ de los endomorfismos de un espacio vectorial real n -dimensional V .

1.1.3. Ejemplo 1: El tubo 2D

El primer ejemplo no trivial de estructura producto es el tubo 2-dimensional que se define como la imagen de $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$ por una C^r -equivalencia; si la C^r -equivalencia es la aplicación identidad se obtiene un cilindro. El carácter no-trivial del toro como C^r -variedad procede de la no-trivialidad de topología de \mathbb{S}^1 : En el capítulo 1 de este módulo se ha mostrado el recubrimiento por abiertos de una esfera n -dimensional.

La forma habitual de parametrizar el tubo es mediante la imagen de los sistemas de coordenadas cilíndricas dadas por una traslación y una rotación planares.

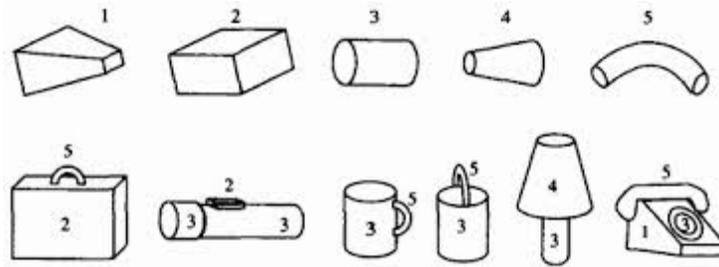


Fig. 1: Componiendo objetos mediante geones

Ejemplo: Los movimientos elementales rígidos en flatland son las componentes básicas de los sistemas de planificación y navegación automáticas para vehículos autónomos.

La recta \mathbb{R}^1 es el eje del cilindro cuya imagen es el *nerbio del tubo*. El nerbio del tubo es una curva (no necesariamente cerrada) sin auto-intersecciones. Nótese que el tubo no tiene necesariamente una anchura constante, pues el radio $r_{\underline{x}}$ es una función continua. Idealmente, el pegado de formas tubulares debería ser suave; en la práctica basta con que sea continuo ²

La *Visualización de tubos* entendida como modelado y simulación interactiva tiene un gran número de aplicaciones en terrenos tan alejados como

- *Ingeniería Industrial* en relación con CAD/CAM incluyendo toda clase de aproximaciones por elementos finitos dados por PL-objetos, PQ-objetos o PS-objetos, p.e.;
- *Ingeniería Civil* en relación con diseño de instalaciones cuya versión topológica de un problema de trenzas o braids que se aborda en términos de la presentación del grupo fundamental, p.e.;
- *Física Teórica* en relación con la identificación del “área de influencia” correspondiente a interacciones modeladas como campos o como flujos; en este caso, el radio variable del tubo puede estar asociado a una métrica que se deforma de acuerdo con la curvatura del espacio debida a efectos gravitatorios, p.e.;
- *Biomedicina* en relación con Ingeniería Genética, Análisis Biomolecular, Diseño de Fármacos, p.e.; una visualización de aspectos relativos a Biología Molecular se puede ver en [Ede05] ³
- *Simulación* en Mecánica de Medios Continuos, tópico estrechamente relacionado con la visualización de efectos dinámicos en el interior (generación

² Esto da lugar a PL-aproximaciones a objetos suaves utilizadas de forma habitual en diferentes aplicaciones

³ H.Edelsbrunner and P.Koehl: “The Geometry of Biomolecular Solvation”, *Combinatorial and Computational Geometry*, MSRI Publications Vol.52, 2005

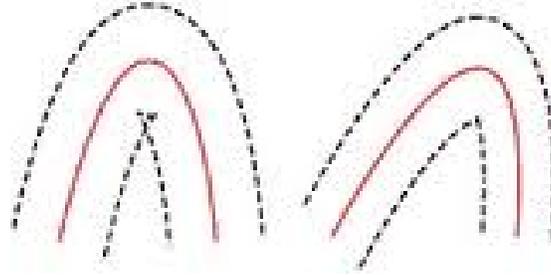


Fig. 2: Singularidades normales asociadas a fenómenos de propagación

de nuevas formas) o en un pequeño entorno del tubo (propagación, procesos "explosivos").

- *Modelado semi-automático* a partir de información digital capturada mediante dispositivos de imagen o de rango ⁴

La Visualización de un tubo se puede realizar de diferentes formas dependiendo de la utilización de la información "tangencial" o bien "normal":

- *Información tangencial*: Dada una curva directriz $\gamma(t)$ (nervio del tubo), calcular la familia $F(t, r_t)$ de las esferas $\mathbb{S}_t^2(r_t)$ centradas en un punto genérico de $\gamma(t)$ y eliminar t utilizando $F(t, r_t) = 0$ y $\frac{\partial F(t, r_t)}{\partial t} = 0$
- *Información normal*: Discretizar la curva directriz $\gamma(t)$ en una colección de puntos \mathbf{p}_i para $1 \leq i \leq N$, insertar una circunferencia $C(\mathbf{p}_i, r_i)$ en el plano normal $N_{\mathbf{p}_i}\gamma(t)$ a la trayectoria para cada punto de la discretización, enlazar circunferencias $C(\mathbf{p}_i, r_i)$ (secciones ó slices) del tubo, interpolar entre las circunferencias y suavizar el resultado final

Ambos métodos dan lugar a singularidades asociadas a la proyección sobre el espacio de parámetros (lugar discriminante) ó bien a "pliegues" ó solapamientos (ver capítulo anterior) ó bien auto-intersecciones (como ocurre con las cáusticas ⁵). Una clasificación de estas singularidades se puede ver en Bruce and Giblin: *Curves and Singularities*, Cambridge Univ. Press (2nd ed).

1.1.4. Ejemplo 2: El toro n-dimensional

El toro n -dimensional definido como $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$.

⁴ Los dispositivos de rango proporcionan de forma automática una representación planar o espacial de los datos capturados por sensores activos, es decir, que emiten una onda (acústica, electromagnética, nuclear) y codifican la respuesta en términos geométricos (altura, profundidad, orientación). Diferentes aplicaciones de estos tópicos (imágenes biomédicas, prototipado industrial) se muestra en el módulo 4 del CEViC dedicado a Reconocimiento

⁵ El estudio y clasificación de las cáusticas como envolvente de las normales se inició a mediados del s.XVIII para mejorar el diseño de telescopios y, más adelante, de microscopios

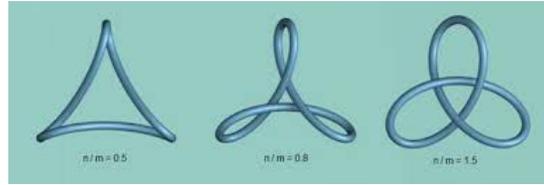


Fig. 3: Nudo tórico de tipo (2, 3)

Ejercicio.- Dar una parametrización local del toro n -dimensional. A las curvas descritas por la condición $\theta_i = cte.$ se les llama *meridianos* del toro.

Para fijar ideas, nos restringimos inicialmente al caso de un toro 2-dimensional.

El toro 2-dimensional \mathbb{T}^2 se puede visualizar como el borde de un donuts. Una versión macizada de este toro se puede obtener como el producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$; más abajo veremos una construcción más intuitiva en términos de la variedad con borde $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Desde el punto de vista topológico, el toro \mathbb{T}^2 es una variedad cociente dada como la imagen de un rectángulo por el paso al cociente que identifica lados paralelos con la misma orientación. Además de esta representación “estandar” existen infinitas formas de realizar el embebimiento que dan lugar a *torus anudados*; los más sencillos son los de tipo (p, q) (con p y q primos entre sí) que están estrechamente relacionados con singularidades de la forma $y^q = x^p$ ⁶

Nota sobre invariantes algebraicos.- La identificación anterior para construir el toro muestra que sólo hay dos caminos cerrados (topológicamente equivalentes a \mathbb{S}^1) ó lazos sin autointersecciones que no son contractibles a un punto (en el caso de un tubo sólo hay un lazo no contractible). En Topología Algebraica se muestra que esta simple observación implica que el primer grupo de homotopía $\pi_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z})$ (intuitivamente clases de caminos módulo deformaciones) ó el primer grupo de homología $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z})$ (clases de 1-ciclos que no son 1-bordes) ó de cohomología $H^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R})$ (clases de 1-formas diferenciales cerradas que no son exactas) está generado siempre por dos elementos.

Los tubos descritos en el apartado precedente se pueden sumergir en un toro dando lugar a los *Nudos tóricos*. Para fijar ideas, nos restringimos al caso del toro 2-dimensional. Un *nudo tórico* de tipo (a, b) se anuda a veces en torno a una circunferencia \mathbb{S}^1 y b veces en torno a la otra circunferencia \mathbb{S}^1 del toro \mathbb{T}^2 (análogamente, para el toro n -dimensional). *Ejercicio.*- Dibujar un nudo e tipo (2, 3) y relacionarlo con la topología global de la cúspide en el plano proyectivo. Si (a, b) no son primos entre sí, entonces el nudo tórico puede tener varias componentes.

Una representación implícita del toro 2-dimensional en coordenadas cilíndricas esta dada por $(r - 2)^2 + z^2 = 1$ donde $r = \cos(q\phi) + 2$ y $0 < \phi < 2\pi$. Con

⁶ El estudio de los nudos utiliza herramientas de Topología Algebraica; la conexión con singularidades se estudia en Geometría Algebraica de Curvas

respecto a esta representación, un nodo de tipo (a, b) . Una *parametrización del nudo tórico* está dada por

$$x = r \cos(a\phi) \quad , \quad y = r \sin(a\phi) \quad , \quad z = -\sin(b\phi)$$

El estudio de los nodos (incluyendo los nodos tóricos) es uno de los tópicos centrales de la Topología Geométrica. Desempeña un papel importante en los modelos topológicos para la clasificación de variedades tridimensionales (programa de W.Thurston). La visualización del caso $3D$ es muy útil para un gran número de representaciones utilizadas en Genética, Biología Molecular ó Farmacología.

En el terreno de la Geometría Algebraica Local o la Geometría Analítica, tiene interés adicional asimismo para el estudio de la topología de hipersuperficies complejas con singularidades aisladas y, de una forma especial, con singularidades de tipo monomial.

Parametrización de movimientos de robots con juntas rotaciones y esféricas.- El ejemplo del toro n -dimensional \mathbb{T}^n es muy significativo para aplicaciones relacionadas con el *espacio de configuraciones* \mathcal{C} ó articular de un robot con juntas rotacionales ó esféricas. En virtud del Teorema de Euler, cada rotación en el espacio $3D$ se puede expresar como el producto de tres rotaciones planares. Por ello, cada junta esférica se puede construir como tres juntas rotacionales contenidas en diferentes planos. Una descripción computacionalmente más eficiente utiliza la representación de rotaciones en el espacio mediante cuaterniones \mathbb{H} .

En particular, un robot con n juntas esféricas y rotacionales equivale a un robot con $N = 3n$ juntas rotacionales y se representa mediante NR , donde N representa el número de juntas rotacionales R . Así p.e. los robots en las cadenas de montaje suelen ser de tipo $4R$ ó $5R$; un robot de brazo acabado en una pinza es un robot de tipo $6R$; una versión simplificada de robot humanoide le muestra como de tipo NR donde $N \geq 20$; un robot humanoide es una colección de cadenas cinemáticas conectadas a un elemento común que juega el papel de cuerpo (este tipo de robots reciben el nombre de "multicuerpos"). Como conclusión, el espacio ambiente teórico para un robot de tipo NR es por tanto un toro N -dimensional. Las restricciones geométricas, cinemáticas y dinámicas sobre los mecanismos del robot, restringen el espacio de configuraciones a una unión de subvariedades (eventualmente disjuntas) del toro N -dimensional.

1.1.5. Ejemplo 3: El producto fibrado

Dadas dos C^r -aplicaciones $f : M \rightarrow P$, $g : N \rightarrow P$ el *producto fibrado* $M \times_P N$ de variedades se define como

$$\{(\underline{p}, \underline{q}) \in M \times N \mid f(\underline{p}) = g(\underline{q})\}$$

El producto fibrado tiene una propiedad universal que le caracteriza como el *objeto minimal* a través del cual se factorizan todas las aplicaciones que puedan darse sobre los factores. De una manera más formal, dados dos morfismos

$p : X \rightarrow Z$ y $q : Y \rightarrow Z$, el *producto fibrado* es un nuevo objeto $P := X \times_Z Y$ tal que el diagrama siguiente;

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \rightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \rightarrow & Z \end{array}$$

conmuta con la siguiente propiedad universal: Para cualquier terna (Q, p', q') que haga conmutativo el diagrama, es decir, tal que $p' \circ f = q + \circ g$, existe un único morfismo $u : Q \rightarrow P := X \times_Z Y$ tal que

$$p' \circ u = p \quad , \quad q' \circ u = q$$

Esta propiedad recibe el nombre de *pull-back* en la literatura anglosajona y permite calcular la imagen recíproca de datos construidos mediante aplicaciones; el caso más simple corresponde a aplicaciones lineales y su extensión a aplicaciones multilineales ⁷.

De una forma más literaria, si se dispone de una estructura (parametrización, fibrición, p.e.) representada por $q : Y \rightarrow Z$ el espacio de llegada Z y se tiene otro espacio X (no necesariamente una variedad) que se aplica sobre Z , esta construcción permite “transferir” la construcción dada sobre Z a una construcción “similar” (eventualmente deformada por p) al espacio X . Esta construcción se utiliza en un gran número de ejemplos relacionados Geometría Algebraica y Geometría Analítica, incluyendo cálculo diferencial, teoría de intersección ó análisis de familias de variedades parametrizadas por otra variedad.

En el §2,2, veremos bajo qué condiciones dicho producto fibrado es una subvariedad de la variedad producto $M \times N$.

En particular, si interpretamos $q : Y \rightarrow Z$ como un “patrón típico” sobre el que se tiene una estructura adicional representada por el espacio Y , su imagen recíproca via $p : X \rightarrow Z$ permite inducir un “patrón similar” sobre X . Una aplicación inmediata de este enfoque afecta al modelo de iluminación de un objeto que se realiza a partir de una colección de focos que inciden sobre una esfera $\mathbb{S}^2 = Z$ y que proporcionan una respuesta “radiométricamente medible” en términos de la aplicación $q : Y \rightarrow \mathbb{S}^2$ (combinando especularidad y mapas de reflectancia, p.e.). Si X es otro objeto (simplemente conexo) deformable en $Z = \mathbb{S}^2$ mediante una aplicación $p : X \rightarrow Z$ (inicialmente conforme), entonces el producto fibrado transferir la información radiométrica de la esfera al objeto X ⁸

En la Fig.4 se muestra un ejemplo relacionado con la aplicabilidad de esta construcción a la combinación de reflexión especular y mapas de reflectancia sobre modelos de iluminación asociados a diferentes localizaciones de focos de utilidad para modelos de sombreado para personajes o en escenarios de videojuegos, p.e. En este caso, el control de la iluminación se lleva a cabo en términos

⁷ La extensión de esta construcción al cálculo de imágenes inversas de formas diferenciales de grado arbitrario se desarrolla al final del módulo 2 y en el módulo 4 de la asignatura

⁸ Esta construcción se utiliza para renderizar tanto objetos como imágenes



Fig. 4: Combinando reflexión especular y mapas de reflectancia

del modelo ondulatorio de la luz ⁹. El modelo ondulatorio utiliza una simplificación basada en rectas sobre las que se superpone una información radiométrica que se propaga en el espacio (incluyendo eventualmente fenómenos disipativos). Las herramientas de Informática Gráfica que permiten gestionar la geometría se engloban en Ray Tracing, mientras que las que incluyen efectos radiométricos se incluyen en Ray Casting.

Ejercicio (avanzado).- Diseñar un modelo teórico que permita adaptar diferentes modelos de iluminación usando información sobre el comportamiento especular y de reflectancia asociados a una esfera.

1.2. Restricción de estructuras

En los Ejercicios 1 y 4 del capítulo 1, se ha mostrado cómo en ocasiones una aplicación permite inducir una estructura diferenciable sobre cierto espacio topológico. Este tipo de construcciones resulta de gran utilidad para comparar variedades ó estructuras que podamos dar sobre un mismo soporte. La clave de los argumentos de compatibilidad estriba en la condición de regularidad; una vez fijados sistemas de coordenadas locales en los espacios de partida y llegada, la condición de regularidad se expresa en términos de la matriz jacobiana de cambio de base que siempre tiene rango máximo.

El caso más simple no trivial corresponde a inducir una estructura de C^r -variedad sobre un abierto mediante la operación restricción. El ejemplo trivial de esta situación corresponde a una bola abierta de \mathbb{R}^n . Un ejemplo sencillo, corresponde al grupo lineal general

$$GL(n; \mathbb{R}) := \{A \in \text{End}(V) \mid \det(A) \neq 0\}$$

que describe los automorfismos de un espacio vectorial n -dimensional V . Usando la topología de los coeficientes, obtenemos una forma multilineal no nula que define un abierto sobre el espacio \mathbb{R}^{n^2} de los coeficientes a_{ij} de la matriz A .

⁹ Los modelos basados en los aspectos corpusculares de la luz utilizan modelos basados en Física de partículas.

1.2.1. Estructuras suaves sobre cerrados

Supongamos que M es una subvariedad topológica lisa (no singular) de \mathbb{R}^N . Entonces, la restricción (imagen recíproca) de la C^∞ -estructura de \mathbb{R}^N induce una C^∞ -estructura sobre M compatible con la C^0 -estructura a la que se llama estándar.

Comprueba que cada uno de las C^0 -variedades siguientes M hereda una estructura como C^∞ -variedad

- Cualquier cuádrica regular del espacio ordinario.
- Cualquier hipersuperficie no-singular en el espacio ordinario.
- Uniones ó intersecciones suaves de los casos anteriores.

Algunas variedades pueden soportar C^r -estructuras no-equivalentes entre sí que son compatibles con la misma estructura topológica. A dichas estructuras se les llama *exóticas* y desempeñan un papel importante en el problema de clasificación de variedades dentro de la Topología Geométrica. Un ejemplo típico es el de \mathbb{S}^7 que soporta 28 estructuras no-equivalentes entre sí. En este Curso no se aborda este tipo de problemas ¹⁰.

Otro tipo de variedades topológicas que no se consideran en Geometría Diferencial (pero sí en Topología Algebraica) son las que se obtienen como paso al límite de construcciones recurrentes asociadas a operaciones de cirugía; estas operaciones se describen en términos de secciones por discos \mathbb{D}^2 (sin “desconectar” la variedad) y pegado de tubos a lo largo de esos discos a lo largo de dichos discos; un ejemplo típico es la *esfera cornuda* de Alexander que se muestra en el Fig.5. Este procedimiento da lugar a fenómenos de “bifurcación infinita” de interés para la región de caos en modelos de bifurcación. Asimismo, estas construcciones son clave para la clasificación topológica de variedades 3-dimensionales (según el programa de Thurston), que presenta aún una gran cantidad de problemas abiertos ¹¹

1.2.2. Algunos grupos clásicos

Los grupos clásicos se definen como cerrados del grupo lineal general caracterizados por la conservación de una forma cuadrática (grupos ortogonal para la métrica euclídea ó unitario para la métrica hermitica, p.e.), una forma bilineal (grupo simpléctico para la matriz J que extiende el producto complejo, p.e.) ó una forma multilineal (grupo especial lineal para la conservación del determinante).

Para comprobar que un grupo clásico es una C^r -variedad es necesario verificar que la aplicación $G \times G \rightarrow G$ dada por $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ es de clase C^r ,

¹⁰ Ver http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Exotic_spheres para una introducción

¹¹ Estos tópicos se abordan en módulos avanzados de Topología Geométrica que combinan herramientas procedentes de la Topología Algebraica y de Topología Diferencial

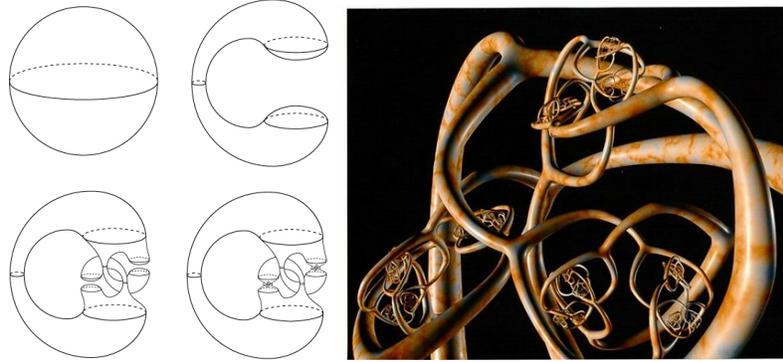


Fig. 5: Construcción y una visualización de la esfera de Alexander

propiedad que es inmediata utilizando la topología de los coeficientes de las matrices.

Las intersecciones de dos grupos clásicos tiene asimismo estructura de C^r -variedad; en particular, los grupos especial ortogonal $SO(n; \mathbb{R}) := SL(n; \mathbb{R}) \cap O(n; \mathbb{R})$ y el grupo especial unitario $SU(n; \mathbb{C}) := SL(n; \mathbb{C}) \cap U(n; \mathbb{C})$ son C^r -subvariedades.

Ejemplo.- Los movimientos rígidos en el espacio están dados por rotaciones y traslaciones. Las rotaciones se describen mediante elementos del grupo especial ortogonal

$$SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1, A \cdot {}^t A = I_n\} = SL(n; \mathbb{R}) \cap O(n; \mathbb{R})$$

que es intersección del grupo especial lineal y del grupo ortogonal. En particular, el conjunto de las transformaciones rígidas en el espacio de trabajo de un robot (traslaciones y rotaciones) adquiere asimismo estructura de variedad diferenciable.

1.3. Variedades con borde

Se dice que $B \subset \mathbb{R}^n$ es una *región acotada* si $\exists R \gg 0$ tal que $B \subset \mathbb{B}(R, \underline{0})$ donde $\mathbb{B}(R, \underline{0})$ es la bola de radio R con centro el origen. Por traslación a cualquier punto, esta noción se extiende a cualquier otro punto base $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ y a C^r -variedades inmersas en \mathbb{R}^N para $N \gg 0$ (más adelante se muestra que cualquier variedad compacta verifica esta condición).

1.3.1. La noción de semiespacio

Un *semiespacio de* \mathbb{R}^m es un subconjunto de la forma $\mathbf{H}^m := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \lambda(x) \geq 0\}$, donde $\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal. Si $\lambda \equiv 0$, entonces

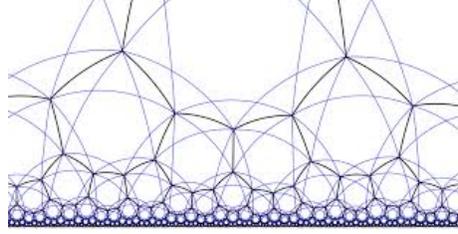


Fig. 6: PL-aproximaciones a Geodésicas en el Semiplano superior de Poincaré

$\mathbf{H}^m = \mathbb{R}^m$. En caso contrario, diremos que \mathbf{H}^m es un *semiespacio propio* (ó simplemente semiespacio).

Llamamos *borde de \mathbf{H}^m* y lo representamos por $\partial\mathbf{H}^m$ al $\text{Ker}(\lambda)$. Llamamos *interior de \mathbf{H}^m* , y lo representamos por $\text{Int}(\mathbf{H}^m)$ al complementario del borde en \mathbf{H}^m . En particular, $\partial\mathbf{H}^m \simeq \mathbb{R}^{m-1}$ para cualquier m . El interior y el borde son disjuntos.

El ejemplo más simple de subvariedad con borde es el semiespacio superior \mathbb{H}^2 . Este ejemplo no es trivial; basta visualizar la geometría de las geodésicas y su aproximación lineal a trozos como se muestra en la figura 5.

1.3.2. C^r -Estructura con borde

Diremos que (M, \mathcal{A}_M) es una C^r -variedad con borde (donde $0 \leq r \leq \infty$ ó $r = \omega$), si cualquier punto $x \in M$ admite un entorno que es C^r -equivalente a \mathbb{R}^m ó al borde del semiespacio superior \mathbf{H}^m donde

$$\mathbb{H}^m := \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$$

Las mallas corresponden al caso $r = 0$, proporcionan una primera aproximación lineal a trozos al objeto de gran utilidad para el modelado a bajo nivel. En este caso, las aplicaciones de clase C^r son de tipo afín. Habitualmente (salvo que se indique lo contrario), se supone que el semiespacio superior está orientado positivamente, es decir, de acuerdo con el vector $(0, \dots, 0, -1)$ orientado hacia el exterior del semiespacio.

Sea $x \in U \subset M$, con U abierto y (φ, U) una carta que da una C^r -equivalencia entre U y un abierto del borde del semiespacio \mathbf{H}^m . Diremos que $x \in M$ es un *punto borde de M* , si $x \in \varphi^{-1}(\partial\mathbf{H}^m)$. En caso contrario, diremos que es un *punto interior de M* . Denotaremos mediante ∂M a los puntos del borde de M y mediante $\text{Int}(M)$ a los puntos del interior de M . La variedad M es unión disjunta de $\text{Int}(M)$ y de ∂M .

La noción de ser *punto interior* ó del borde para una variedad no depende de la carta elegida. En el caso $r = 0$ (categoría topológica), este resultado es consecuencia del *Teorema de la Invariancia del Dominio* y si $r \geq 1$ es consecuencia



Fig. 7: Modelado basado en la representación del borde

del Teorema de la Función Inversa. Esta observación muestra que la noción de C^r -variedad con borde está bien definida, para $0 \leq r \leq \infty$ ó $r = \omega$ y permite comprobar que las nociones de *punto interior* y *punto borde* de una variedad son independientes de la carta usada.

Algunas de las estrategias más comunes para el modelado utilizan herramientas basadas en la representación del borde (B-repr). Estas herramientas utilizan PL/PQ-modelos (PL/PQ: Piecewise Linear/Quadratic) ó bien superficies B-splines dadas localmente como producto “pesado” de curvas racionales de grado bajo que son de gran utilidad para versiones modernas de CAD/CAM¹².

La noción de subvariedad se extiende en la forma obvia al caso de subvariedades con borde. Por extensión, toda variedad es una variedad con borde, aunque dicho borde puede ser vacío. Por ello, sólo cuando $\partial M \neq \emptyset$ hablaremos de variedades con borde propiamente dichas, y las denotaremos mediante $(M, \partial M)$.

Ejercicio.- Comprueba que $\text{Int}(M)$ y ∂M son subvariedades de M , tales que $\text{Int}(M)$ es abierta m -dimensional y ∂M es cerrada $(m - 1)$ -dimensional.

Nota 1.- No hay que confundir la noción de punto frontera con punto del borde. En el caso de subvariedades de codimensión 1, coinciden, pero todos los puntos de una subvariedad de codimensión > 1 son puntos del borde (razonarlo como ejercicio).

Nota 2.- Si se trabaja con variedades que sean siempre espacios métricos (como es usual en el Análisis Clásico), se puede decir que una variedad con borde está caracterizada por la condición de que cualquier punto $p \in M$ admita un entorno equivalente a un abierto de \mathbb{H}^m ; esto se debe a la descripción de los abiertos de \mathbb{H}^m en términos métricos, construcción que no es posible llevar a cabo en la situación general de C^r -variedades.

¹² Las curvas racionales y las superficies que se construyen a partir de ellas se estudian en Geometría Algebraica

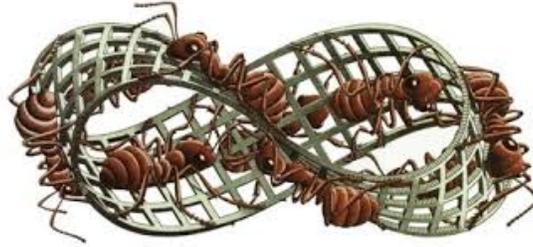


Fig. 8: Banda de Moebius (según Escher)

1.3.3. Ejemplos no-triviales

Además del semiespacio superior \mathbf{H}^n (que es el ejemplo trivial), dos de los ejemplos de variedades con borde más elementales están dados por

- El *disco* ó la *bola cerrada* en \mathbb{R}^n , es decir, $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 \leq 1\}$ cuyo borde es $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = 1\}$
- Una sección de la banda de Moebius obtenida sustituyendo $[-1, 1]$ en lugar de \mathbb{R} en la descripción dada en el *Ejercicio 1.1.8.3*. Razonar el modelo topológico de este borde, así como el que se obtiene si cortamos la banda de Moebius a lo largo de una sección (distinguir las diferentes posibilidades a que puede dar lugar la elección de dicha sección).

Estos dos ejemplos básicos se pueden utilizar para generar ejemplos más sofisticados mediante las operaciones de producto y restricción. Así, por ejemplo, el *toro macizo* 3-dimensional en \mathbb{R}^3 dado por $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ cuyo borde es el toro 2-dimensional $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Habitualmente, se representa una variedad con borde como un par $(M, \partial M)$. El borde ∂M de una variedad con borde M es una *subvariedad* de M de codimensión 1; comprobarlo como ejercicio (*Indicación*: verificar que el borde ∂M es invariante por cambios de carta, lo cual es consecuencia del Teorema de la Función Inversa ó de la Invariancia del Dominio, para $r = 0$; ver Guillemin y Pollack: *Differential Topology*, pp.59-60, para más detalles).

Dada una función f sobre variedad con borde $(M, \partial M)$ denotaremos mediante ∂f a la restricción $f|_{\partial M}$ de f al borde ∂M de M . Por ser ∂M una subvariedad de M , se tiene que

$$d_x(\partial f) = d_x f|_{T_x(\partial M)}, \forall x \in M.$$

1.3.4. Apéndice: Pegado de Variedades con Borde

Sean $(M, \partial M)$ y $(N, \partial N)$ dos variedades con borde, tales que $\partial M \simeq \partial N$. Supongamos que ∂M es difeomorfo a ∂N , donde el difeomorfismo está dado por

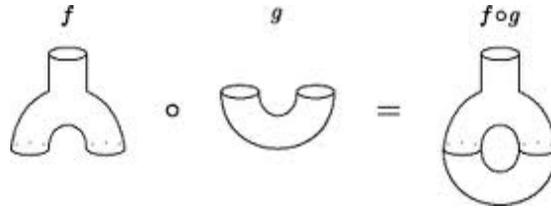


Fig. 9: Pegado de superficies cobordantes

una aplicación g . Construimos el *espacio de adjunción* $P := M \cup_g N$, obtenido identificando los puntos relacionados por la aplicación g . Entonces, podemos dotar a este espacio de adjunción P de una estructura de variedad diferenciable que extiende las estructuras de M y N (la demostración de que todas las estructuras obtenidas sobre P por este procedimiento son difeomorfas, no es elemental, por lo que prescindiremos de este hecho; para más información ver Hirsch, 1976, Chap.8). El pegado de variedades tiene gran utilidad para variedades estratificadas ó para la generación y animación de objetos articulados (actores virtuales, p.e.) en aplicaciones multimedia.

La descripción de la clasificación de las 2-variedades compactas conexas (dada en la Topología Algebraica ó en Topología Geométrica Básica) es un caso particular de la construcción anterior. En efecto, recordemos que en dicha situación la cirugía de 2-variedades consiste en "cortar" un disco en cada una de las variedades y "pegar" las variedades, mediante la identificación de los puntos pertenecientes al borde de cada uno de los discos. De este modo, se describen los modelos elementales dados por la suma conexas (ó amalgamada) de toros (para el caso orientable) ó de toros con el plano proyectivo (para el caso no-orientable).

Esta estrategia se extiende al pegado de variedades, mediante el recorte de discos y el pegado de variedades a lo largo de dichos discos. El cobordismo proporciona soporte para el pegado topológico; el suavizado se realiza mediante isotopías que son una versión diferenciable de homotopías generadas mediante integración de campos.

La suma conexas de variedades más generales se define de forma similar y lo que estamos añadiendo en la noción de espacio de adjunción es la estructura diferenciable de cada una de las variedades que "pegamos". Este tipo de construcciones se desarrollan en la Topología Algebraica y en la Topología Diferencial Global, dentro del apartado de Cirugía de Variedades por lo que no insistiremos en ellas.

La forma explícita de construir aplicaciones *globales* de clase C^r (para $1 \leq r \leq \infty$) obtenidas "pegando" datos locales requiere el uso de "particiones de la unidad", tópico que se desarrolla en la tercera sección de este capítulo y que permite formular la Teoría de Integración sobre Variedades.

2. Estructura Cociente

En esta sección se presenta la segunda gran construcción de variedades utilizando el cociente por una relación de equivalencia. En el caso de variedades, la relación de equivalencia está frecuentemente inducida por la acción $\alpha : G \times X \rightarrow X$ de un grupo G sobre una C^r -variedad X . De una forma abstracta y a diferencia del producto, la estructura cociente se puede entender como un “objeto inicial” para las aplicaciones que hacen conmutativos los diagramas correspondientes.

El grupo G puede ser continuo ó discreto. Los grupos clásicos (subgrupos lineales del grupo lineal general) proporcionan ejemplos de grupos continuos. Ejemplos de grupos discretos vienen dados por \mathbb{Z}/p (para cualquier primo p) ó bien subgrupos discretos de $SL(n)$ (de interés para Geometría Algebraica, Teoría de Números ó el estudio de funciones automorfas sobre un cociente, p.e.). Los ejemplos correspondientes a grupos discretos son más avanzados y se desarrollan en Topología Algebraica, Geometría Algebraica / Analítica (para cocientes por acciones propiamente discontinuas) ó Teoría de Números, respectivamente.

Cuando un grupo continuo opera de forma transitiva, el cociente hereda una estructura como espacio homogéneo, lo cual facilita el estudio de las propiedades de la variedad; se describen algunos casos ya conocidos (espacio cartesiano ordinario, la esfera ó el espacio proyectivo) y se presta especial atención a otros con una estructura algo más sofisticada (grassmannianas, variedades de banderas) debido a su importancia en relación con problemas de caracterización y clasificación de variedades y de morfismos. Una extensión del enfoque geométrico al caso de espacios de Banach facilita una reformulación geométrica de aspectos básicos del Análisis Funcional que tienen interés para incorporar fenómenos “naturales” que aparecen en la Mecánica Cuántica y que no es posible incorporar en el marco tradicional basado en espacios de Hilbert. Ello justifica alguna de las extensiones presentadas al final de esta sección.

2.1. Cociente topológico. Ejemplos

Dada una relación de equivalencia \sim sobre un espacio topológico X , podemos dotar al cociente X/\sim de una estructura de espacio topológico, a partir de la familia $\{U \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$, donde $\pi : X \rightarrow X/\sim$ es la aplicación natural de paso al cociente.

La verificación de la condición Hausdorff para un espacio cociente X/\sim no es elemental, y frecuentemente es la primera obstrucción a que un espacio cociente admita una estructura de variedad.

Recordemos de la Topología General que, si un cociente X/\sim es Hausdorff, entonces el grafo Γ_{\sim} de la relación de equivalencia \sim es *cerrado* en $X \times X$. Recíprocamente, si la relación \sim es abierta y el grafo Γ_{\sim} es cerrado como subconjunto de $X \times X$, entonces el cociente X/\sim es Hausdorff.

De hecho, la variedad grafo de una C^r -aplicación entre C^r -variedades es una C^r -subvariedad de la variedad producto (ver ejercicios del capítulo 1). La retracción del grafo de la aplicación a un esqueleto proporciona una representación

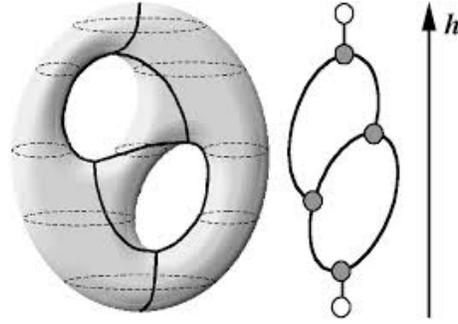


Fig. 10: Representación simbólica de la forma mediante de grafo de Reeb

simbólica (grafo) que permite identificar la órbita genérica y sus adyacentes siguiendo la estructura simbólica. El *grafo de Reeb* proporciona un representación simbólica que resulta de gran utilidad para gestionar las deformaciones de superficies que tienen los mismos invariantes topológicos, pero presentan un comportamiento métrico completamente diferente.

Estamos interesados en identificar las funciones que están definidas propiamente sobre el cociente por una relación de equivalencia ó por una acción de un grupo G . En este último caso, estas funciones se llaman G -invariantes y proporcionan una de las herramientas fundamentales para el estudio de invariantes en Geometría. Para fijar ideas, empezamos por el caso más simple correspondiente a la circunferencia como espacio cociente y las funciones invariantes por la acción del grupo \mathbb{S}^1 que, obviamente, son las funciones periódicas.

2.1.1. La circunferencia

Para mostrar \mathbb{S}^1 como un cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ se puede utilizar la representación compleja inducida por $p : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida mediante $p(x) = \exp(ix)$. El origen (punto base) es $p(0) = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$; esta aplicación se puede visualizar como una recta que se "envuelve" una cantidad infinita de veces en torno a la circunferencia. De una forma más explícita, si $x - y = 2\pi k$ entonces $p(x) = p(y)$. Por ello, la circunferencia es el cociente de \mathbb{R}^1 por la relación de equivalencia $x \sim y \Leftrightarrow x - y = 2\pi k$. La clase de equivalencia $[x] = \{y \in \mathbb{R} \mid y = x + 2k\pi\}$ se identifica con el punto complejo $\exp(ix) \in \mathbb{S}^1$. Esto da la estructura de \mathbb{S}^1 como cociente de \mathbb{R} por el subgrupo discreto de las traslaciones $2\pi\mathbb{Z}$ (no confundir con la acción de \mathbb{R} como grupo continuo).

Supongamos que $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifica que $\tilde{f}(0) = 0$ y $\tilde{f}(x + 2\pi) \sim \tilde{f}(x)$ (condición de periodicidad). Entonces, para cualquier x se tiene que $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2k\pi$ (se dice entonces que f tiene grado k). Además, si $x \sim y$, entonces

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) = \tilde{f}(y + 2\pi n) - \tilde{f}(y) = \tilde{f}(y) + 2\pi kn - \tilde{f}(y) = 2\pi kn$$

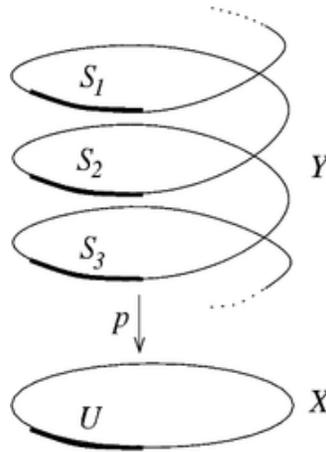


Fig. 11: Aplicación recubridora

por lo que $\tilde{f}(x) \sim \tilde{f}(y)$. En consecuencia, $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ define de forma única una aplicación continua $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ mediante $f([x]) = k\tilde{f}(x)$ con el origen como punto fijo.

Ejercicio.- Verificar que si $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ deja invariante $(1, 0) \in \mathbb{S}^1$ (es decir, el punto $1 \in \mathbb{C}$) entonces, r induce una aplicación $\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ t.q. $\tilde{f}(0) = 0$ y $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi$

Como resumen, las funciones “bien definidas” sobre la circunferencia \mathbb{S}^1 que dejan invariante $(1, 0) \in \mathbb{S}^1$ como cociente de \mathbb{R} son las *funciones periódicas sobre \mathbb{R}* que dejan invariante el origen y recíprocamente. Se dice entonces que \mathbb{R} es un “recubre” a \mathbb{S}^1 un número infinito de veces; como \mathbb{R} es simplemente conexo, en Topología Algebraica se dice que \mathbb{R} es el *espacio recubridor universal* de \mathbb{S}^1 (ver más abajo para la noción de espacio recubridor).

2.1.2. El toro

El *toro* 2-dimensional $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ obtenido como el cociente de \mathbb{R}^2 por la relación de equivalencia $(x, y) \simeq (x + 1, y) \simeq (x, y + 1)$ (visualizadlo como la relación que identifica lados paralelos del cuadrado unidad $[0, 1]^2$ orientados con la misma orientación).

Esta construcción se extiende al toro m -dimensional $\mathbb{T}^m := \mathbb{S}^1 \times \dots^{(m)} \dots \times \mathbb{S}^1$.

Análogamente, el producto finito de esferas de dimensión arbitraria es una variedad diferenciable. En particular, el espacio de configuraciones \mathcal{C} de un robot con juntas rotaciones ó esféricas es una variedad diferenciable.

Asimismo, el espacio de trabajo \mathcal{W} correspondiente a las posiciones del efector final de un robot es una variedad diferenciable contenida en el complementa-



Fig. 12: Brazo biónico robótico

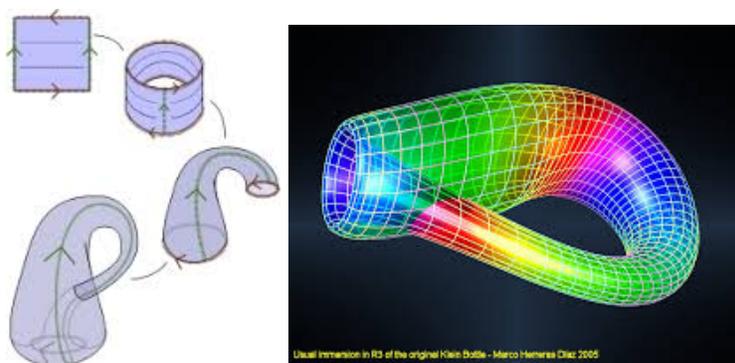


Fig. 13: Botella de Klein como variedad cociente y visualización parametrizada

rio del espacio de obstáculos, pues se representa en términos del grupo euclídeo (producto semidirecto del grupo de rotaciones y el grupo de traslaciones en el espacio tridimensional). Esta descripción es fundamental para el diseño e implementación de dispositivos de control y para optimizar la realización de tareas en el espacio de trabajo del robot.

Ejercicio.- Verifica que las funciones doblemente periódicas son las funciones bien definidas sobre \mathbb{T}^2 .

2.1.3. La botella de Klein

La *botella de Klein* 2-dimensional KB obtenido como el cociente de $[0, 1]^2$ por la relación que identifica dos lados paralelos orientados con la misma orientación y otros dos con la orientación opuesta.

Ejercicio.- Caracteriza las funciones definidas sobre el rectángulo que dan lugar a funciones bien definidas sobre la botella de Klein.

2.1.4. El plano proyectivo real

El plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2 := \mathbb{S}^2 / \sim_a$ donde \sim_a es la relación antipodal que identifica puntos diametralmente opuestos. El plano proyectivo real admite un recubrimiento minimal por tres abiertos coordenados

$$U_i = D^+(x_i) := \{\underline{x} \in \mathbb{P}^2 \mid x_i \neq 0\} = \left\{ \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i} \right) \mid x_i \neq 0 \right\} \simeq \mathbb{A}^2$$

para $0 \leq i \leq 2$, de modo que el cambio de carta $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sobre $U_{ij} := U_i \cap U_j$ está dado por $x_i x_j^{-1}$. Esta construcción se extiende de forma inmediata al espacio proyectivo n -dimensional real o complejo y proporciona asimismo la estructura del espacio proyectivo como variedad proyectiva (obtenida mediante el pegado de cartas afines).

Aunque no se pueda “sumergir” en \mathbb{R}^3 , si permitimos auto-intersecciones, hay diferentes modelos para visualizar el plano proyectivo real en el espacio cartesiano tridimensional. Los más conocidos son la superficie romana de Steiner¹³ y la superficie de Boy¹⁴ con sus variantes realizadas por Bryant y Kusner (ver fig.13).

Desde un punto de vista más formal y para aquellas personas que tienen conocimientos de Geometría Algebraica, podemos interpretar el espacio proyectivo como el proyectivizado de $Speck[\underline{x}]$ (ideales primos del anillo de polinomios). Los polinomios invariantes por la acción de k^* son los polinomios homogéneos cuya anulación define las subvariedades proyectivas en el espacio proyectivo real. Lamentablemente, estas variedades pueden tener singularidades, por lo que no son necesariamente suaves.

Ejercicio.- Verifica que los polinomios homogéneos en 3 variables son las funciones bien definidas sobre el plano proyectivo (*Indicación:* Utiliza la representación del plano proyectivo como el resultado de “pegar” 3 copias del plano afín $D^+(x_i) = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid x_i \neq 0\}$ - ¿Cuáles son las funciones que definen el cambio de carta?

2.2. Espacios G -Homogéneos

La presencia de simetrías locales o globales en una variedad tiene múltiples ventajas tanto desde el punto de vista estático (descripción de entornos), como dinámico (fenómenos de propagación).

- Las *simetrías globales* afectan a toda la variedad y por paso al cociente se obtienen los espacios G -homogéneos que se introducen en esta subsección, pues proporcionan “ejemplos” de uso común en diferentes aplicaciones sobre los que regresamos de forma recurrente a lo largo del Curso.

¹³ Ver <http://mathworld.wolfram.com/RomanSurface.html>

¹⁴ <http://mathworld.wolfram.com/BoySurface.html>

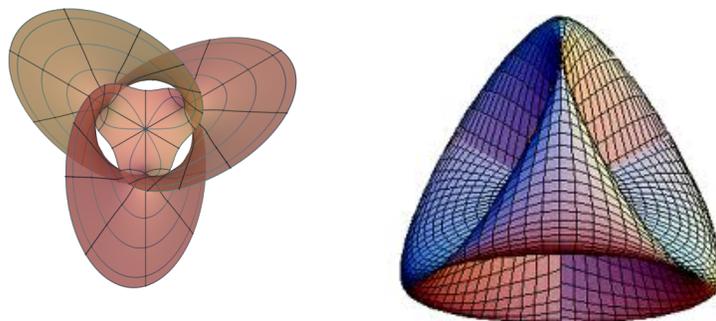


Fig. 14: Visualizaciones del plano proyectivo: Boy vs Steiner

- Las *simetrías locales* son bastante más complicadas y requieren introducir integración a lo largo de campos vectoriales o cálculo de geodésicas, p.e.. Por ello se abordan en capítulos posteriores.

En esta subsección se introduce la noción de espacio homogéneo y se muestran algunos de los ejemplos más significativos que irán apareciendo de forma recurrente a lo largo del Curso. Casos típicos de simetrías globales corresponden a las estructuras (euclídea, afín, proyectiva) superpuestas al espacio cartesiano ó la esfera. El paso al cociente por la relación antipodal para obtener el plano proyectivo, da lugar a variedades no-orientables que no admiten embebimiento en \mathbb{R}^3 ; en otras palabras, cualquier representación gráfica incluye auto-intersecciones (que corresponden a su imagen como *inmersión* y no como embebimiento). Algunas de las visualizaciones más conocidas se deben a Steiner, Boy, Hilbert, Cohn-Vossen y más recientemente a Apéry, Kusner et al; las clásicas se muestran en la figura 13

2.2.1. Caracterización de espacio homogéneos

Definición.- Diremos que un espacio topológico X es *homogéneo por la acción de un grupo* G ó G -homogéneo si existe un grupo G y una acción $\alpha : G \times X \rightarrow G$ (dada por una aplicación continua) que es

- *efectiva*: Si $g * x = x$ para cualquier $x \in X$, entonces $g = e$,
- *transitiva*: $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$ para cualquier $x \in X$ y $\forall g_1, g_2 \in G$;
- *libre*: $\forall x, x' \in X$ existe $g \in G$ tal que $x' = g * x$.

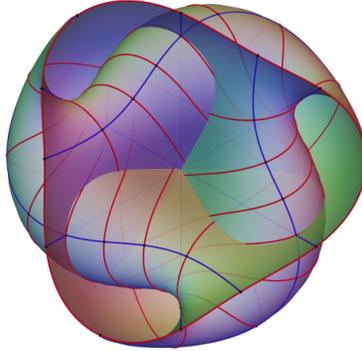


Fig. 15: Visualización de Kusner de la superficie de Boy

2.2.2. Ejemplos sencillos de espacios homogéneos

1. Cualquier grupo es un espacio homogéneo sobre sí mismo.
2. Cualquier grupo G es un espacio homogéneo sobre cualquier subgrupo H .
3. Cualquier espacio vectorial real n -dimensional sobre el cuerpo \mathbf{K} es homogéneo por la acción del grupo lineal general $G = GL(n; \mathbf{K}) := \{A \in M(n \times n; \mathbf{K}) \mid \det(A) \neq 0\}$. El complementario de $GL(n; \mathbf{K})$ es un cerrado de \mathbb{K}^{n^2} definido por $\det(A) = 0$. Por ello, $GL(n; \mathbf{K})$ es un abierto para la topología de los coeficientes.
4. El conjunto de las homotecias parametrizado por el grupo multiplicativo \mathbf{K}^* de las unidades del cuerpo \mathbf{K} es isomorfo al subgrupo de las matrices diagonales cuyas entradas son todas iguales a $\lambda \in \mathbf{K}^*$ que es un subgrupo cerrado de $GL(n+1; \mathbf{K})$; el cociente $GL(n+1; \mathbf{K})/\mathbf{K}^*$ es el proyectivizado del grupo lineal y recibe el nombre de *grupo proyectivo*.
5. Los espacios euclídeo, afin y proyectivo son homogéneos por la acción del grupo euclídeo, afin y proyectivo (especificar el grupo en cada caso como ejercicio).

A continuación se presentan algunos ejemplos avanzados de variedades como espacio cociente. La idea general común procede de una variedad M que tiene estructura de grupo G , En este caso un subgrupo $H \subset G$ que actúa sobre la variedad $G = M$ induce una estructura de variedad cociente sobre G/H (una introducción sistemática a este tópico se mostrará en el §2,5). Si el subgrupo H es además normal, entonces el cociente topológico G/H hereda una estructura de grupo cociente.

En particular, cualquier esfera n -dimensional se puede ver como un cociente de grupos dado por $SO(n; \mathbb{R})/SO(n-1; \mathbb{R})$ para el caso real ó $SU(n; \mathbb{R})/SU(n-1; \mathbb{R})$ para el caso complejo (razonar el caso cuaterniónico como ejercicio).

Una extensión de este argumento muestra asimismo la estructura como variedad de las grassmannianas y las variedades de banderas que se comenta a continuación con más detalle.

2.2.3. Grassmannianas

La *grassmanniana* $Grass(k+1, n+1)$ parametriza los subespacios $(k+1)$ -dimensionales L de un espacio vectorial $(n+1)$ -dimensional V ; la asignación que a cada subespacio $(k+1)$ -dimensional L le lleva en el espacio $(n-k)$ -dimensional cociente V/L define un difeomorfismo entre $Grass(k+1, n+1)$ y $Grass(n-k, n+1)$ a la que se llama aplicación de *dualidad*.

La grassmanniana $Grass(k+1, n+1)$ se puede describir como el cociente del grupo $GL(n+1, \mathbf{K})$ por el estabilizador de un elemento general L dado por el producto de $GL(k+1; \mathbf{K}) \times GL(n-k; \mathbf{K})$ que es obviamente un subgrupo cerrado de $GL(n+1; \mathbf{K})$, es decir,

$$Grass(k+1, n+1) = GL(n+1, \mathbf{K}) / (GL(k+1; \mathbf{K}) \times GL(n-k; \mathbf{K}))$$

El espacio topológico cociente no es un grupo, pues el denominador no es un subgrupo normal del numerador (verificarlo como ejercicio). En este apartado, estamos interesados en una descripción coordenada local de la Grassmanniana.

Para fijar ideas, nos restringimos inicialmente al caso $k=1$ y $n=3$, es decir, los subespacios 2-dimensionales de $V_{\mathbb{R}}^4 \simeq \mathbb{R}^4$ cuyos proyectivizados dan las rectas ℓ en \mathbb{P}^3 . Fijada una referencia $\mathcal{R} = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de V , para un subespacio fijo L^2 de V , mediante la acción de $GL(4; \mathbb{R})$ podemos suponer que L^2 está generado por $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Con esta notación, la grassmanniana $Grass(2, 4)$ está parametrizada localmente en el entorno del punto de $\underline{p}_{L^2} \in Q_K$ correspondiente al subespacio L^2 por matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 \\ * & * & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde el asterisco $*$ representa un parámetro variable. Más arriba se ha mostrado que la grassmanniana de rectas está dada globalmente por una hipersuperficie (la cuádrica de Klein Q_K) en el espacio \mathbb{P}^5 , por lo que la dimensión afín es 4. Estamos interesados en obtener una parametrización de los ciclos de Schubert $\sigma_{i,j}$ con $0 \leq i \leq j \leq 2$ asociados al cierre de las células cuya unión disjunta da la grassmanniana. Dejando a un lado el ciclo $\sigma_{0,0} = Q_K$ que representa toda la variedad parametrizado localmente por las 2×4 -matrices descritas más arriba, se tiene una colección de ciclos que describimos en términos de la codimensión como sigue:

1. *Codimensión 1* correspondiente a la variedad proyectiva $\sigma_{1,0} := \{\ell \subset \mathbb{P}^3 \mid \ell \cap \ell_0 \neq \emptyset\}$ que es una sección hiperplana Q_K (variedad no-singular)

$$\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 1 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fig. 16: Ciclos de Schubert de Grass(2,4)

2. *Codimensión 2* que puede corresponder a dos casos:

- $\sigma_{2,0} := \{\ell \subset \mathbb{P}^3 \mid p_0 \in \ell\}$ que es un plano proyectivo \mathbb{P}^2
- $\sigma_{1,1} := \{\ell \subset \mathbb{P}^3 \mid \ell \subset \pi_0\}$ que es otro plano proyectivo \mathbb{P}^2 isomorfo al dual de π_0'

3. *Codimensión 3* correspondiente a la variedad proyectiva $\sigma_{2,1} := \{\ell \subset \mathbb{P}^3 \mid p_0 \in \ell \cap \ell_0 \neq \emptyset\}$ que es una recta proyectiva \mathbb{P}^1

4. *Codimensión 4* correspondiente al punto $\sigma_{2,2} := \{\ell_0\}$

Nótese que el subíndice de estos ciclos corresponde a los puntos de coordenadas naturales que están “por debajo de una escalera” con pendiente +1 (dibujarlo)¹⁵.

A estos ciclos se les puede asociar una descomposición celular de $Grass(2,4)$ con una célula de dimensión máxima 4 correspondiente a $\sigma_{0,0} \setminus \sigma_{1,0}$, dos células de dimensión 3 correspondientes a $\sigma_{1,0} \setminus \sigma_{2,0}$ y a $\sigma_{1,0} \setminus \sigma_{1,1}$, dos células de dimensión 2 correspondientes a $\sigma_{2,0} \setminus \sigma_{2,1}$ y a $\sigma_{1,1} \setminus \sigma_{2,1}$, una célula de dimensión 1 correspondiente $\sigma_{2,1} \setminus \sigma_{2,2}$ y una célula de dimensión 0 correspondiente a un punto.

Ejercicio.- Verificar que las matrices que aparecen en la Fig.16 describen la parametrización correspondiente a las células que se acaba de describir

Esta construcción se extiende de forma inmediata a Grassmannianas de rectas $Grass(2, n)$, aunque en este caso la descripción global está dada como una intersección de cuádricas. En este caso, los ciclos de Schubert $\sigma_{i,j}$ se representan mediante los nodos (i, j) con $0 \leq i \leq j \leq n - 2$, es decir, con coordenadas naturales que están por debajo de la diagonal.

Para una Grassmanniana $G(k+1, n+1)$ de subespacios $(k+1)$ -dimensionales $L^{k+1} \subset V^{n+1}$ de un espacio vectorial $(n+1)$ -dimensional V el argumento es similar; por una cuestión de comodidad en la notación y para conectar con el enfoque desarrollado en [Gri78], seleccionamos el primer menor como el correspondiente a la matriz identidad. Con más detalle, fijada una referencia $\mathcal{R} = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\}$ de V , para un subespacio fijo L^{k+1} de V , mediante

¹⁵ Los planos proyectivos correspondientes a $\sigma_{2,0}$ y a $\sigma_{1,1}$ reciben el nombre de α - y β -planos en los espacios twistor de Penrose y sus aplicaciones a Física Teórica o en la Teoría de Congruencias (familias biarmétricas) de rectas en \mathbb{P}^3

la acción de $GL(4; \mathbb{R})$ podemos suponer que L^{k+1} está generado por $\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_k$. Con esta notación, la grassmanniana $Grass(k+1, n+1)$ está parametrizada localmente en el entorno del punto de \underline{p}_{L^k} correspondiente al subespacio L^{k+1} por matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

En particular, la dimensión de la Grassmanniana es el número de parámetros (entradas marcadas con un asterisco $*$) de los que depende la matriz anterior, es decir,

$$\dim(Grass(k+1, n+1)) = (k+1)(n+1)$$

En este caso, la descomposición celular es una extensión (bastante más pesada de describir) de la presentada más arriba en la que se van insertando ceros en lugar de los asteriscos. De la misma forma que para Grassmannianas de rectas, cada vez que se introduce un nuevo cero la codimensión de la célula aumenta en una unidad; el inconveniente ahora es que hay muchas más formas de insertar ceros para cada “nivel”.

Ejercicio.- Describe la descomposición celular de $Grass(3, 6)$.

2.2.4. Variedades de banderas

Con más generalidad, dada una partición (k_1, \dots, k_r) de $n+1$, llamamos *variedad de banderas de nacionalidad* (k_1, \dots, k_ℓ) y lo denotamos mediante $\mathcal{B}(k_1, \dots, k_r)$ al conjunto de subespacios encajados de dimensión $d_i = k_1 + \dots + k_i$ para $i = 1, \dots, \ell$. Del mismo modo que antes, esta variedad de banderas se puede describir como

$$\mathcal{B}(k_1, \dots, k_r) = GL(n+1, \mathbf{K}) / \prod_{i=1}^r GL(k_i; \mathbf{K})$$

donde el denominador es el subgrupo estabilizador cerrado de un elemento genérico (comprobar los detalles como ejercicio). Obviamente, las grassmannianas son un caso particular de variedades de banderas para $r = 2$ con la partición $(k+1, n-k)$ de $n+1$.

La construcción como espacio homogéneo es similar, si reemplazamos el grupo lineal general por el grupo especial lineal, el grupo ortogonal, el unitario ó cualquier otro grupo clásico, dando lugar a grassmannianas afines, orientadas, unitarias, etc. Las variedades de banderas son importantes porque proporcionan el soporte para construir “modelos jerarquizados” con propiedades universales cualquiera que sea el marco geométrico que adoptemos ¹⁶.

¹⁶ En Geometría Analítica se demuestra que juegan un papel similar con respecto a estratificaciones con “buenas propiedades” de incidencia para los espacios tangentes que al jugado por las grassmanniana en relación con la aplicación de Gauss

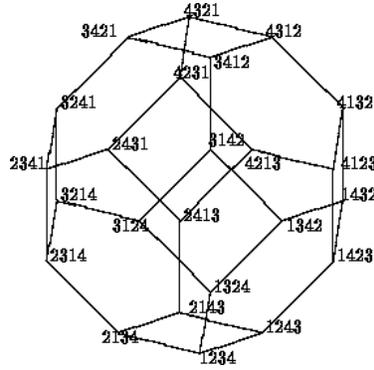


Fig. 17: Ciclos de Schubert-Bruhat para Banderas Completas en dimensión 4

La variedad de banderas completas en un espacio $(n + 1)$ -dimensional corresponde a la partición $(1, 1, \dots, 1)$ de $n + 1$. En este caso, el estabilizador de la bandera es el conjunto de las matrices triangulares superiores que tienen 1 en la diagonal. Por ello, la dimensión de la variedad de banderas completas $\mathcal{B}(1, 1, \dots, 1)$ es

$$\dim(\mathcal{B}(1, 1, \dots, 1)) = 1 + 2 + \dots + n = \binom{n}{2}$$

La variedad de banderas completas es “la que tiene más simetrías” en relación con otras variedades de banderas incompletas. Por ello, si se desea representar los ciclos de Schubert correspondientes a las diferentes localizaciones de una bandera con respecto a una bandera completa en $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ es necesario describir los ciclos de Schubert de una variedad de banderas completas y, a continuación, suprimir aquellos nodos del grafo que no sean significativos para la variedad de banderas incompleta.

Por razones que se exponen más adelante en el capítulo 5 del módulo 2 (grupos y álgebra de Lie), la representación de los ciclos de Schubert-Bruhat de una variedad de banderas es bastante simple, pues corresponde a los nodos asociados al grupo simétrico S_{n+1} de $n + 1$ elementos que representamos mediante $\{1, 2, \dots, n + 1\}$. Así, p.e.

- las banderas completas $p \in \ell \subset \mathbb{P}^2$ en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V^3)$ están representadas por los vértices de un hexágono (truncación de un cuadrado) que representa las permutaciones de 3 elementos;
- las banderas completas $p \in \ell \subset \pi \subset \mathbb{P}^3$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V^4)$ están representadas por los vértices de un octaedro truncado (truncación de un octaedro mediante planos que reemplaza cada vértice por un cuadrilátero) que representa las permutaciones de 4 elementos (ver Fig.17).

2.3. Complementos de Topología Algebraica

2.3.1. Algunas motivaciones adicionales

Los ejemplos mostrados más arriba se pueden extender a dimensión arbitraria, tanto para superficies orientables como no-orientables. En el caso de la botella de Klein o el plano proyectivo real, la acción de \mathbb{Z}_2 da lugar a que el cociente sea una superficie no-orientable en el sentido siguiente: El traslado de una referencia orientada aparece con la orientación opuesta al completar caminos cerrados. El cambio de orientación en la referencia se interpreta como una reflexión que afecta al menos a la orientación de uno de los vectores.

En cualquier caso, cada uno de los ejemplos mostrados se puede ver como el cociente por la acción de un grupo de simetrías (identificarlo de forma explícita para cada ejemplo). Esta observación plantea la cuestión de bajo qué condiciones es posible dotar de estructura de C^r -variedad al cociente por la acción de un grupo G definida como una C^r -aplicación $\alpha : G \times X \rightarrow X$. Esta cuestión afecta tanto al espacio topológico cociente X/G como a las funciones definidas propiamente sobre dicho espacio, es decir, a las funciones $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ que son G -invariantes.

La Geometría Diferencial invariante por la acción de un grupo G se ha utilizado de forma implícita desde la Mecánica Clásica con el grupo simpléctico como grupo estructural para la Mecánica Hamiltoniana que se aborda de forma transversal en varios módulos de este Curso. Asimismo, además de acciones de grupos definidas globalmente, a menudo se consideran acciones definidas sólo localmente que se pueden representar como simetrías locales. Un caso particularmente importante concierne a las isometrías (transformaciones locales que conservan la métrica) que se aborda en los módulos 3 y 6 de Geometría Diferencial

La extensión de este enfoque a la Teoría de Invariantes en Geometría Algebraica “estratificaciones equivariantes” (estratos invariantes por la acción de un grupo) es bastante más sofisticada y se aborda en cursos más avanzados de Geometría. En particular, ha motivado el desarrollo de aspectos localmente invariantes para los diferentes tipos de interacciones, incluyendo interacciones entre partículas (instantones, monopolos), incluyendo subgrupos discretos de grupos clásicos complejos dados por (productos de) $U(1)$, $SU(2)$ y $SU(3)$ que se comentan en el módulo 7 sobre Unificación para los diferentes tipos de interacciones.

2.3.2. Espacios y Aplicaciones Recubridoras

Dada una aplicación $f : M \rightarrow N$ de clase C^r entre C^r -variedades (donde $0 \leq r \leq \infty$), diremos que f es una *aplicación recubridora* y que M es un *espacio recubridor* si $\forall y \in N$ existe un entorno abierto V tal que $f^{-1}(V)$ es unión disjunta de abiertos U_i tales que U_i es C^r -equivalente a V via f , para cada $i \in I$ (nótese que I no tiene por qué ser un conjunto finito).

Una introducción a este tipo de espacios se ha mostrado en Topología General y un estudio más detallado de sus propiedades se lleva a cabo en la Topología

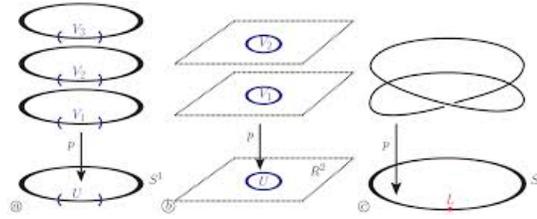


Fig. 18: Recubrimiento trivial vs recubrimiento doble ramificado

Algebraica. En Geometría y Análisis Complejo son de gran utilidad, por ejemplo, para reducir el estudio de funciones multivaloradas (como son las de una y varias variables complejas) al de funciones univaloradas. Esto se lleva a cabo mediante la *elevación de caminos* que es esencialmente única si se elige adecuadamente el espacio recubridor ambiente. Más explícitamente:

Si $f_i : M_i \rightarrow N$ son aplicaciones recubridoras con M_i simplemente conexo para $i = 1, 2$, entonces M_1 es C^r -equivalente a M_2 . Por ello, habitualmente en Topología se toman *espacios recubridores universales*, donde el espacio recubridor M es simplemente conexo. Salvo algunas excepciones, no es fácil en general describir el espacio recubridor universal de una variedad arbitraria (ver [A+M+R], pp.155-156 para propiedades generales de este tipo de espacios). En el §2,5 mostraremos la utilidad geométrica de este tipo de construcciones en relación con el grupo de rotaciones. Para terminar este subapartado, mostraremos una aplicación (algo sofisticada) de este punto de vista a título informativo.

2.3.3. Fibrados vectoriales

La noción de fibrado vectorial generaliza el espacio topológico producto permitiendo que la expresión del producto pueda variar dependiendo del punto base e imponiendo la condición de que una de las componentes sea un espacio vectorial.

Más formalmente, un *fibrado vectorial* ξ es una 4-upla (E, π, B, F) donde $E = E(\xi)$ es el *espacio total*, $B = B(\xi)$ es el *espacio base*, $\pi : E \rightarrow B$ es la aplicación *proyección del fibrado* y F es un espacio vectorial al que se llama la *fibra genérica*, verificando que

- Existe un recubrimiento $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ por abiertos $U_i \subset B$ de B tal que $\pi^{-1}U_i \simeq_{C^r} U \times U_i \times F$.
- La C^r -equivalencia anterior se restringe a un isomorfismo (como espacios vectoriales) entre la fibra específica $F_b := \pi^{-1}(b)$ en $b \in B$ y la fibra genérica $F = F \times \{b\}$

La primera condición recibe el nombre de *trivialidad local* y la segunda de isomorfismo local (depende del punto base $b \in B$).

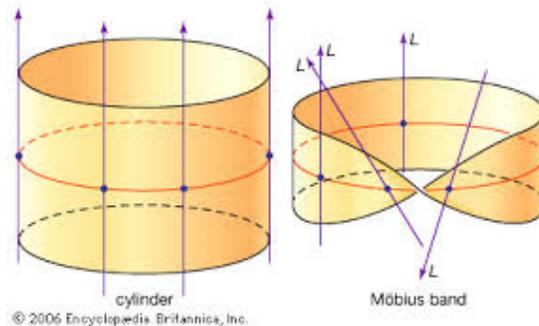


Fig. 19: Fibrados Vectoriales Triviales vs No-Triviales (Enc.Brit)

Ejemplo trivial.- Dado un espacio vectorial real r -dimensional $F \simeq \mathbb{R}^r$ y un espacio topológico X , el producto $X \times F$ es un fibrado trivial al que se denota mediante ε_X^r

2.3.4. Fibraciones

De una forma intuitiva, una fibración topológica \mathcal{F} está dada por un espacio topológico $E = E(\mathcal{F})$ (al que se llama espacio total de la fibración) que está “parametrizado” localmente por el producto de otro espacio base $B = B(\mathcal{F})$ y un espacio topológico F al que se llama fibra genérica.

Más formalmente, una fibración es una terna que se denota mediante $F \rightarrow E \rightarrow B$ donde $F \rightarrow E$ es una aplicación inclusión de la fibra en el espacio total y $E \rightarrow B$ es la proyección sobre el espacio base B .

- El producto cartesiano $X \times Y$ de dos espacios topológicos es una *fibración trivial* que se puede representar como $X \rightarrow X \times Y \rightarrow Y$ ó bien como $Y \rightarrow X \times Y \rightarrow X$.
- Cualquier fibrado vectorial $\xi = (E, \pi, B, F)$ es una *fibración localmente trivial* $F \rightarrow E \rightarrow B$.
- Cualquier superficie reglada dada como producto fibrado $\mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$ es una fibración sobre la curva base \mathcal{C} .
- Cualquier espacio recubridor es una fibración localmente trivial fuera del lugar de ramificación.

El primer ejemplo no localmente trivial es la *fibración de Hopf* $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ que se expone en Topología Diferencial junto con generalizaciones al espacio proyectivo complejo y al grupo especial ortogonal (fibración de Serre) ¹⁷.

¹⁷ En <https://www.youtube.com/watch?v=UIZ7KDM3iCc> se muestra una animación de la fibración de Hopf.

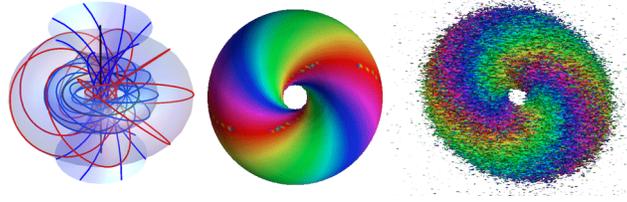


Fig. 20: Fibración de Hopf en cristales líquidos

2.4. Espacios localmente simétricos

La condición de ser homogéneo es demasiado estricta para describir fenómenos próximos a la realidad. La irregularidad en la distribución de la materia motiva que sólo se puedan detectar direcciones a lo largo de las cuales se presenta una cierta homogeneidad local, mientras que otras direcciones (eventualmente curvadas) presentan otros tipos de homogeneidad. La *anisotropía* describe los diferentes modelos de propagación que pueden presentarse sobre materiales inhomogéneos.

Por otro lado, las simetrías locales o direccionales no se pueden entender únicamente como propiedades que afectan a la materia, sino a ciertas funciones que describen los fenómenos de propagación ó de interacción entre diferentes fuerzas en la Naturaleza. Este es el caso de las *simetrías* que afectan a ciertas *funciones de onda* (autovectores de un operador) que describen los posibles estados que puede presentar un sistema en Mecánica Cuántica.

Una tercera idea importante afecta al carácter no-estático de las simetrías, es decir, a la *ruptura de simetrías*, con su correspondiente fenómeno inverso asociado al agrupamiento de simetrías. La representación de estos fenómenos se lleva a cabo en términos de la *bifurcación equivariante* que corresponde al diagrama de bifurcación de singularidades de aplicaciones que presentan algún tipo de simetrías. En este caso, las simetrías son discretas y están controladas por el grupo de Lie asociado procedente del álgebra que deja invariante el espacio tangente a la \mathcal{B} -órbita de la singularidad, donde $\mathcal{B} = \mathcal{R}$ (equivalencia a la derecha), $\mathcal{B} = \mathcal{L}$ (equivalencia a la izquierda), $\mathcal{B} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ (equivalencia a derecha-izquierda), ó $\mathcal{B} = \mathcal{K}$ (equivalencia de contacto que deja invariante el grafo de la aplicación). Estos tópicos son más avanzados y por eso sólo se esbozan en estos apuntes.

Por todo ello, es necesario extender el enfoque inicial que afectaba sólo al espacio de estados (eventualmente discreto), por otro que afecta también a las funciones definidas sobre dicho espacio. En cierto modo, puede decirse que los grupos de simetrías son la manifestación geométrica de campos vectoriales cuya variación “ponderada” de primer orden representa los diferentes tipos de fuerzas. Esta idea es otra reformulación de la jerarquía bien conocida de la Mecánica Analítica entre Geometría (controlada por grupos de simetrías), Cinemática (controlada por campos vectoriales ó tensoriales) y Dinámica (controlada por

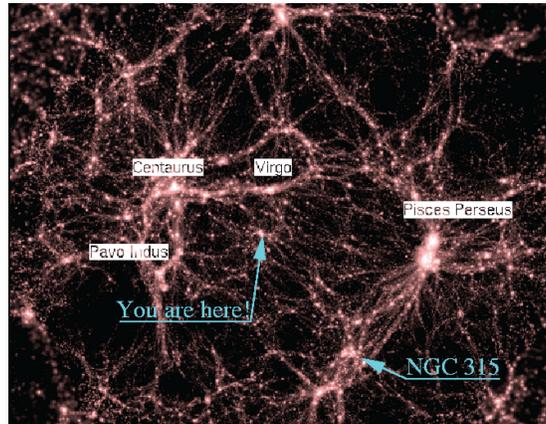


Fig. 21: Un modelo cosmológico anisótropo

fuerzas).

En esta subsección se presentan de forma intuitiva algunas ideas básicas sobre estas extensiones que acabamos de describir.

2.4.1. Nociones básicas

Un *espacio localmente simétrico* es una variedad diferenciable con un grupo de simetrías en cada punto que depende de forma suave con respecto al punto ¹⁸. Las *simetrías locales* se pueden especificar en términos

- *métricos* basados en la introducción de una “distancia adaptada al aspecto” de la variedad M a la que se llama *métrica* $g_{ij}(\underline{x})$ que varía de forma suave con respecto al punto base $\underline{x} \in M$. En este caso, las simetrías se definen con respecto a las *geodésicas*, es decir, las curvas que minimizan la longitud entre dos puntos próximos $\underline{x}, \underline{x}' \in M$. Algunos de los ejemplos básicos son el espacio cartesiano, la esfera, el espacio proyectivo y el espacio hiperbólico.
- *algebraicos* basados en la introducción de grupos de Lie G que se parametrizan mediante la integración de campos vectoriales que son invariantes con respecto a la acción del grupo G . Al final del capítulo §2,5 se describe la aproximación algebraica a los espacios localmente simétricos sobre cocientes G/H ¹⁹

¹⁸ La extensión de esta definición al caso singular requiere especificar una “estratificación” que se comporte de forma “equivariante” con respecto a la acción del grupo; la descripción de la “equivariante” se enmarca dentro del estudio de bifurcaciones G -equivariantes que se comentan más abajo y se estudian con más detalle en el módulo de Topología Diferencial

¹⁹ En este caso H es un subgrupo de Lie abierto del grupo de los automorfismos de puntos fijos de G

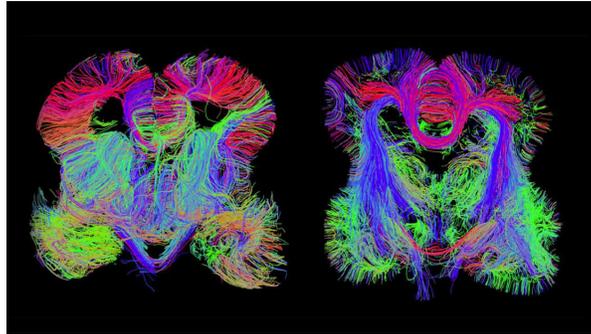


Fig. 22: Mapa anisótropo de actividad cerebral (Martino's Center, Harvard)

La aproximación algebraica es más general que la métrica, pero requiere un conocimiento previo del grupo de Lie G o bien su construcción a partir de EDO localmente dadas sobre la variedad M (este último es precisamente el enfoque original de S.Lie).

Como el producto de espacios localmente simétricos es localmente simétrico, nos reducimos inicialmente a mostrar ejemplos relacionados con los espacios localmente simétricos básicos ²⁰.

Ejercicio (avanzado).- Cualquier superficie compacta conexa con género $g > 1$ es un espacio localmente simétrico que no es simétrico.

2.4.2. Anisotropía

En este apartado se introducen algunos elementos para detectar los diferentes modelos de propagación en medios irregulares. Este enfoque tiene gran utilidad en el estudio de materiales incluyendo Geofísica, Conductividad, Elasticidad, Plasticidad, Química, Imágenes biomédicas, etc y sus aplicaciones.

La anisotropía se modela en términos de las *irregularidades* detectadas en la *distribución de simetrías* en relación con la propagación de ondas sobre materiales. La propagación real de fenómenos ondulatorios proporciona diferentes patrones como respuesta a la interacción con la materia. La comparación entre los resultados correspondientes a localizaciones controladas de los sensores proporciona información sobre la desigual distribución de la materia.

Los modelos de reacción-difusión proporcionan la herramienta matemática para analizar las irregularidades en la distribución. Los casos más sencillos corresponden a estructuras casi-cristalinas y los más complicados a materiales amorfos; un caso especialmente importante corresponde a imágenes médicas en las que sólo se pueden utilizar procedimientos acústicos (ecografías, p.e.). La componente geométrica del modelo se etiqueta como *Geometría del Desorden* y

²⁰ Un estudio más detallado se desarrolla en el módulo sobre Geometría Riemanniana incluyendo la distinción básica entre los diferentes tipos (euclídeo, compacto y no-compacto)

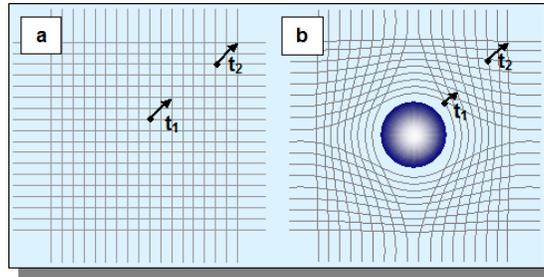


Fig. 23: Dilatación simétrica en el espacio-tiempo

utiliza diferentes extensiones de la noción de entropía para modelar la distribución de la materia.

La estimación de las irregularidades en la distribución de la materia buscada ó de un flujo se representan mediante datos dispersos que se agrupan inicialmente usando momentos de orden 2. Los elipsoides locales de inercia permiten identificar direcciones de orientación a lo largo de las cuales la variación es máxima, mínima o intermedia (en términos de campos gradiente). La distribución espacial de estas direcciones facilitan la representación de la anisotropía.

2.4.3. Funciones de onda invariantes

En presencia de objetos masivos o de obstáculos los modelos de propagación presentan variaciones en el aspecto que permiten detectarlos en términos de los cambios asociados surgidos como reacción con respecto a dicha presencia (ver fig.23)

2.4.4. Elementos de bifurcación

Los fenómenos de bifurcación son muy frecuentes en la dinámica de sistemas no-lineales. La iteración conduce frecuentemente al caos, incluso para modelos muy sencillos como el correspondiente a la bifurcación logística que se muestran en la figura 24.

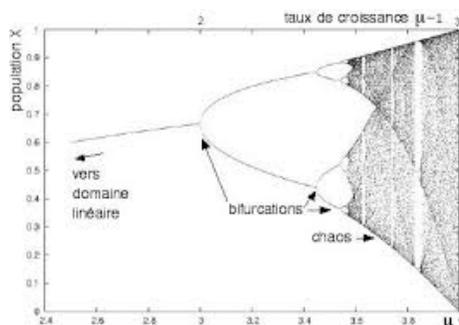


Fig. 24: Evolución hacia el caos de una bifurcación logística

3. Compatibilidad constructiva: Particiones de la Unidad

Para poder pasar de propiedades locales a globales preciso introducir las herramientas que facilitan el pegado para construir C^r -estructuras sobre variedades. Esta sección se centra en aspectos que permiten relacionar la Topología General con el Análisis Local. Las particiones de la unidad juegan un papel fundamental para garantizar el pegado de datos locales.

Supongamos dado un C^r -atlas $\mathcal{A} = (\mathcal{U}, \Phi) = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sobre M para $r \geq 1$. Como cada abierto U_α de \mathcal{A} es C^r -equivalente a un abierto de \mathbb{R}^m (via φ_α), el cálculo diferencial e integral usual están bien definidos para cada abierto U_α (a través de la C^r -equivalencia φ). Para obtener un dato global sobre M (como los tensores ó las integrales) debemos "pegar" todos estos datos locales. Ello requiere

- Describe las "condiciones de compatibilidad" por las cuales podemos obtener un objeto geométrico *global* a partir de datos locales.
- Muestra efectivamente cómo llevar a cabo el cálculo de dicho objeto global (la integral de una m -forma, p.e.) en términos del Cálculo Integral ya conocido.

Para resolver el primer paso introducimos las "particiones de la unidad". Estas proporcionan el lenguaje teórico apropiado para tratar con objetos globales. De paso, recordamos algunos resultados relativos a la Topología de Variedades que muestran el interés de las variedades paracompactas en el Cálculo Integral sobre Variedades.

Como ilustración de esta noción, esbozamos en primer lugar otra demostración del resultado que permite dar un embebimiento de cualquier variedad compacta m -dimensional M en \mathbb{R}^N para N suficientemente grande

3.1. Algunos resultados de Topología General

La mayor parte de este subapartado es una repetición de resultados conocidos de la Topología General y se incluyen aquí sólo para facilitar la lectura y la notación empleadas. Por ello, nos limitaremos a revisar someramente los enunciados, insistiendo en las aplicaciones de los mismos. Además, su carácter esencialmente topológico podría enmascarar el enfoque geométrico que desarrollamos en apartados posteriores de este capítulo.

Una buena referencia para este subapartado es el §5,5 de [A+M+Ra], donde pueden encontrar demostraciones detalladas de los resultados esbozados aquí, si bien el marco tensorial de dicha referencia es más amplio que el estrictamente para cuestiones de integración (este marco es no obstante de utilidad para Geometría Riemanniana).

3.1.1. La noción de partición de la unidad

Sean M una C^r -variedad y $\{\rho_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ una colección de funciones no negativas de clase C^r . Denotemos mediante $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ a un recubrimiento de M dado por los abiertos coordenados de un C^r -atlas. Diremos que $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una *partición de la unidad subordinada al recubrimiento \mathcal{U}* si

1. Son funciones con soporte compacto contenido en abiertos coordenados del C^r -atlas de M , es decir, $\forall \alpha \in A$ se tiene que $[\rho_\alpha] := \text{sup}(\rho_\alpha)$ es un conjunto compacto, al que denotaremos mediante C_α , y para cada punto coordenado U_α de M tal que $C_\alpha \subset U_\alpha$.
2. La unión de dichos soportes es un recubrimiento *localmente finito*, es decir, para cada punto $x \in M$ existe un entorno U tal que $U \cap C_\alpha = \emptyset$ salvo para un número finito de índices.
3. $\forall m \in M$ se tiene que $\rho_\alpha(m) \geq 0$ y $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha(m) = 1$.

3.1.2. Una aplicación al problema del pegado

Para construir objetos globales, supongamos dado un C^r -atlas

$$\mathcal{A} = (\mathcal{U}, \Phi) = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

sobre M y una colección de datos locales relativos a dicho atlas (representados más adelante por tensores t_α de tipo (r, s)) sobre cada abierto U_α verificando las condiciones usuales de compatibilidad relativas al cambio de carta $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} |_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}$. Entonces, si $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ es una partición de la unidad subordinada al recubrimiento \mathcal{U} de M , se tiene que

$$t(\underline{x}) := \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \varphi_\alpha^*(t_\alpha)(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in M$$

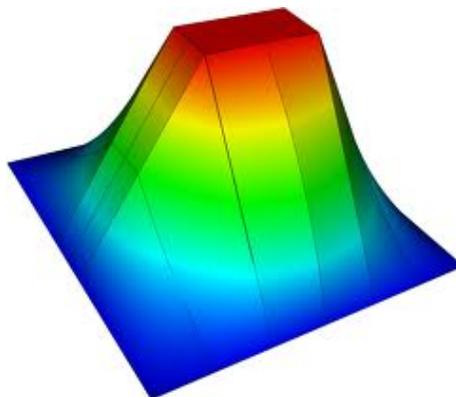


Fig. 25: Las funciones meseta se utilizan para particiones de la unidad

define un *campo tensorial de tipo* (r, s) sobre M . Decimos entonces que las particiones de la unidad nos permiten "pegar" datos locales (donde cada "dato" está representado por un tensor de algún tipo sobre un abierto que es C^r -equivalente a un abierto de \mathbb{R}^m para algún m).

3.1.3. El caso no orientable

La banda de Moebius, la botella de Klein y el plano proyectivo son ejemplos de variedades no-orientables. Están caracterizados por la condición de tener abiertos tales que el determinante del cambio de carta tienen diferentes signos. En este apartado se presentan algunos resultados básicos sobre este caso.

3.1.4. Orbifolds

Las orbifolds son una extensión de las variedades diferenciables que incluyen singularidades que se obtienen como cocientes de variedades por la acción de grupos; el resultado es una variedad "estratificada" en la que las cartas del cociente admitan abiertos con estructura G -invariante por la acción inducida del grupo. Como los abiertos pueden tener diferentes dimensiones, se dice que la estratificación es "equivariante".

El paso al cociente de una variedad orientable no tiene por qué ser orientable. Uno de los ejemplos más interesantes corresponde al caso del cociente \mathbb{T}^n/S_n del toro n -dimensional $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ por la acción del grupo simétrico S_n que parametriza las n -tuplas de puntos (no necesariamente distintos) sobre la circunferencia \mathbb{S}^1 . A principios del S.XXI, Tymoczko y sus colaboradores desarrollan un interesante modelo para representar la notación musical e interpretar colecciones de notas en términos de modelos geométricos.

3.2. Complementos topológicos

A continuación coleccionamos algunos resultados relevantes que proceden de la topología general de Variedades Topológicas (aquí no suponemos que el soporte sea un espacio Hausdorff) y proporcionan criterios para la existencia de particiones de la unidad.

3.2.1. Existencia de particiones de la unidad

Proposición.- Sea M una C^r -variedad topológica. Entonces

1. Si M admite una partición de la unidad, entonces es Hausdorff.
2. Si M admite una partición de la unidad, entonces cada componente conexa de M es Hausdorff con base numerable para su topología.
3. Si M es Hausdorff y tiene base numerable para su topología, entonces M admite una partición de la unidad.
4. Si M es Hausdorff y compacta, entonces admite una partición de la unidad.
5. Si cada componente de M es Hausdorff con base numerable para su topología, entonces M admite una partición de la unidad.

Esbozo de la demostración

Las tres primeras afirmaciones son consecuencias elementales de la topología general. Para la cuarta nótese que si U es un entorno coordinado de $m \in M$, entonces existen un entorno coordinado U_m con $\bar{U}_m \subset U$ y una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^r tal que

$$h_m(\underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x} \in U_m \quad , \quad h_m(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \notin U_m .$$

Este resultado recibe el nombre de *Lema de Reducción* en la literatura (para una demostración ver p.e. Spivak, Vol.I, pag. 2.32 ó [A+M+Ra], pp.383 y ss). De una forma más explícita, dicha función puede ser construida de la forma siguiente (ver p.e., Hirsch: *Differential Topology*, 1976, p.42): Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha(x) = 0 \quad \forall x \leq 0 \quad , \quad \alpha(x) = e^{-1/x} \quad \forall x \geq 0 .$$

Construyamos

$$\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad | \quad \beta(x) = \alpha(x - a)\alpha(b - x)$$

Introducimos

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \quad | \quad \gamma(x) := \frac{\int_x^b \beta}{\int_a^b \beta}$$

Por ultimo, hacemos

$$\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1] \quad | \quad \lambda(x) := \gamma(|x|)$$

Usando esta función definida sobre cada abierto podemos construir una función global $\Lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^r cuyo dominio es toda la variedad M y de modo que para cada punto $m \in M$ existe un entorno U_α de modo que $\Lambda|_{U_\alpha}(m) = \lambda \circ \varphi_\alpha(m)$ donde $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la carta coordenada correspondiente al abierto coordinado U_α .

Para la última afirmación contenida en la Proposición, nótese que si M es Hausdorff y tiene una base numerable para su topología, entonces existe un recubrimiento numerable formado por una sucesión creciente de compactos. En el §2 de Spivak, Vol.I, se puede encontrar una demostración detallada de estos resultados.

3.2.2. Espacio paracompacto

Definición.- Diremos que un espacio topológico X es *paracompacto* si cada componente conexa es Hausdorff y cualquier recubrimiento por abiertos de M admite un refinamiento *localmente finito*

Se dice que un espacio X satisface el *primer axioma de numerabilidad* si para cada punto $x \in X$ existe una sucesión de entornos $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ verificando que $U_n \subseteq U$ (para $n \geq n_0$) para cualquier entorno $U \in \mathcal{E}(x)$.

Diremos que un espacio X satisface el *segundo axioma de numerabilidad* si para cada punto $x \in X$ existe una base numerable para su topología.

3.2.3. Caracterización de espacios paracompactos

- Cualquier espacio Hausdorff localmente compacto verificando el segundo axioma de numerabilidad es paracompacto.
- Cualquier espacio metrizable es paracompacto (en particular, lo es cualquier espacio de Banach).

3.3. Práctica: Una conexión con Análisis Funcional

La segunda parte de la Proposición anterior es importante de cara a extender los métodos geométricos al estudio de Espacios de Funciones. El prototipo de espacios que aparecen en el Análisis Funcional Elemental corresponde a espacios de Hilbert ó, con más generalidad, espacios de Banach (es decir, espacios normados completos). En este contexto, los espacios de Hilbert aparecen como espacios de Banach cuya norma procede de un producto escalar ordinario.

La teoría de Espacios Vectoriales Topológicos por un lado, y la Topología Diferencial, por otro, estudian familias de espacios de funciones más generales que los de Banach, como por ejemplo los espacios métricos completos ó con más generalidad aún, espacios no-metrizables pero con una familia de seminormas.

Una clase especialmente interesante de espacios métricos completos está dada por los espacios de Fréchet (que son espacios métricos completos localmente convexos).

Una gran cantidad de modelos físicos se expresan en términos de los operadores diferenciales elípticos de segundo orden. Estos operadores están definidos sobre espacios de funciones de Fréchet definidos sobre variedades compactas y en este caso es posible demostrar que el núcleo y el conúcleo de estos operadores tiene codimensión finita. La razón de fondo procede de que en este tipo de espacios todavía disponemos de un Teorema de las Implícitas, lo cual nos permite hablar de soluciones para este tipo de operadores, aunque dichas soluciones no sean únicas.

Esta mayor generalidad no es gratuita. En efecto, basta pensar por ejemplo, que el conjunto de las aplicaciones $C_W^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es un espacio completo que no es de Banach (el subíndice W hace referencia a la topología "débil" que estamos considerando sobre dicho espacio de funciones). Asimismo, el conjunto de las aplicaciones $C_S^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ no es un espacio metrizable.

Estas observaciones motivan que los métodos geométricos procedentes de la Geometría Diferencial sean todavía aplicables en espacios de Banach, pero no en espacios métricos completos, donde debemos diseñar estrategias alternativas. En el caso del Análisis, estas últimas proceden del estudio de propiedades que expresamos en términos de familias de seminormas. En el caso de la Topología Diferencial, la idea básica consiste en estudiar propiedades de órbitas por acciones de grupos que actúan de forma infinitesimal sobre espacios de aplicaciones.

Los resultados descritos en la *Proposición* muestran que una variedad paracompacta admite un recubrimiento localmente finito con una familia de funciones que nos permiten "pegar" datos locales. Con más precisión tenemos la siguiente caracterización:

3.3.1. Variedades sobre espacios de Banach

Si se reemplaza \mathbb{R}^n por un espacio de Banach B , la noción de variedad diferenciable modelada sobre \mathbb{R}^n se extiende de forma natural a variedad modelada sobre un espacio de Banach B

Definición.- Una estructura suave \mathcal{B} modelada sobre un espacio de Banach B se define como un espacio topológico que admite un atlas $\mathcal{A} = (\mathcal{U}, \Phi)$ de cartas (U_α, ϕ_α) donde las ϕ_α son homeomorfismos de U_α sobre abiertos de B verificando que las funciones de transición $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ son suaves.

La comparación entre estructuras suaves modeladas sobre un espacio de Banach B se lleva a cabo de la forma habitual utilizando atlas maximales, es decir, $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ si y sólo si su unión es un estructura suave modelada sobre el espacio de Banach B . Para simplificar la notación diremos que una variedad \mathcal{B} modelada sobre un espacio de Banach B es una variedad Banach.

Los espacios de Hilbert tienen una colección de excelentes propiedades que les hace especialmente indicados para un gran número de aplicaciones a Física e

Ingeniería. En el caso de la Mecánica Cuántica, se pueden interpretar las líneas ó "rayos" en un espacio de Hilbert como los estados de un sistema cuántico (puntos de un espacio proyectivo) y los observables como los operadores auto-adjuntos; así, el prototipo "clásico" sería el espacio $L^2(\mathbb{R})$ de las funciones de cuadrado integrable (con respecto a la medida de Lebesgue). Una revisión del enfoque geométrico de Von Neumann para la Mecánica Cuántica se presenta en el módulo 2. Sin embargo, algunas cuestiones básicas relacionadas con el tratamiento de una onda plana ó el de una función delta (Dirac) no tienen un marco apropiado en $L^2(\mathbb{R})$ pues no pertenecen a dicho espacio. Con más generalidad, los vectores propios asociados al espectro continuo de un operador auto-adjunto no pertenecen a dicho espacio, algo que es realmente chocante.

Ello implica que, a pesar de las ventajas que ofrecen los espacios de Hilbert es conveniente ampliar el marco conceptual. La extensión obvia concierne a los espacios de Banach sobre los cuales es necesario desarrollar las herramientas correspondientes de Geometría Diferencial. El objetivo de esta subsección es presentar una primera aproximación a este problema, incluyendo enunciados precisos para la geometrización de los espacios de Banach. Refinamientos más recientes de esta aproximación que pueden ser "controlables" en términos de espacios de Hilbert han llevado a introducir:

- *banderas*, es decir, colecciones "anidadas" de espacios de Hilbert (enfoque atractivo desde el punto de vista matemático, pero aún de poca utilidad). El enfoque basado en colecciones anidadas es una extensión natural de las variedades de banderas (subespacios encajados) formadas por subespacios encajados, donde cada subespacio es un elemento de una grassmanniana (ver más abajo).
- *retículos* (no necesariamente bien ordenados) de espacios de Hilbert. Este enfoque es más atractivo desde el punto de vista de la Física Teórica, pero aún no se dispone de una herramienta tan compacta como las disponibles para espacios homogéneos más convencionales.

En cualquier caso, se requiere que el producto interior esté bien definido sobre cada una de las componentes (para el caso de banderas generalizadas) ó para la intersección no vacía de cada para de elementos de la colección de espacios de Hilbert en un retículo. Esta cuestión es no trivial salvo que todos los espacios de Hilbert están contenidos en un único espacio de Banach. Por ello y debido a la naturaleza introductoria del Curso, nos limitaremos a cuestiones de carácter más básico como las que afectan al "pegado" de datos sobre espacios de Banach que se resuelve gracias a la existencia de particiones de la unidad:

3.3.2. Espacios de Banach y Particiones de la Unidad

Teorema Una variedad Banach (modelada sobre un espacio de Banach B que es separable con una C^r -norma) admite una partición de la unidad si y sólo si es paracompacta.

Este resultado justifica que en el resto de la subsección supongamos que una variedad Banach \mathcal{B} es un espacio topológico Hausdorff conexo paracompacto.

Comentarios

- A la vista del enfoque restringido utilizado para la noción de C^r -variedad introducida en el §1,1, la mayor parte de los contenidos de este apartado es redundante. No obstante, esta exposición pretende conectar con un punto de vista más amplio procedente de la Topología General de Variedades, donde no se supone que el espacio soporte sea Hausdorff.
- Por otro lado, el Teorema precedente carece de utilidad práctica a la hora de calcular integrales sobre variedades. Su interés radica en que permite simplificar las demostraciones de resultados analíticos y geométricos en todo lo que se refiere al paso de cuestiones locales a resultados globales.
- Una demostración detallada del Teorema anterior se puede ver en los suplementos 5.5A y 5.5B de [A+M+Ra]. No haremos uso de esta demostración en este Curso, aunque tiene un importante valor en relación con técnicas bien conocidas de la Topología General.

A continuación, ilustramos la existencia de particiones de la unidad con un resultado relativo a la existencia de embebimientos de variedades compactas

3.3.3. Embebimiento de una variedad compacta

Teorema de Severi-Whitney.- Si M es una C^r -variedad compacta entonces existe una aplicación $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ de clase C^r que es un embebimiento para algún N suficientemente grande.

Esbozo de la demostración Consideremos un recubrimiento finito por ℓ abiertos de M que podemos tomar como abiertos coordenados para la estructura de M como C^r -variedad. A continuación, elegimos una partición de la unidad $\lambda_\alpha : M \rightarrow [0, 1]$ donde $\alpha = 1, \dots, \ell$ subordinada al recubrimiento $\{U_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq \ell}$, es decir, tales que existe un recubrimiento de M formado por abiertos U'_α verificando que

- $\bar{U}'_\alpha \subset U_\alpha$ donde $1 \leq \alpha \leq \ell$.
- $\text{sop}(\lambda_\alpha) \subset U_\alpha \quad \forall \alpha = 1, \dots, \ell$.
- $\sum_{\alpha=1}^{\ell} \lambda_\alpha(m) = 1 \quad \forall m \in M$.

Haciendo $N = m\ell + \ell$, construimos la aplicación

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}^N \quad | \quad f = (\lambda_1 \varphi_1, \dots, \lambda_\ell \varphi_\ell, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$$

La aplicación f así definida verifica las condiciones requeridas para ser un embebimiento (verificarlo como ejercicio)

4. Práctica: Grassmannianas

Las variedades de Grassmann ó grassmannianas $Grass(k + 1, N + 1)$ proporcionan una extensión natural del espacio proyectivo correspondiente a (la proyectivización de) la variedad que parametriza los subespacios de dimensión $k + 1$ de un espacio vectorial $(N + 1)$ -dimensional V sobre un cuerpo \mathbb{K} . Cada elemento $p_L \in Grass(k + 1, N + 1)$ representa un subespacio $L^{k+1} \subset V^{N+1}$, extendiendo la construcción de las rectas del espacio ordinario que representan puntos del espacio proyectivo.

En esta sección se describe la geometría de las grassmannianas como un ejemplo no trivial de espacio homogéneo por la acción de un grupo ²¹. En particular, la estructura del grupo como variedad diferenciable induce una estructura sobre el cociente por un subgrupo cerrado como variedad diferenciable. La descripción homogénea permite abordar el estudio de sus propiedades a partir de un punto, extendiéndose el análisis por la acción del grupo de forma similar al comportamiento de otros espacios homogéneos más simples como el espacio cartesiano, la esfera o el espacio proyectivo.

Dada una variedad $M^{k+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, la asignación que a cada punto $p \in M$ le lleva en su espacio tangente $T_p M$ define una aplicación de Gauss $g_M : M \rightarrow Grass(k + 1, N + 1)$ que permite estudiar y clasificar variedades y morfismos definidos sobre M ; este enfoque se desarrolla en el módulo 2 en relación con la clasificación de variedades a partir del fibrado tangente.

Además de su interés matemático para problemas de clasificación, las Grassmannianas se aplican a múltiples campos tales como

- La *Estadística* en relación p.e. con el análisis de datos no-correlacionados en PCA ó ICA representados por subespacios generados por vectores l.i. (habitualmente, los datos agrupados contienen subespacios múltiples ó bien outliers que disminuyen la dimensión esperada)
- La *Física Teórica*, en relación con los espacios twistor de Penrose como intento de unificación de Gravitación y Electromagnetismo, p.e;
- La *Teoría Económica* en relación con condiciones de equilibrio para la dinámica económica en diferentes mercados bajo condiciones de información incompleta, p.e.
- La *Visión Computacional* en relación con problemas de Reconstrucción 3D (para control de subespacios lineales asociados a envolventes de objetos), estimación de movimiento (en relación con la variación controlada de modelos de evolución) o bien de Reconocimiento (bajo condiciones de información incompleta)

²¹ Las grassmannianas de subespacios con alguna estructura adicional (hermítica, lagrangiana, etc) proporcionan algunos de los ejemplos iniciales más interesantes de espacios localmente simétricos de tipo compacto.

4.1. Descripción

Llamamos *Grassmanniana de $(k+1)$ -espacios de un espacio vectorial V* de dimensión $n+1$, y lo representamos por $G(k+1, n+1)$, al conjunto de subespacios $(k+1)$ -dimensionales de V . Este conjunto tiene estructura de variedad algebraica no-singular y, por consiguiente, de variedad suave.

4.1.1. Producto exterior de vectores

Cada subespacio vectorial $(k+1)$ -dimensional W de V^{n+1} se representa mediante el producto exterior de $k+1$ elementos de la base. El producto exterior $v \wedge w$ extiende la noción del producto vectorial de dos vectores libres arbitrarios $v, w \in V^{n+1}$ y su interpretación como área orientada del paralelogramo generado por los vectores libres v, w . Recordemos que el producto vectorial es

- *bilineal*: $v \wedge \sum_i \lambda_i w_i = \sum_i \lambda_i v \wedge w_i$
- *antisimétrico*: $v \wedge w = -w \wedge v$ para cualquier par $v, w \in V$

El producto exterior de dos vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 es el área orientada del paralelogramo generado por dichos vectores.

$$\mathcal{A} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$$

Como consecuencia, el *área orientada del triángulo* con vértices $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ y \mathbf{p}_2 está dada por

$$\mathcal{A}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{2} [\overline{\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1} \wedge \overline{\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_2}] = \frac{1}{2} \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$$

El cálculo del área orientada en términos del producto exterior de dos vectores se extiende al volumen orientado de un paralelepípedo en términos del producto exterior de tres vectores:

$$\mathcal{V} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3$$

Como consecuencia, el *volumen orientado del tetraedro* con vértices $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ y \mathbf{p}_3 está dado por

$$\mathcal{V}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \frac{1}{6} [\overline{\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1} \wedge \overline{\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_2}] \wedge \overline{\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_3} = \frac{1}{6} \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3$$

La triangulación de cualquier polígono planar se extiende a una descomposición tetraedral de PL-objetos volumétricos por linealidad. Esta descomposición se puede aplicar a nubes de puntos asociados a información de rango soportada por nubes de puntos (procedentes de escaneos, visión estéreo, etc).

La expresión de volúmenes orientados de paralelepípedos n -dimensionales se extiende de forma natural a dimensión arbitraria en términos de productos exteriores de n vectores. La extensión a coordenadas curvilíneas requiere el formalismo de formas diferenciales que se expone en los módulos 2 y 4. La extensión

del formalismo algebraico de productos exteriores de orden arbitrario para espacios vectoriales requiere algunas definiciones adicionales que se presentan en los apartados siguientes

Ejercicio.- Calcular el área orientada de regiones planares como suma del área orientada de triángulos (*Indicación:* Triangular trazando diagonales interiores y usar la condición de bilinealidad).

4.1.2. Álgebra exterior

El *producto exterior* $v_0 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ de $k+1$ vectores $v_0, v_1, \dots, v_k \in V^{n+1}$ es multilinear (lienal en cada componente) y antisimétrico, es decir, paa cualquier permutación σ de $\{0, 1, \dots, k\}$ se tiene

$$v_0 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} v_{i_0} \wedge v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}$$

En ocasiones se dice que $v_0 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ es un vector de "grado" $k+1$

Al conjunto de vectores que son producto exterior $v_0 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ de $k+1$ vectores tiene una estructura natural de espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{K} de dimensión $\binom{n+1}{k+1}$ (comprobadlo como ejercicio) y se lee denota como $\Lambda^{k+1}V$. (nótese que ara $k=0$, $\Lambda^1 = V$ y que $\Lambda^r = (0)$ para $r \geq n+2$). El producto exterior de un k -vector v_0 por un vector no-nulo $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ da lugar a un $k+1$ -vector $v_0 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k$; por inducción se tiene una colección de aplicaciones

$$\mathbb{K} = \Lambda^0V \rightarrow \Lambda^1V \rightarrow \Lambda^2V \rightarrow \Lambda^3V \rightarrow \dots \Lambda^nV \rightarrow \Lambda^{n+1}V \simeq \mathbb{K} \rightarrow 0$$

entre espacios vectoriales sobre \mathbb{K} de dimensiones $1, n+1, \binom{n+1}{2}, \dots, \binom{n+1}{k+1}, \dots, n+1, 1$ (fila k -ésima del triángulo de Tartaglia. Como $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{n-k}$, se tiene un isomorfismo obvio entre $\Lambda^{k+1}V$ y $\Lambda^{n-k}V$. Veamos el significado de este isomorfismo:

4.1.3. Descripción algebraica

Para cualquier subespacio $(k+1)$ -dimensional W el cociente $Q^{n-k} := V/W$ define un subespacio complementario de W en V . De una manera más formal se tiene una sucesión exacta:

$$0 \rightarrow W^{k+1} \rightarrow V^{n+1} \rightarrow Q^{n-k} := V^{n+1}/W^{k+1} \rightarrow 0$$

Supongamos que W^{k+1} está generado por v_0, v_1, \dots, v_k . Completamos esta base con v_{k+1}, v_1, \dots, v_n hasta obtener una base v_0, v_1, \dots, v_n de V^{n+1} . La elección de la base complementaria se puede obtener de infinitas maneras, haciendo actuar el grupo lineal general $GL(n-k; \mathbb{R})$ sobre el subespacio Q . Análogamente, si se hace actuar $GL(k+1; \mathbb{R})$ sobre W^{k+1} se obtiene que el *estabilizador* de

la descomposición $W \oplus Q$ de V es $GL(k+1; \mathbb{R}) \times GL(n-k; \mathbb{R})$ que es un subgrupo cerrado de $GL(n+1; \mathbb{R})$ para la topología de los coeficientes (cualquier matriz diagonal por cajas está dado como anulación de una colección finita de hiperplanos $a_{ij} = 0$).

El espacio ambiente \mathbb{K}^{n+1} es un espacio G -homogéneo por la acción de $G = GL(n+1; \mathbb{K})$. Esta acción induce una acción sobre los subespacios $(k+1)$ -dimensionales (dada por los $(k+1) \times (k+1)$ -menores de cada matriz $A \in G$, es decir, por la $k+1$ -ésima potencia exterior de G). La grassmanniana de $k+1$ -subespacios vectoriales es, por tanto, un espacio homogéneo que se obtiene como cociente

$$Grass(k+1, n+1) \simeq GL(n+1; \mathbb{R}) / GL(k+1; \mathbb{R}) \times GL(n-k; \mathbb{R}) \simeq O(n+1; \mathbb{R}) / O(k+1; \mathbb{R}) \times O(n-k; \mathbb{R})$$

donde el segundo isomorfismo corresponde a ortogonalizar las bases (inicialmente arbitrarias) elegidas para V, W, Q (Gram-Schmid). En términos topológicos (Topología Geométrica), se tiene:

- cualquier matriz regular descompone en producto de una matriz simétrica por una matriz ortogonal
- el conjunto de matrices simétricas es un espacio vectorial de dimensión $\binom{n+1}{2}$
- cualquier espacio vectorial es contractible

Como conclusión, $GL(n+1; \mathbb{R})$ es contractible a $O(n+1; \mathbb{R})$ para cualquier n . Nótese que el cociente original $GL(n+1; \mathbb{R}) / GL(k+1; \mathbb{R}) \times GL(n-k; \mathbb{R})$ es una C^r -variedad, pero no un grupo cociente aunque sea un cociente de grupos: $GL(k+1; \mathbb{R}) \times GL(n-k; \mathbb{R})$ es un subgrupo cerrado de $GL(n+1; \mathbb{R})$, pero *no* es un subgrupo normal. Por ello, tiene sentido hablar del cociente como espacio topológico, pero no como grupo.

La construcción anterior se puede proyectivizar obteniéndose una sucesión exacta de subespacios proyectivos

$$0 \rightarrow L = \mathbb{P}(W^{k+1}) \rightarrow \mathbb{P}^n := \mathbb{P}((V^{n+1})) \rightarrow \mathbb{P}(Q^{n-k}) \rightarrow 0$$

En Geometría Algebraica se utiliza sobre todo la versión proyectiva. Una descripción abstracta de esta construcción (para módulos sobre anillos) se puede ver en Grothendieck-Dieudonné: *Éléments de Géométrie Algébrique*, Springer-Verlag, 1987).

Desde el punto de vista proyectivo, la asignación que a W le asocia $e_0 \wedge \dots \wedge e_k \in \Lambda^{k+1}V$, modulo \mathbf{K}^* define un único punto en el espacio $\mathbf{P}(\Lambda^{k+1}V)$ con dimensión $\binom{n+1}{k+1} - 1$ (comprobar como ejercicio que el punto obtenido no depende de la elección de las bases en W). Estamos interesados en la imagen de dicha aplicación como subvariedad proyectiva. Denotamos mediante

$$i_P : Grass(k+1, n+1) \longrightarrow \mathbf{P}(\Lambda^{k+1}V)$$

a dicha aplicación, a la que llamaremos *aplicación de Pluecker* (más abajo veremos que es un *embebimiento*).

4.2. Estructura como variedad diferenciable

Con la notación anterior para una base $\{e_0 \dots e_n\}$ de V , construimos un entorno de W mediante

$$\mathcal{E}(W) := \left\{ \left\langle e_i + \sum_{j=k+1}^n \lambda_{ij} e_j, i = 0, \dots, k \right\rangle \in \text{Grass}(k+1, n+1) \right\}.$$

La aplicación φ que a cada elemento de $\mathcal{E}(W)$ le hace corresponder la familia $(\lambda_{ij})_{0 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq n} \in K^{(k+1)(n-k)}$ define una carta sobre un espacio afín de dimensión $(k+1)(n-k)$.

4.2.1. Una representación local canónica

De una forma más intuitiva, un subespacio vectorial $(k+1)$ -dimensional se representa mediante una $(k+1) \times (n+1)$ -matriz A_W de rango $k+1$; mediante un apropiado cambio de variables (acción del grupo lineal general) se puede transformar dicha matriz a la forma canónica $(I_{k+1} \mid M_{(k+1) \times (n-k)})$ donde I_{k+1} es la $(k+1) \times (k+1)$ -matriz identidad y $M_{(k+1) \times (n-k)}$ es una matriz de $(k+1) \times (n-k)$ coeficientes genéricos que representa un sistema de coordenadas locales "canónicas" para un punto de la grassmanniana. Si se escriben los $(k+1) \times (k+1)$ menores de la $(k+1) \times (n+1)$ -matriz A_W en el orden lexicográfico, esta elección de coordenadas corresponde a trabajar en la copia afín $D_+(p_{01, \dots, k})$ del espacio proyectivo ambiente \mathbb{P}^{N_k} para la grassmanniana $\text{Grass}(k+1, n+1)$ donde $N_k = \binom{n+1}{k+1} - 1$. Nótese que la dimensión afín $(k+1)(n-k)$ de la grassmanniana (parametrizada por las entradas de la segunda caja $M_{(k+1) \times (n-k)}$ de la matriz que representa W^{k+1}) es igual a la dimensión del espacio de los homomorfismos de W^{k+1} en $Q^{n-k} = V/W$ que parametrizan el espacio tangente a la Grassmanniana en cada punto.

4.2.2. Atlas para la Grassmanniana

Mediante la acción del grupo proyectivo general $\mathbb{P}GL(n+1; \mathbb{K})$ se transforma el abierto coordenado afín $D_+(p_{01, \dots, k})$ en cualquier otro abierto coordenado, lo cual permite describir un sistema coordenado canónico asociado a las coordenadas afines (Plücker) $\{p_{i_0 i_1 \dots i_k}\}$ donde el multi-índice $I = (i_0 i_1 \dots i_k)$ recorre todas las $k+1$ -tuplas de enteros naturales tales que $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$ (obviamente hay $\binom{n+1}{k+1}$ elecciones posibles).

Lema. - El conjunto de las cartas así obtenidas $(\varphi, \mathcal{E}(W))$ define una estructura de variedad topológica sobre $\text{Grass}(k+1, n+1)$.

En efecto, si $W \in \mathcal{E}(W) \cap \mathcal{E}'(W) \neq \emptyset$, entonces existe un elemento $A \in GL(n+1; K)$ que deja invariante W (pertenecer al estabilizador S_W) y verifica

$$A \cdot (I_{k+1}(\lambda_{ij})) = (I_{k+1}(\mu_{ij})),$$

donde $(\mu_{ij})_{0 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq n}$ son las coordenadas genéricas de un elemento de $\mathcal{E}'(W)$. En consecuencia, el cambio de coordenadas que pasa de $\underline{\lambda}$ a $\underline{\mu}$ se realiza mediante funciones racionales (en particular, polinomios). Por ello, como la grassmanniana $Grass(k+1, n+1)$ está dotada de una estructura natural como variedad analítica ó diferenciable sobre el soporte topológico.

Ejercicio.- Extender los argumentos anteriores al caso de la grassmanniana de subespacios de codimension k para un espacio ∞ -dimensional -típicamente de Hilbert H ó de Banach B -. *Indicación:* El Teorema de la Función Implícita es válido sobre este tipo de espacios. Los puntos del proyectivizado de H ó de B son los "rayos" asociados al comportamiento de partículas en los modelos corpusculares (duales de los modelos ondulatorios para el comportamiento de ondas viajeras).

4.2.3. Descomposición celular del proyectivo

Ejercicio.- Muestra la descomposición celular del espacio proyectivo \mathbb{P}^n . *Indicación:*

1. Introducir la definición de descomposición celular como unión disjunta de "células" es decir de subespacios topológicos que son C^0 -equivalentes a \mathbb{T}^k para algún $k \geq 0$.
2. Verificar que la iteración de la descomposición $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}$ da lugar a una descomposición celular del espacio proyectivo.
3. Interpretar las células como la posición de un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{P}^n$ en relación con una colección de subespacios encajados $\mathbf{p}_0 \subset \dots \subset \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$

El argumento presentado en el último punto del ejercicio pone en escena las banderas completas que se presenta en el apartado siguiente.

4.2.4. La variedad de banderas completas como espacio homogéneo

A una colección creciente de subespacios vectoriales de dimensiones consecutivas se le llama una *bandera completa*. El estabilizador de una bandera completa es el grupo $GL(1) \times \dots \times GL(1)$. Por ello, como espacio homogéneo, la *variedad de banderas completas* está dada por el cociente $B(1, \dots, {}^{n+1}, \dots, 1) \simeq GL(n+1; \mathbb{R}) / (\prod_{i=0}^n GL(1))$. En las aplicaciones a la Física de partículas, habitualmente interesa el caso especial unitario por lo que el cociente a estudiar es $B_{\mathbb{C}}(1, \dots, {}^{n+1}, \dots, 1) \simeq GL(n+1; \mathbb{C}) / (\prod_{i=0}^n U(1))$ donde $U(1)$ es el grupo unitario sobre la circunferencia de radio unidad.

Ejercicio.- Una bandera incompleta es una colección creciente de subespacios vectoriales encajados (no necesariamente de dimensiones consecutivas) de dimensión vectorial $r_1, r_1+r_2, \dots, r_1+r_2+\dots+r_k = n+1$. Cada variedad de banderas incompletas tiene asociada una partición r_1, r_2, \dots, r_k de $n+1$ a la que se llama nacionalidad de la bandera, lo cual justifica la notación $B(r_1, r_2, \dots, r_k)$. Verificar que $B(r_1, r_2, \dots, r_k) \simeq GL(n+1)/(GL(r_1) \times \dots \times GL(r_k))$. Por consiguiente, la variedad de banderas es un espacio homogéneo. La Grassmanniana $Grass(k+1, n+1)$ es un caso particular de variedad de banderas correspondiente a la partición $(k+1, n-k)$ de $n+1$. En ocasiones y de la misma forma que para grassmannianas interesa considerar reducciones al caso real (reducción al grupo ortogonal o especial ortogonal) ó al caso complejo (unitario ó especial unitario); este último es el que presenta mayor relevancia para la Física de partículas. Cada variedad de banderas incompletas es el nodo de un retículo parcialmente ordenado (*poset*: partially ordered set). Visualizad todos los nodos del retículo para $m = 4$ en términos de las particiones de 5

Nota: Las banderas completas se pueden definir sobre espacios de dimensión infinita (de Hilbert o de Banach, típicamente), aunque en este caso se habla de subespacios H' de codimensión k . El objeto geométrico relacionado de interés para la Física Teórica está dado por variedades \mathcal{H} (resp. \mathcal{B}) modeladas sobre un espacio de Hilbert H (respectivamente de Banach B). En lugar de trabajar con variedades de banderas de (variedades modeladas sobre) espacios de Hilbert (resp. de Banach, es más significativo trabajar con retículos de espacios de Hilbert (resp. de Banach) en los que cada nodo representa un espacio. *Práctica avanzada:* desarrollar el formalismo necesario para "camino" en retículos en función de los diferentes tipos de ecuaciones correspondientes a cada uno de los espacios que aparecen como nodos del retículo.

4.2.5. Descomposición celular de la Grassmanniana de Planos

Ejercicio.- Describe los ciclos de Schubert de $Grass(3,6)$ y la estructura topológica en términos de células asociada a los 2- planos proyectivos de \mathbb{P}^5 .

Este ejercicio es significativo porque proporciona el primer ejemplo no-trivial de grassmannianas lagrangianas, es decir, que son subvariedades integrales para las ecuaciones de Euler-Lagrange (de gran interés en Mecánica Analítica) que recuperamos más adelante en términos de la acción del grupo simpléctico $Sp(n)$

4.3. Estructura Algebraica de la Grassmanniana

En términos matriciales, la asignación i_P (inmersión de Plücker) que a cada elemento de $Grass(k+1, n+1)$ le lleva en un punto de $P(\Lambda^{k+1}V)$, se representa tomando como coordenadas naturales en el espacio de llegada la co-

²² El grupo simpléctico está caracterizado como el grupo que deja invariante la matriz antisimétrica J y es el grupo estructural de la Mecánica Analítica en el caso $2n$ -dimensional.

lección ordenada de los determinantes de lps $(k+1) \times (k+1)$ -menores de la $(k+1) \times (n+1)$ -matriz que representa a dicho punto ordenadas en el orden lexicográfico que denotamos mediante p_I (Plücker) donde $I = (i_0, \dots, i_k)$ con $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad (cambiando la base de V para que los $k+1$ primeros generadores den una base de W) que la matriz (a_{ij}) que representa a dicho punto en \mathbb{P}^N es de la forma $(I_{k+1}, B_{(k+1) \times (n-k)})$. El orden lexicográfico sobre los menores de orden $k+1$ de la matriz anterior permite describir en términos coordinados cada punto de la imagen de i_P . Denotaremos mediante

$$(p(i_0, \dots, i_k) = \det(M_{i_0, \dots, i_k})) , 0 \leq i_0 < i_1 \dots < i_k \leq n)$$

a las *coordenadas Plückerianas* de cada punto $L_W \in \text{Grass}(k+1, n+1)$ dadas por los determinantes de tamaño $(k+1) \times (k+1)$ correspondientes a las columnas i_0, \dots, i_k . Estas coordenadas no son arbitrarias, sino que verifican ciertas relaciones cuadráticas de la forma

$$\sum_{\lambda=0}^k (-1)^\lambda p(j_0, \dots, j_{k-1}, e_\lambda) \cdot p(e_0, \dots, e_\lambda, \dots, e_{k+1}) = 0 \quad (RC),$$

donde $0 \leq j_\ell, e_i \leq n$ son enteros verificando las desigualdades habituales: $0 \leq j_0 < j_1 \dots < j_k \leq n$ y $0 \leq e_0 < e_1 \dots < e_k \leq n$. La correspondencia entre subespacios $(k+1)$ -dimensionales de V y puntos de \mathbb{P}^N es biyectiva (demostración no elemental). En particular, tomando la matriz jacobiana de toda esta colección de relaciones cuadráticas, es fácil ver que tiene rango máximo, por lo que la aplicación diferencial es una inmersión. En consecuencia, si admitimos que la imagen de la Grassmanniana está dada por dichas (RC) , entonces, como definen un cerrado en un compacto, es un compacto, por lo que la aplicación de Plücker es un embebimiento. Resumimos estas observaciones en el resultado siguiente

4.3.1. Caracterización algebraica

Teorema. - Existe una correspondencia biyectiva natural entre los k -subespacios $P(W)$ de un espacio proyectivo $P_K^n = P(V_K^{n+1})$ y los puntos $L_W \in P_K^N = \text{Proj}(\Lambda^{k+1}V)$, donde $N = \binom{n+1}{k+1}$, cuyas coordenadas verifican las relaciones cuadráticas (RC) .

Nota. - Una versión clásica de la demostración se puede ver en Hodge and Pedoe: *Methods of Algebraic Geometry*, Vol.2. 1957 (reprt, Cambridge Univ. Press, 1994). Para una demostración más moderna ver S.Kleiman and D.Laksov: "Schubert Calculus", Amer. Math. Monthly, 79 (1972), 1061-1082.

En adelante, identificaremos $\text{Grass}(k+1, n+1)$ con su imagen en el espacio proyectivo \mathbb{P}^N (donde $N = \binom{n+1}{k+1} - 1$) via la aplicación de Plücker. Más adelante (en el §2,3), veremos que, como esta aplicación es un "embebimiento", dicha identificación está justificada. Para fijar ideas, consideremos el caso más sencillo

posible (el caso trivial corresponde al espacio proyectivo, que ya hemos detallado en el §1,1):

4.3.2. Ejemplo Grassmanniana de Rectas en \mathbb{P}^3

Supongamos fijada una base e_0, \dots, e_3 de V . Entonces, el producto exterior induce una base asociada para $\Lambda^{k+1}V$ dada por $e_i \wedge e_j$, donde $0 \leq i < j \leq 3$. De este modo, cualquier elemento $L_W \in Grass(2, 4)$ está unívocamente determinado (modulo \mathbf{K}^*) por la 6-upla correspondiente a los coeficientes

$$L_W = (p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$$

de su expresión como combinación lineal $\sum_{0 \leq i < j \leq 3} p_{ij} e_i \wedge e_j$ de los elementos de la base.

En términos matriciales, fijada una base, es claro que cualquier subespacio 2-dimensional W de un espacio 4-dimensional V se puede representar por los menores de orden 2 de una matriz que representa las componentes de dos elementos w_1 y w_2 que generan W . Más explícitamente, si

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

representa un vector general del subespacio W , entonces $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ donde $0 \leq i < j \leq 3$. Estas coordenadas proyectivas no son arbitrarias, sino que verifican una *única* (en este caso) relación cuadrática

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$$

en \mathbb{P}^5 , a cuyo lugar de ceros se le llama la *cuádrica de Klein* (demuestra que esta cuádrica es la imagen de $Grass(2, 4)$ en \mathbb{P}^5 por el embebimiento de Plücker). Esta cuádrica 4-dimensional tiene dos sistemas de generatrices dados por familias de 2-planos con una interesante geometría que proporciona el marco general para el análisis de congruencias de rectas, es decir, familias biparamétricas de rectas en el espacio ordinario. En el curso de Geometría Algebraica de Variedades se muestran aplicaciones a la Geometría de las grassmannianas de rectas en dimensión arbitraria; el caso de "rectas" (de hecho rayos descritos por partículas sometidas a campos) en espacios de dimensión infinita tiene interés para aplicaciones a la Mecánica Cuántica.

4.4. Apéndice: Algunas aplicaciones de Grassmannianas

La utilización de Grassmannianas $Grass(k, 2k)$ permite abordar el estudio de soluciones de dimensión maximal para las ecuaciones que aparecen usualmente en la Geometrías Simpléctica y de Contacto que son los modelos matemáticos de la Mecánica Analítica clásica para dimensiones par e impar, respectivamente. A estas soluciones se les llama "lagrangianas" ó "legendrianas" ; en el primer

caso, su comportamiento local es similar al de familias de generatrices de una cuádrica.

El uso de las grassmannianas de rectas se ha extendido a diferentes aplicaciones de las matemáticas incluyendo Física Teórica (los espacios twistor de Penrose, p.e.), Economía (para el estudio del Equilibrio General en mercados con información incompleta, p.e.), Robótica (las configuraciones de mecanismos articulados en el espacio de trabajo se visualizan sobre subespacios lineales cambiantes, p.e.), Visión Computacional (las restricciones para los elementos lineales a localizar en Reconstrucción 3D se visualizan sobre Grassmannianas, p.e.), etc

- *Física Teórica* en relación con intentos de unificación de la interacción gravitatoria con la Mecánica Cuántica en el espacio-tiempo 4D con una signatura (2, 2) para la métrica.
- *Visión Computacional*: los sistemas de proyección y reconstrucción 3D se basan en la geometría de rectas del espacio 3D. Las aplicaciones más inmediatas están relacionadas con problemas de Reconstrucción 3D y de renderización. Interesa desarrollar este enfoque para proporcionar un soporte a cuestiones de producción multimedia.
- *Robótica*: La formulación de movimientos de objetos articulados en el marco del Álgebra Geométrica se realiza en términos de screws, twists y wrenches que representan las coordenadas geométricas, cinemáticas y dinámicas de rectas en 3D.
- *Teoría Económica*: Contrariamente a la formulación tradicional, el espacio económico no es cartesiano y presenta curvaturas variables dependiendo de las rigideces del mercado.

4.4.1. Aplicaciones a twistors y extensiones recientes

La aproximación basada en el *programa twistor* de Penrose (1967) propone que los puntos del espacio tiempo de Minkowski deben ser interpretadas como *líneas proyectivas complejas en \mathbb{CP}^3* ; en este caso, los puntos en hipersuperficies reales del espacio proyectivo se convierten en rayos de luz contenidos en una apropiada compactificación del espacio de Minkowski "plano" (sin entrar a considerar los efectos de curvatura que aparecen en la formulación de la Relatividad General).

El *objetivo inicial de la Teoría Twistor* es dar una reformulación relativista de la Geometría Compleja que aparece en la Teoría de la Relatividad Especial. Según la interpretación tradicional, si representamos mediante (M, ds^2) (donde la métrica ds^2 está dada por $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$) al espacio-tiempo de Minkowski, a los puntos de M se les llama *sucesos* y a las trayectorias que describen (dadas por "curvas integrales" de cierto campo) se les llama *línea de mundo* de la partícula.

En el marco de la gravedad cuántica los *twistor* de R. Penrose (1967) son soluciones de sistemas para campos sin masa. Estos campos están soportados sobre las familias de planos que dan las dos reglaciones de la cuádrlica de Klein. Denotemos a cada una de las dos familias de planos que aparecen como sistemas de generatrices en la cuádrlica de Klein, como α y β -planos, respectivamente. Cada uno de los planos pertenecientes a cada una de dichas familias son solución de una "cierta ecuación twistor" y son *totalmente nulos*, en el sentido de que dos cualesquiera de ellos son ortogonales respecto a cierto producto que podemos visualizar sobre la cuádrlica de Klein. En un lenguaje más técnico, los α -planos son los bivectores anti-autoduales que aparecen como soluciones de la ecuación twistor mencionada más arriba (la utilización de Teoría de Representación de Grupos Clásicos permite desarrollar el estudio de la geometría de estas soluciones; ver Atiyah, 1967, para una introducción, y Huggett y Todd, 1985, para más detalles).

La unificación entre gravedad cuántica con la teoría de supercuerdas (una de las posibles explicaciones para la distribución de la materia en el universo fue propuesta por Witten (2003) como teoría twistor de cuerdas.

4.4.2. Aplicaciones a Visión Computacional y Renderización

Las congruencias de rectas en el espacio ordinario se han utilizado en Óptica Geométrica desde finales del s.XIX. El desarrollo reciente de técnicas para la estimación de la forma ó de características de una escena a partir del movimiento (sfm/SfM), así como la necesidad de un mayor control de los haces de rectas que pasan por un punto (plano proyectivo) ó de las rectas que están contenidas en un plano (otro plano proyectivo) en problemas de renderización, están dando lugar a una recuperación de aspectos de esta teoría con aplicaciones relevantes a la producción de contenidos multimedia. Actualmente, no se dispone de algoritmos eficientes para la gestión de la información relativa a congruencias dinámicas de rectas, cuestión que presenta un gran interés para la simulación de efectos especiales ó para la actualización en tiempo real de la información asociada a sfm/SfM.

4.4.3. Algunas aplicaciones a Teoría Económica

La propagación de ondas de choque (debidas a eventos inesperados como shocks, burbujas, etc) se propagan en términos de líneas que se curvan dependiendo de la atracción / repulsión de mercados locales. Esta dinámica modifica en profundidad las inconsistencias habituales basadas en análisis de equilibrio para la dinámica de mercados. Las hipótesis de información completa y los modelos asociados basados en precios normalizados no tienen ninguna validez en la economía real²³. Por ello, es imprescindible reformular la Teoría Económica

²³ La normalización de precios se lleva a cabo dividiendo entre el valor del dinero, suponiendo que este último "no tiene precio", hipótesis que es insostenible

en términos de modelos más realistas que tengan en cuenta que jamás información completa sobre el mercado (a lo sumo sobre k bienes “significativos”) y reintroduciendo las distorsiones producidas por las fluctuaciones en el precio del dinero.

La información incompleta se traduce en la necesidad de reformular la dinámica sobre Grassmannianas $Grass(k, N)$ donde N representa el número total de bienes o servicios a analizar. La cuestión del equilibrio tiene una vertiente

- *topológica* que afecta a la identificación de puntos fijos de una aplicación sobre una grassmanniana que corresponden a puntos de equilibrio “ideales”;
- *cinemática* que afecta a la identificación de regiones de estabilidad caracterizadas por “entornos tubulares” que conectan puntos de equilibrio ideales;
- *dinámica* que afecta al comportamiento de las regiones de estabilidad como resultado de las perturbaciones o shocks en los diferentes mercados de oferta o demanda para bienes o servicios.

El modelado cinemático se realiza en términos de campos vectoriales asociados a Grassmannianas, lo cual requiere una descripción del fibrado tangente a la Grassmanniana que se aborda en el módulo 2. El modelado dinámico afecta al control de la evolución del sistema macroeconómico y se modela en términos de modelos de propagación en presencia de obstáculos o rigideces correspondientes a los diferentes mercados ²⁴.

Las dependencias entre unos mercados y otros debe reflejar las “patologías” vinculadas a la dependencia entre c requiere una formulación en términos de variedades de banderas incompletas y el retículo asociado a las mismas.

Ejercicio (avanzado).- Demuestra un Teorema del Punto Fijo sobre una grassmanniana arbitraria $Grass(k, N)$. Demuestra que los equilibrios dinámicos *genéricos* se presentan sobre el ciclo $\sigma_{1,0,\dots,0}$ de codimensión 1 de $Grass(k, N)$. *Nota.*- La condición de genericidad se puede “relajar” dando lugar a equilibrios dinámicos que se encuentran sobre ciclos de Schubert de codimensión superior de la Grassmanniana.

²⁴ Algunos de estos aspectos se describen en las memorias realizadas de forma conjunta con A.González-Santamaría en 1995

5. Ejercicios

1.3.10.1. Demuestra que la aplicación diagonal $i_\Delta : X \rightarrow \Delta_X \subset X \times X$ dada por la asignación $x \mapsto (x, x)$ es un difeomorfismo, si X es lisa.

1.3.10.2. Dada una C^r -aplicación $f : M \rightarrow N$ entre C^r -variedades, demostrar que $\Gamma := \text{grafo}(f)$ es una C^r -subvariedad de $M \times N$. *Indicación:* Muestra que la aplicación $\text{grafo} : M \rightarrow \Gamma$ es una C^r -equivalencia.

1.3.10.3. Usando la topología producto, es posible reformular otra versión del resultado fundamental del §1,2:

Teorema de las Funciones Implícitas Sea $f : W \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 definida sobre un abierto W de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Supongamos que existe un punto $(x, y) \in W$ tal que $f(x, y) = 0$ y la aplicación lineal dada por la diferencial $(D_2f)(x, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Entonces, existe un entorno (eventualmente más pequeño) $\mathcal{E} = U \times V$ de (x, y) , donde $x \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ e $y \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función $g : U \rightarrow V$ de clase C^r tal que $\forall (x, y) \in U \times V$ se tiene que $f(x, y) = 0$ si y sólo si $y = g(x)$.

Comprueba como ejercicio que esta versión es equivalente a la dada en el §1,2,6 (?) y adaptarla al caso de aplicaciones entre variedades diferenciables.

1.3.10.4. Sea $p_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ la proyección sobre la i -ésima componente. Demuestra que la diferencial $d_{(x_1, x_2)}(p_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i)$ es la primera proyección

$$dp_i : T_{x_1}X_1 \times T_{x_2}X_2 \rightarrow T_{x_i}X_i$$

Con más generalidad, la diferencial del producto de aplicaciones es el producto de las diferenciales de cada una de las aplicaciones:

1.3.10.5. Comprueba que la diferencial $d_x i_\Delta : T_x X \rightarrow T_{(x, x)} \Delta \subset T_{(x, x)} X \times X$ de la aplicación diagonal $i_\Delta : X \rightarrow \Delta \subset X \times X$ está dada por $d_x i_\Delta(v) = (v, v)$, $\forall v \in T_x X$. En consecuencia, $T_{(x, x)} \Delta$ es la diagonal de $T_x X \times T_x X$.

1.3.10.6. Sea $\Gamma : X \rightarrow X \times Y$ la aplicación *grafo de* $f : X \rightarrow Y$, dada por la asignación $x \mapsto (x, f(x))$. Demuestra que $d_x \Gamma(v) = (v, d_x f(v))$. En consecuencia,

$$T_{(x, f(x))} \Gamma = \text{grafo}[d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y] .$$

1.3.10.7. El producto de variedades M y N con borde es una variedad cuyo borde es igual a

$$\partial(M \times N) = (\partial M) \times N \cup M \times \partial N .$$

Este tipo de construcciones se usa frecuentemente cuando se desea comparar dos variedades ó dos aplicaciones, mediante el método de homotopía (en este caso, tomamos $I = [0, 1]$). Comprueba que $\partial \partial M = \emptyset$ para cualquier variedad M .

1.3.10.8 *Toro como superficie de revolución* El toro \mathbb{T}^2 se puede visualizar como la rotación central de radio c con respecto al eje OIz de una circunferencia de radio a contenida en el plano $y = 0$. Una descripción implícita de la superficies resultantes es $c - \sqrt{(x^2 + y^2)} + z^2 = a^2$. Identificad los puntos en los que la parametrización local dada por

$$x = (c + a \cos v) \cos u \quad , \quad Y = (c + a \cos v) \sin u \quad , \quad z = a \sin v$$

para $u, v \in [0, 2\pi]$ deja de ser inyectiva.