

1.2: Elementos de Análisis Diferencial Local

Javier Finat

Índice

1.	Aplicaciones de clase C^r	4
1.1.	Extendiendo el caso cartesiano	4
1.1.1.	Aplicaciones de clase r	4
1.1.2.	Caracterización relativa	4
1.1.3.	Comentarios	4
1.1.4.	Apéndice: Nociones básicas de Álgebra Local	5
1.2.	Representación coordenada local	6
1.2.1.	Ejemplo 1: La circunferencia	7
1.2.2.	Ejemplo 2: La esfera	8
1.2.3.	Ejemplo 3: Varios centros de proyección	8
1.3.	Estratificación conjuntista de una aplicación	8
1.3.1.	Punto regular para una aplicación	10
1.3.2.	Punto crítico para una aplicación	10
1.3.3.	Teorema de Morse-Sard	11
1.3.4.	Algunas aplicaciones del Teorema de Sard	11
1.4.	Topología de los conjuntos de nivel	12
1.4.1.	Reconstruyendo objetos mediante agregación de capas	13
1.4.2.	Funciones de Morse	14
1.4.3.	Apéndice: Una aproximación histórica	15
2.	Aplicaciones diferenciables (Fréchet)	16
2.1.	Diferenciabilidad en un abierto	17
2.1.1.	Diferenciabilidad global	17
2.1.2.	Germen de una aplicación de clase r	18
2.2.	Diferencial de una aplicación	18
2.2.1.	Versión analítica local	19
2.2.2.	La noción de Derivada Parcial	20
2.2.3.	Regla de la Cadena	20
2.2.4.	Notación: Convenio de Einstein	21
2.3.	Aplicaciones regulares. Interpretación	21
2.3.1.	Teorema de la Función Implícita	22
2.3.2.	Teorema de las Funciones Implícitas. Versión local	23
2.3.3.	Teorema de la Función Inversa	23
2.3.4.	Variedades parametrizadas	23

2.4.	La noción de corango	24
2.4.1.	El caso $n = p$	25
2.4.2.	Clasificación local algebraica por el rango	26
2.4.3.	Algunos ejemplos sencillos	27
2.4.4.	Lugar discriminante de una aplicación real	27
3.	Vectores tangentes	29
3.1.	Curvas tangentes	29
3.1.1.	Vector velocidad de una curva	29
3.1.2.	Definición conjuntista-algebraica de Espacio Tangente	31
3.1.3.	Pegado de curvas con tangentes compatibles	31
3.1.4.	Reinterpretación usando operadores	32
3.2.	Gérmenes de aplicaciones	33
3.2.1.	Definición	33
3.2.2.	Proposición	33
3.2.3.	Comportamiento funtorial	33
3.2.4.	Ejemplo	34
3.2.5.	Una nota sobre la aproximación analítica local	34
3.3.	El módulo de las derivaciones	35
3.3.1.	Equivalencia entre descripciones	35
3.3.2.	Trivialidad local para el espacio tangente	36
3.3.3.	El espacio tangente a la circunferencia	36
3.3.4.	El espacio tangente al toro	38
3.4.	Aplicación Tangente como derivación	39
3.4.1.	La derivación como funcional	39
3.4.2.	Expresión Local de la Aplicación Tangente	39
3.4.3.	Campo vectorial gradiente	40
3.4.4.	Versión coordenada local	41
4.	Vector Tangente a una Aplicación en un Punto	42
4.1.	Dualidad entre derivaciones y diferenciales	42
4.1.1.	Espacio cotangente. Definición	42
4.1.2.	El caso cartesiano	42
4.1.3.	Formas no-degeneradas	43
4.2.	Calculando espacios tangentes	43
4.2.1.	Representaciones implícitas	44
4.2.2.	Nota sobre la extensión al caso singular	45
4.2.3.	Representaciones paramétricas	46
4.2.4.	Representaciones simbólicas	47
4.3.	Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior	50
4.3.1.	Notación	50
4.3.2.	Construcción local de vectores tangentes de orden superior	50
4.3.3.	Un ejemplo elemental: El Péndulo Simple	51
4.4.	Apéndice: Ecuaciones del movimiento en Mecánica Clásica	52
4.4.1.	Formulación newtoniana	52
4.4.2.	Formulación hamiltoniana	52
4.4.3.	Formulación hamiltoniana generalizada	53
5.	Complementos	55

5.1.	Conclusiones	55
5.2.	Ejercicios	56
5.2.1.	Carácter intrínseco de la aplicación tangente	56
5.2.2.	Estructura diferencial de la circunferencia	56
5.2.3.	Inmersiones locales	56
5.2.4.	El complementario de una semirecta en el plano	56
5.2.5.	Estructuras diferenciables sobre el espacio cartesiano	57
5.3.	Prácticas	57
5.3.1.	Cálculo diferencial sobre espacios de Banach	57
5.3.2.	Revisitando la proyección estereográfica	57
5.3.3.	El plano proyectivo como variedad diferenciable	59
5.3.4.	Forma local en el entorno de un punto regular	60
5.4.	Retos	60
5.4.1.	Políticas de ajuste en Macroeconomía	60
5.4.2.	Espacios de configuraciones y trabajo en Robótica	61
5.4.3.	Asistencia a la producción de contenidos multimedia	62
5.4.4.	Interacciones en Mecánica de Medios Continuos	63

La Topología General proporciona un soporte para construir espacios topológicos obtenidos como subespacios o espacios cociente por una relación de equivalencia. Sin embargo, para obtener una C^r -estructura con $r \geq 1$ es necesario añadir información adicional. Si se adopta el enfoque presentado en el capítulo anterior, dicha información procede de propiedades asociadas a condiciones de “pegado”, es decir, los cambios de cartas deben ser de clase C^r -equivalencias sobre la imagen $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ de la intersección de los dominios coordenados correspondientes a las cartas (U_i, φ_i) .

La verificación de las condiciones de compatibilidad local para el pegado global es fácil si M es un espacio homogéneo por la acción de un grupo de Lie G ; esto ocurre p.e. para el espacio cartesiano (caso trivial), la esfera, el espacio proyectivo, el toro m -dimensional, la grassmanniana de k -espacios, etc. En todos estos casos, basta verificar la condición localmente y extenderla utilizando la estructura de C^r -variedad del grupo. Sin embargo, si el espacio no es homogéneo, la verificación de las condiciones de compatibilidad para el pegado es un problema bastante más tedioso. La existencia de simetrías simplifica el problema, pero es necesario mostrar procedimientos generales que permitan construirlas.

Para abordar casos más complicados que son de interés para aplicaciones prácticas es necesario conocer el caso regular asociado a variedades que presentan inicialmente un comportamiento homogéneo. Este punto de vista motiva la introducción de restricciones más estrictas asociadas a condiciones ideales relativas tanto al soporte (inicialmente dado por una C^r -variedad) como a las funciones definidas sobre el soporte (inicialmente suponemos que son regulares, aunque para el pegado necesitemos cocientes de funciones regulares).

Para C^r -estructuras (que contienen a las de clase C^∞ ó suaves como “límite”), el análisis Diferencial Local proporciona resultados que permiten abordar de forma sintética la verificación de propiedades de compatibilidad entre datos locales. Básicamente, se requiere que la diferencial de una aplicación sea “regular”; en ese caso se puede aplicar el Teorema de la Función Implícita que se extiende de forma natural al pegado de cartas mediante conjugación (acción izquierda-derecha) de las matrices jacobianas asociadas a los cambios de carta en los espacios de partida y llegada.

El enfoque desarrollado en este capítulo tiene un carácter local, es decir, *todas* las nociones y resultados se refieren a cartas locales (φ, U) , (ψ, V) en los espacios de partida N y llegada P para una C^r -aplicación $F : N \rightarrow V$. El soporte teórico inicial para esta presentación está dado por el Análisis de Funciones de Varias Variables Reales que se supone conocido de Análisis II; los resultados de esta materia no se demuestran y tan sólo se presenta una reinterpretación en términos algebraicos (derivaciones sobre un anillo, p.e.) ó en términos geométricos (campos vectoriales).

El estudio de variedades se puede realizar de forma más abstracta y unificada en términos de las funciones regulares definidas localmente sobre las variedades. La restricción de estas funciones a cada punto $p \in M$ da lugar a un anillo de funciones regulares que se denota mediante $\mathcal{O}_{M,p}$ en Geometría Diferencial o bien mediante $\mathcal{O}_{X,x}$ en Geometría Algebraica o en Geometría Analítica. En

cualquier caso se trata de un anillo local cuyo ideal maximal $\mathcal{M}$ está dado por las funciones (diferenciables, algebraicas, analíticas) que se anulan en el punto. Esta reformulación permite aplicar el Álgebra Local como formalismo común a todas las Geometrías y desplaza el estudio de variedades como conjuntos o como estructuras, al estudio de variedades en términos del “pegado” de anillos locales.

Esta aproximación formal al Análisis de Funciones de Varias Variables Reales permite realizar una presentación algebraica común a los diferentes marcos geométricos (Diferencial, Algebraica, Analítica). No obstante, el enfoque formal en términos de anillos de funciones se desarrolla sobre todo en Geometría Algebraica y en Geometría Analítica (G.A.G.A.) y requiere prerequisites adicionales procedentes del Álgebra Local. Para minimizar las dependencias con respecto a herramientas adicionales, en este Curso se adopta un enfoque más “pedestre” vinculado a la utilización de parametrizaciones locales y a la obtención de propiedades a partir de una versión clásica del Análisis Diferencial Local. No obstante, en la primera sección del capítulo se muestran algunos elementos significativos para la unificación de las diferentes geometrías utilizando algunos rudimentos de Álgebra Local.

En capítulos posteriores, el único aspecto que se mantiene procedente del enfoque formal algebraico (válido para las diferentes geometrías) afecta a una reformulación infinitesimal del desarrollo de Taylor. Esta reformulación se realiza en términos de “gérmenes” de aplicaciones; en el contexto analítico formal (el más amplio), los gérmenes pueden ser interpretados intuitivamente como clases de equivalencia de desarrollos en serie formales (para una aproximación diferenciable ver p.e. Warner, 1972, ó Hirsch, 1978).

En la primera sección se presenta una aproximación general a las aplicaciones de clase C^r en la que predominan los aspectos formales. La segunda sección introduce el enfoque diferencial (a la Fréchet) para contar con el formalismo necesario para derivadas direccionales como extensión natural de las derivadas parciales en el caso cartesiano. La tercera sección muestra diferentes descripciones equivalentes de la noción de vector tangente y el tratamiento forma en términos de las derivaciones. La última sección introduce la noción de diferencial; se muestran algunas aplicaciones básicas a la Mecánica Clásica que pueden ser saltadas en primera lectura.

1. Aplicaciones de clase C^r

Para empezar, recordemos la definición del Análisis de Varias Variables Reales:

Definición.- Se dice que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una aplicación de clase C^r para $1 \leq r \leq \infty$ si sus componentes $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^r para $1 \leq i \leq p$, es decir, son continuas y derivables hasta orden r .

1.1. Extendiendo el caso cartesiano

La noción de aplicación de clase $C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ se extiende de forma natural al caso global para una aplicación $F \in C^r(N, P)$ "pegando" los datos locales $C^r(U_j, V_k)$. Para ello, introducimos cartas locales (U_j, φ_j) para $\mathbf{p} \in U \subset N$ en el espacio de partida y (V_k, ψ_k) en $f(\mathbf{p}) \in V \subset P$ en el espacio de llegada.

1.1.1. Aplicaciones de clase r

Definición.- Se dice que $F : N \rightarrow P$ es de clase C^r en $\mathbf{p} \in P$, si $\psi_k \circ F \circ \varphi_j^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ es de clase C^r en $\varphi_j(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $F : N \rightarrow P$ es de clase C^r si es de clase C^r para cualquier punto $\mathbf{p} \in N$.

Ejercicio.- Comprueba que la noción de clase C^r no depende de la carta coordenada elegida.

1.1.2. Caracterización relativa

Dada una aplicación $F \in C^r(N, P)$, para cada función $f \in C^r(P, \mathbb{R}^k)$, le podemos asociar $F^*(f) := f \circ F \in C^r(N, \mathbb{R}^k)$

Definición.- Diremos que $F \in C^r(N, P)$ es de clase C^r si $F^*(f) := f \circ F$ es de clase C^r para cualquier $f \in C^r(P, \mathbb{R}^k)$.

Así, p.e. si $k = 1$ y $r = \infty$, entonces la asignación anterior define una aplicación

$$F^* : C^\infty(P, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(N, \mathbb{R}) \quad | \quad F^*(f) := f \circ F$$

verificando las propiedades siguientes:

$$id^* = id, \quad (F \circ G)^* = G^* \circ F^*, \quad (F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$$

(comprobarlo como ejercicio). Se dice entonces que F^* se comporta de forma *contravariante*.

1.1.3. Comentarios

La independencia con respecto a la carta permite desarrollar el análisis local usando sistemas curvilíneos de coordenadas asociados a parametrizaciones dados como imágenes inversas de cartas locales $\varphi : U \rightarrow W$

- Para buena parte de los argumentos basta suponer que $f \in C^1(N, P)$. Esta hipótesis no añade mayor generalidad a los resultados, pues si $r \geq 1$ se tiene que $C^\infty(N, P)$ es denso en $C^r(N, P)$ para la topología débil ó compacta-abierta) definida sobre $C^r(N, P)$ mediante un sistema fundamental de entornos (ver Hirsch, 1978). La extensión al caso C^0 es significativa para aplicaciones basadas en modelos lineales a trozos (piecewise-linear ó PL-modelos).
- La construcción que se presenta en este capítulo se puede llevar a cabo si se sustituye la palabra “variedad” por espacio de Banach (ver ejercicio 4 para más detalles). En efecto, el resultado fundamental utilizado es el Teorema de la Función Implícita, válido para este tipo de espacios ∞ -dimensionales. Sin embargo, para fijar ideas nos restringiremos habitualmente a variedades finito-dimensionales. Algunas referencias para una aproximación geométrica a espacios de Banach son Abraham, Marsden y Ratiu, §2 y Choquet-Bruhat et al; otra referencia de gran utilidad es Brickell y Clark, §4).

1.1.4. Apéndice: Nociones básicas de Álgebra Local

Para cualquier dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ denotemos mediante $C^\infty(D, \mathbb{R})$ el álgebra de todas las funciones diferenciables en D (respecto a las operaciones usuales de suma y producto en $x \in D$). Para cualquier punto $a \in D$ construimos el ideal $\mathcal{M}_a$ de las funciones $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que se anulan en a , es decir, $f(x) = (x - a)g(x)$ para alguna función g . Es fácil ver que $\mathcal{M}_a$ es un ideal maximal y que el cociente $C^\infty(D, \mathbb{R})/\mathcal{M}_a \simeq \mathbb{R}$. Se dice entonces que $C^\infty(D, \mathbb{R})$ es un *anillo local*. Esta noción algebraica se extiende de forma inmediata a las categorías algebraica y analítica.

Con más generalidad, el conjunto de funciones $f \in C_x^r(N, \mathbb{R})$ definidas en un punto $x \in N$ tiene estructura de anillo local con ideal maximal $\mathcal{M}_x$ dado por el conjunto de funciones que se anulan en $x \in M$. El cociente $C_x^r(N, \mathbb{R})/\mathcal{M}_x$ es isomorfo a $\mathbb{R}$.

La composición de aplicaciones de clase C^r es una aplicación de clase C^r para $0 \leq r \leq \infty$. Además, una aplicación f es de clase $C^\infty(N, P)$ si, y sólo si, $g \circ f$ es de clase $C^r(N, \mathbb{R})$ para cualquier $g \in C^\infty(P, \mathbb{R})$.

Dada una aplicación $f : N \rightarrow P$, para cada punto $x \in M$ podemos dotar a $C_x^r(N, \mathbb{R})$ de una estructura natural como $C_{f(x)}^r(P, \mathbb{R})$ -módulo, mediante la aplicación que a cada elemento $\alpha \in C_{f(x)}^r(P, \mathbb{R})$ le hace corresponder la composición $f \circ \alpha \in C_x^r(N, \mathbb{R})$. Esta operación permite relacionar propiedades de los espacios de partida y llegada para f en términos de las funciones regulares definidas sobre la variedad (este es el enfoque común en GAGA).

En el caso algebraico (resp. analítico) denotamos habitualmente mediante $\mathcal{O}_{X,x}$ al anillo local de las C^r -funciones algebraicas (resp. analíticas) definidas en $x \in X$ mediante polinomios (resp. desarrollos en serie convergentes). En

el caso algebraico, los puntos están representados por ideales maximales y las variedades reducidas e irreducibles están caracterizadas por ideales primos $\mathfrak{p}$. Dado un álgebra conmutativa A con unidad sobre un cuerpo k , denotamos mediante $\text{Spec}(A)$ al conjunto de ideales primos de A .

Cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de A se considera como un “punto” del espectro (que seguimos denotando como) $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ al que asociamos el álgebra $A/\mathfrak{p}$ (que recibe el nombre de anillo coordenado de la variedad asociada a $\mathfrak{p}$ en Geometría Algebraica y Analítica). Con esta notación, cada elemento $a \in A$ se puede interpretar como una “función” cuyo valor en el “punto” $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ es igual a la imagen de a por el homomorfismo de paso al cociente $A \rightarrow A/\mathfrak{p}$ (que se anula si $a \in \mathfrak{p}$). En particular, a cada “punto” $\mathfrak{p}$ se le asocia un álgebra cociente $A/\mathfrak{p}$ sin divisores de cero (pues $\mathfrak{p}$ es primo). Con esta notación, la interpretación de $a \in A$ como una “función” toma sentido como un morfismo $\mathfrak{p} \mapsto [a] \in A/\mathfrak{p}$. El álgebra cociente $A/\mathfrak{p}$ depende del ideal primo $\mathfrak{p}$ y al conjunto de ideales primos (correspondientes a las subvariedades reducidas e irreducibles) se le llama el espectro de A y se le denota mediante $\text{Spec}(A)$.

Habitualmente, se denota mediante $\mathcal{O}_{X,x}$ al anillo local de la variedad algebraica ó analítica X en el punto $x \in X$ y mediante $\mathcal{M}_{X,x}$ al ideal maximal en $x \in X$. En cualquier caso, el cociente $\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{M}_{X,x}$ es isomorfo al cuerpo base k sobre el que están construidas las funciones regulares (polinomios ó series convergentes) en el punto $x \in X$.

Ejemplo. - El caso “más simple” corresponde al anillo $A = \mathbb{C}[z]$ de polinomios en una variable compleja. Cualquier ideal primo $\mathcal{P} \subset A$ no-nulo en este caso es maximal y corresponde a los polinomios divisibles entre $z - z_0$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$ fijo. Por ello, cualquier polinomio $p(z) \in A$ admite una representación única (división euclídea) como $p(z) = p_0 + (z - z_0)g(z)$ donde $p_0 \in \mathbb{C}$; en particular, $A/\mathcal{P} \simeq \mathbb{C}$. En general, la “mayor parte” de los ideales primos $\mathfrak{p}$ no son maximales, pero el argumento sigue siendo válido para los ideales maximales, es decir, para el espectro maximal $\text{Specm}(A)$.

Cuando el ideal I no es primo, admite una descomposición “esencialmente única” en componentes primarias $\mathfrak{p}_1^{m_1} \dots \mathfrak{p}_s^{m_s}$ donde m_k es la “multiplicidad” de la componente k -ésima dentro de la descomposición. Un análisis más detallado de estas cuestiones se aborda en el Curso de Geometría Algebraica ó en la Geometría Analítica de Varias Variables.

1.2. Representación coordenada local

Del mismo modo que en el §1.1, identificaremos en lo sucesivo el dominio U de una carta (U, ϕ_U) de una C^r -variedad M con su imagen $\phi_U(U) \subset \mathbb{R}^m$ mediante la C^r -equivalencia local ϕ con su imagen (un dominio en $\mathbb{R}^n$). Esta identificación permite representar las coordenadas locales sobre el dominio de la carta en términos de las coordenadas habituales de $\mathbb{R}^n$ y trasladar el formalismo usual del Cálculo Diferencial sobre cada abierto coordenado U de N . Por ello, no necesitamos considerar a la variedad como una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ para algún

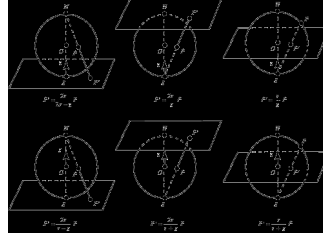


Fig. 1: Expresión conforme de las transformaciones triangulares

n suficientemente grande.

La existencia de una representación implícita de la forma $F(\underline{x}) = 0$ facilita a menudo su descripción como variedad.

1.2.1. Ejemplo 1: La circunferencia

La circunferencia $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ está parametrizada por la coordenada x mediante

$$y_+ = \varphi_+(x) := +\sqrt{1-x^2}, \quad y_- = \varphi_-(x) := -\sqrt{1-x^2}$$

de forma unívoca salvo para los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. En ambos casos $x \in U_i = (-1, 1)$. Para cada punto $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^1$ existe un pequeño entorno $U(\mathbf{p})$ que es difeomorfo a un pequeño entorno de $x \in (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Sin embargo este argumento no es válido para los puntos $(+1, 0)$ y $(-1, 0)$; razonadlo, observando que la proyección sobre el eje Ox es tangente en ambos puntos.

Si se desea incorporar estos puntos para obtener una parametrización completa de la circunferencia, debemos introducir las cartas relativas a la proyección sobre el eje Oy . Dicho de otro modo, debemos introducir las expresiones $x_+ = \varphi_+(y) := +\sqrt{1-y^2}$ y $x_- = \varphi_-(y) := -\sqrt{1-y^2}$ que nos dan una representación unívoca salvo para los puntos $(0, +1)$ y $(0, -1)$. En ambos casos $y \in V_i = (-1, 1)$.

La aplicación permite relacionar los datos de ambas representaciones coordenadas es la reflexión que intercambia la y con la x . De este modo, se obtiene un recubrimiento formado por 4 cartas para la circunferencia $\mathbb{S}^1$ dado por funciones coordenadas $\pm\sqrt{1-x_i^2}$ definidas sobre el intervalo $(-1, 1) \subset \mathbb{R}^1$ para $i = 0, 1$. La compatibilidad entre las diferentes cartas sobre la intersección $U_i \cap U_j$ de los dominios está dada por $\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x_i) = x_{i+1} \pmod{2}$.

La parametrización polar $(\rho, \theta) \in \{1\} \times (0, \pi)$ proporciona una representación basada en dos cartas solamente, en lugar de las 4 mostradas más arriba. Razonad por qué es necesario usar dos cartas en términos de la falta de inyectividad que presenta la función argumento que describe el ángulo polar $\theta = \arctg(\frac{y}{x})$. Extender como ejercicio este ejemplo al caso 3D.

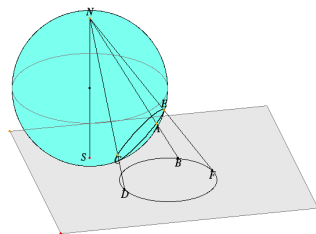


Fig. 2: Proyección estereográfica de círculos máximos

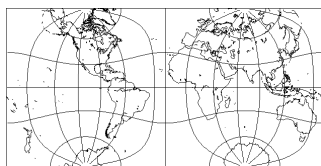


Fig. 3: Proyección doblemente periódica de Guyou

La proyección estereográfica de la esfera desde un polo sobre el plano tangente en el polo opuestos se ha presentado en el capítulo anterior. La expresión más compacta desde el punto de vista matemático corresponde a usar una coordenada compleja sobre la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$.

Una animación en vídeo de la representación precedente se puede ver a partir del minuto 11 del vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=pWOMDm6ejlw>

Alternativamente, se pueden utilizar k centros de proyección de manera simultánea. El “pegado” de datos asociados a diferentes proyecciones requiere funciones k -periódicas que permiten minimizar las distorsiones asociadas a los modelos precedentes.

Estos modelos presentan una complejidad bastante mayor y por ello no se consideran en estas notas ¹.

Un invariante algebraico asociado a la matriz jacobiana que representa la diferencial es el *rango* $r(\underline{p}) := \text{rang}(Jac(f)(\underline{p}))$. Para espacios de dimensión infinita (como los espacios de funciones) y para un enfoque funtorial mejor

¹ Más detalles en <http://members.shaw.ca/quadibloc/maps/mcf0703.htm>

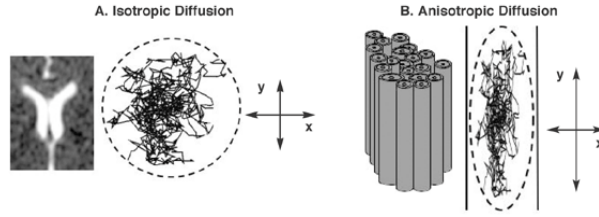


Fig. 4: Difusión Anisótropa para moléculas de agua en el cerebro (NIH, USA)

adaptado al uso de formas diferenciales es más frecuente abordar la clasificación algebraica básica en términos del corango; en el caso de dimensión finita $\text{corang}(f) := m - \text{rango}(\text{Jac}(f))$ donde $m = \min(n, p)$

La mayor parte de la Geometría Diferencial se ocupa de los puntos regulares. Las técnicas de “suavizado” en Ingeniería permiten pasar de un modelo eventualmente singular a uno regular. El “coste” que tiene esta transformación de suavizado es la supresión de fenómenos críticos en los que tiene lugar un cambio cualitativo en la topología de la forma o de las soluciones de un sistema dinámico. En particular, el suavizado ignora las “transiciones” que tienen lugar a lo largo de las discontinuidades de una función. En el caso diferenciable estas transiciones se pueden representar como fenómenos de “bifurcación” asociados a cambios que tienen lugar en la distribución de la materia o en la propagación de ondas en medios no-homogéneos.

En el caso ideal de variedades, a falta de homogeneidad global se recurre a una homogeneidad local que se describe en términos de simetrías locales. Más adelante, veremos que las simetrías se pueden generar mediante integración de campos vectoriales, dando lugar a espacios localmente simétricos que se han esbozado al final del primer capítulo. En aplicaciones prácticas es frecuente utilizar modelos de propagación para extender propiedades observadas localmente; obviamente, la propagación no tiene por qué ser isótropa (con las mismas características) en todas las direcciones, debido a la “reacción” que opone un “medio irregular” a la propagación de una onda representativa de la propagación. El estudio de la anisotropía sobre variedades permite modelar medios mixtos de gran interés para aplicaciones en Ingeniería, Imágenes biomédicas, Física, Geología ó Economía, entre otras áreas (ver Fig.4 para un ejemplo de imágenes biomédicas)

Por todo ello, es necesario disponer de información sobre las “discontinuidades” que presentan objetos y procesos controlados por funcionales. Las singularidades de variedades y de las aplicaciones entre variedades proporcionan modelos para representar dichas discontinuidades y facilitan una jerarquía “natural” que permite visualizar posibles evoluciones de las mismas (ver Fig.5 para una ilustración sencilla).

Es preciso distinguir claramente entre singularidades de las variedades y de las funciones para el modelado dependiendo de la aplicación a desarrollar. Las

singularidades de aplicaciones permiten modelar cambios cualitativos en procesos correspondientes a cambios de estado (en el espacio original) o transiciones de fase (en el espacio co-tangente). En esta subsección se aborda inicialmente el estudio de los puntos singulares de una aplicación entre dos espacios cartesianos (obviamente lisos y regulares) como el primer caso a analizar desde el punto de vista local.

1.3.1. Punto regular para una aplicación

Definición.- Dada $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ se dice que $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$ es un *punto regular* para f , si la diferencial $d_{\underline{p}}f$ tiene rango máximo $m = \min(n, p)$.

En virtud del Teorema de la Función implícita, la noción de ser punto regular es *local*, es decir, se extiende a un pequeño entorno U de $\underline{p}$. Por ello, el conjunto de puntos regulares para f es un *conjunto abierto*, no necesariamente conexo, al que se denota mediante $Reg(f)$.

Ejercicio.- Verificar que el conjunto de puntos regulares de una función es un abierto (*Indicación:* Mostrar que el complementario es un cerrado.)

1.3.2. Punto crítico para una aplicación

Definición.- Diremos que $\underline{p}$ es un *punto singular* para $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ si no es un punto regular.

En términos coordenados locales, el conjunto de puntos singulares para $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ está caracterizado por la anulación de los determinantes de tamaño máximo $m \times m$ de la matriz jacobiana. Por ello, el conjunto de puntos singulares para f es un *cerrado* al que se denota mediante $Sing(f)$.

Si $P = \mathbb{R}$, diremos que $f(p) \in \mathbb{R}$ es un *valor crítico* si es imagen de un punto crítico.

Si (U, φ) es una carta local en p y $(x^1, \dots, x^n)$ un sistema de coordenadas locales en $p \in U$ relativo al abierto U , entonces $\underline{p} \in N$ es un *punto crítico de una función f* si y sólo si

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^n} = 0$$

Ejercicio.- la condición para un punto de ser crítico no depende de la carta (U, φ) elegida

Indicación: Si $p \in U_i \cap U_j$, entonces el cambio de variable se expresa mediante un cambio de carta $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ donde φ_i, φ_j son C^r -equivalencias sobre $\varphi_i(U_i \cap U_j)$. La diferencial $d_p(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) = d\varphi_j \circ d\varphi_i^{-1}$ y está representada por el producto $(Jac(\varphi_j)Jac(\varphi_i)^{-1})(\varphi_i(\underline{p}))$ de la inversa de la matriz jacobiana $Jac(\varphi_i)$ de φ_i por la matriz jacobiana $Jac(\varphi_j)$ de φ_j ; ambas transformaciones son inversibles por ser C^r — *equivalencias*. La condición de tener rango máximo no se modifica por la acción del grupo $GL(n, \mathbb{R})$ de las transformaciones inversibles sobre la aplicación lineal que representa la evaluación de la $(p \times n)$ -matriz jacobiana en cada punto $\varphi_i(\underline{p}) \in \mathbb{R}^n$

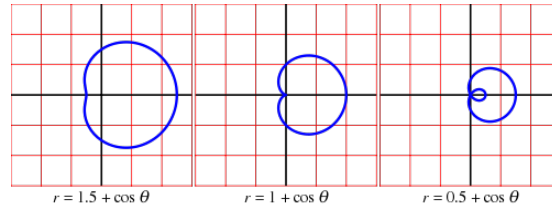


Fig. 5: Evolución del caracol de Pascal (cardioid)

Nota.- Los puntos críticos para una aplicación facilitan la visualización de los cambios cualitativos que tienen lugar en deformaciones de objetos. Cuando la deformación es uniparamétrica se puede visualizar como una curva ó una superficie espacio-temporal. En este caso, los puntos críticos corresponden frecuentemente a variedades algebraicas que no admiten una estructura global como variedad diferenciables, aunque sí puedan admitirla localmente (ver Fig.5)

1.3.3. Teorema de Morse-Sard

El resultado fundamental analítico para el conjunto de puntos no-regulares de una aplicación es el Teorema de Morse-Sard (1939-42) que se supone conocido de Teoría de la Medida (Análisis II):

Teorema de Morse-Sard.- El conjunto de valores críticos de una aplicación $f \in C^r(N, P)$ tiene *medida nula* si $r > \max(n - p, 0)$.

Observaciones.- Demostraciones próximas al marco teórico de estas notas se pueden ver en M.W.Hirsch: *Differential Topology* (GTM, Springer-Verlag, 1976) ó bien Abraham, Marsden y Ratiu: *Manifolds, Tensor Analysis and Applications (2nd ed)* (Appl. Math.Sciences 75, Springer-Verlag, 1988). Este Teorema juega un papel crucial para la definición de la integral sobre variedades mediante “pegado” de integrales definidas sobre abiertos coordenados; el pegado se lleva a cabo usando particiones de la unidad.

Aunque el conjunto de valores críticos tenga medida nula, ello no implica que sean irrelevantes. Al contrario, en la Reconstrucción de objetos el paso a través de niveles críticos $f^{-1}(c)$ se traduce en cambios cualitativos en la topología que se representan como “adjunción de células”. La Teoría de Morse es el primer tratamiento sistemático de este problema (ver la Fig.6 para una ilustración sencilla).

1.3.4. Algunas aplicaciones del Teorema de Sard

El Teorema de Sard es relevante para conectar aspectos locales y globales. Algunas de las más relevantes son las siguientes:

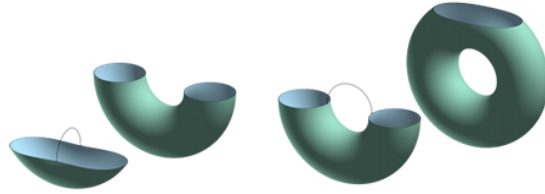


Fig. 6: Construyendo el toro mediante adjunción de superficies de nivel

- El “pegado” de datos locales (ver capítulo 1.3) donde se utiliza para la definición de integral sobre variedades
- La demostración del carácter “disperso” y aislado de las singularidades no-degeneradas para una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre cualquier variedad compacta M .
- La definición moderna de *transversalidad* y el carácter genérico de dicha condición. La extensión al espacio de jets (R.Thom, 1953) puede ser alcanzada mediante el método de “pequeñas” perturbaciones de las aplicaciones originales (R.Thom, 1955) ²
- La aproximación de una función por otra cuyas singularidades cuyo grafo corta transversalmente a la original en el espacio de “todas las derivaciones posibles”, es decir, la densidad de las funciones de Morse para la topología compacta-abierta (R.Thom, 1956)
- La extensión al caso de espacios de Banach B (Smale, 1965) que permite el tratamiento en términos de variedades de Banach $\mathcal{B}$ modeladas sobre un espacio B de Banach

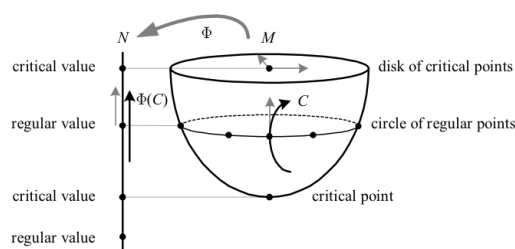
Aunque el conjunto de puntos singulares tenga medida nula, este conjunto es el más relevante para describir cambios cualitativos en la geometría de un objeto ó en la dinámica de un proceso. Por ello, el resto de la sección está enfocado a proporcionar algunas primeras claves para el estudio y control de los puntos críticos de una aplicación.

1.4. Topología de los conjuntos de nivel

Una *cuestión básica* es tratar de identificar las relaciones entre las propiedades topológicas de una variedad compacta M y las propiedades analíticas de funciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definidas sobre M . La Teoría de Morse proporciona un marco general para abordar y resolver este problema.

El análisis de las variedades de nivel permite recuperar la topología global de una variedad. La Teoría de Morse proporciona el marco general para esta

² La demostración formal de este resultado no es elemental y se puede ver en Hirsch, 1976



aproximación; en esta subsección sólo se abordan los aspectos más básicos del problema; para más detalles ver Milnor (1963) ó bien Hirsch (1978, Chap.5). La extensión al caso singular se aborda en [Gor88] ³. Una aplicación reciente a Visualización Avanzada basada en campos escalares se presentan en [Han04] ⁴

Supongamos que $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ es la función altura, es decir, la proyección sobre la última coordenada $f(x_1, \dots, x_m) = x_m$. Entonces los puntos críticos de h son los puntos en los que la proyección es tangente al grafo de la función h .

Para cada uno de estos extremos relativos $\underline{p}_k$ se tiene que $Hess(f)(\underline{p}_k)$ es una forma cuadrática no-degenerada. El índice de la forma cuadrática es un invariante algebraico que determina el tipo topológico del punto y, por consiguiente, la dimensión de la “célula” a añadir (ver Milnor, 1963, ó Hirsch, 1978, para detalles y aplicaciones) tal y como se muestra en la Fig.7

Ejercicio.- Supongamos que M es una C^r -variedad no singular contenida en $\mathbb{R}^N$ para $N \gg 0$ y π_p una proyección tal que $\pi_P(M)$ es una variedad no-singular. Demuestra que los puntos críticos de una proyección f son los puntos en los que la proyección es tangente al grafo de la función f .

⁵ De hecho se expresa algebraicamente como el discriminante de una ecuación en el sentido algebraico para el caso polinomial

Comentarios.- 1) Si M es una subvariedad compacta de $\mathbb{R}^N$, el Teorema de Severi-Whitney muestra que genéricamente $N > 2m + 1$ donde $m = \dim(M)$. Este resultado se demuestra construyendo la variedad de rectas secantes

$$Sec(1, M) = \{q \in \mathbb{R}^N \mid q \in \overline{p_1 p_2} \text{ con } p_1, p_2 \in M, p_1 \neq p_2\}$$

que tiene dimensión esperada $2m + 1$. Si el centro de proyección pertenece a $Sec(1, M)$ entonces da lugar a nodos al proyectar. Es fácil verificar que la dimensión esperada de $Sec(1, M)$ es $2m + 1$. En Geometría Algebraica, las rectas que pasan por dos puntos distintos $p_1, p_2 \in M$ reciben el nombre de “cuerdas”, y la variedad de rectas secantes $Sec(1, M)$ se etiquetaba clásicamente como “variedad cordal”.

2) Si el centro de proyección pertenece a una recta secante, la imagen por la proyección de dicha recta da lugar a un nodo en el espacio sobre el que se proyecta. Así p.e. para una curva irreducible alabeada $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^3$, como $Sec(1, \mathcal{C})$ y es una variedad irreducible, entonces “llena” todo el espacio $\mathbb{P}^3$. Por tanto, cualquier proyección da lugar a nodos, aunque no necesariamente a cúspides (pues la variedad de tangentes tiene dimensión 2 en $\mathbb{P}^3$). El número de nodos y cúspides de una proyección son “caracteres proyectivos” y son extrínsecos, es decir, depende de la elección del centro de proyección. Las relaciones entre estos números con caracteres intrínsecos (invariantes algebraicos) forma parte de las fórmulas de Plücker que se estudian en Geometría Algebraica.

1.4.2. Funciones de Morse

Definición.- Dada una variedad compacta M , se dice que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función de Morse* si sus puntos críticos son todos ellos no-degenerados.

En Topología Diferencial se demuestra que si M es una variedad compacta, entonces las funciones de Morse son densas en $C^\infty(M, \mathbb{R})$ para la topología débil (ver p.e. Hirsch, 1978), es decir, cualquier aplicación se puede “aproximar” por una función de Morse. Ello justifica el interés del estudio de las funciones de Morse. Ejemplos típicos de funciones de Morse son la altura, la profundidad en una escena, la función de energía total de un sistema, etc

Supongamos que $x_0 \in M$ es un punto regular para una función de Mores $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (función cuyos únicos puntos críticos son aislados y no degenerados) y $f(x_0) = 5$, entonces existe un pequeño entorno $[r - \varepsilon, r + \varepsilon]$ que es C^r -equivalente a $f^{-1}(r)$. Como consecuencia, $f^{-1}([r - \varepsilon, r + \varepsilon])$ tiene estructura topológica local tipo producto.

La estructura topológica como producto local permite “desacoplar” componentes y modelar efectos a lo largo de subespacios de forma similar a los paralelos y meridianos sobre una superficie parametrizada.

Las funciones de Morse más utilizadas son de tipo escalar y se formulan en términos de la altura (para Geografía, p.e.), la profundidad (para segmentación volumétrica, p.e.), la intensidad en la escala de grises (para segmentación de imagen o de video, p.e.), la energía (para identificar niveles críticos en la organización de la información, p.e.), etc. Una ilustración asociada a mapas de

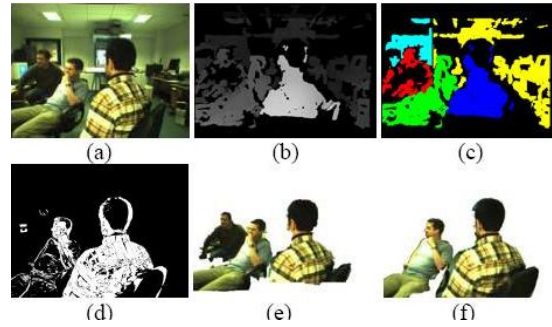


Fig. 8: Segmentación volumétrica asociada a un mapa de profundidad

profundidad se puede ver en la Fig.8; en este caso la selección de umbrales asociado al histograma de la función profundidad proporciona de forma automática una primera descomposición en unión disjunta de regiones 3D a la que se llama “segmentación volumétrica”.

1.4.3. Apéndice: Una aproximación histórica

La agregación de células k -dimensionales asociadas al “paso” por cada punto crítico se traduce en una modificación de la topología de las secciones planas correspondientes a la función escalar $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Esta topología se puede describir de forma alternativa en términos homotópicos (clases de lazos cerrados) o bien homológicos (variación en la homología celular). Esta construcción se extiende a variedades no-necesariamente compactas, dando lugar a una extensión de los complejos celulares dada por los CW-complejos (C: Closure-finite y W: Weak-topology).

La aplicación de este enfoque a los espacios localmente simétricos compactos permite obtener los Teoremas de Periodicidad para los grupos de homología y homotopía de dichos espacios (tesis de R.Bott). La formalización de este enfoque condujo en los 60 y 70 de forma natural a la K-Teoría (Atiyah, Grothendieck) en la que los objetos son clases de equivalencia de fibrados vectoriales ó, con más generalidad, de fibrados principales.

De forma independiente, la aplicación de la Teoría de Morse a variedades de dimensión elevada permitió demostrar la conjetura de Poincaré para variedades de dimensión ≥ 4 . El caso 3D fue demostrado por Perelman (2003).

En lugar de tomar un funcional escalar y analizar sus puntos críticos, para resolver problemas de tipo variacional, tiene interés considerar funcionales asociados a la minimización de una “cantidad geométrica” como la longitud (geodésicas), el área (superficies minimales) o la energía (integrales primeras del movimiento). La Teoría de Morse se extiende de forma natural proporcionando información sobre la topología de las soluciones que son los valores críticos

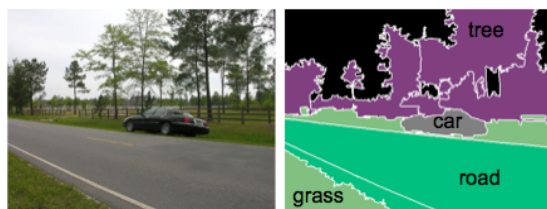


Fig. 9: Segmentación semántica de una escena

para dichos funcionales (ver Milnor, 1962).

Una extensión de este último enfoque conduce a reemplazar el funcional de energía clásico por un funcional asociado al operador de curvatura y analizar sus puntos críticos (este estudio fue iniciado por Yang y Mills en los años sesenta del siglo XX). Esta aproximación motivó un desarrollo de herramientas de Geometría Analítica y Geometría Algebraica para dar soporte a las interacciones débil y fuerte en el marco de las Teorías Gauge. Los trabajos de Witten (y, posteriormente, de Floer) utilizan las líneas de flujo gradiente para identificar soluciones vinculadas a modelos basados en supercuerdas, como uno de los paradigmas relacionados con las cuestiones de gran unificación.

Otras aplicaciones más sencillas conciernen a la segmentación en imagen, vídeo o volumétrica de una escena tridimensional. En todos los casos se trata de realizar una descomposición como unión disjunta de regiones atendiendo a los “cambios cualitativos” ó eventos (que representamos como singularidades de un “campo” escalar, vectorial o tensorial). El etiquetado semi-automático de las regiones resultantes presenta muchos problemas abiertos, pues requiere el modelado de sistemas expertos basado en características geométricas o topológicas de objetos variables en una escena.

En la Fig.9 se puede ver la “segmentación semántica” de una escena (realizada por investigadores de la Ecole Centrale, Paris), es decir, atendiendo al contenido. Esta segmentación se basa en el reconocimiento de características asociadas a regiones y etiquetado para múltiples propósitos (asistencia a la navegación, vigilancia, seguimiento, etc). La extensión de este tipo de modelos y herramientas para proporcionar respuesta en tiempo real asociada a secuencias de vídeo es un reto de gran interés por sus múltiples aplicaciones, incluyendo la navegación automática de vehículos p.e.⁶.

2. Aplicaciones diferenciables (Fréchet)

En esta sección se muestran algunos elementos básicos de Análisis Funcional que son relevantes para el desarrollo de la Geometría Diferencial de Variedades. Para ello, es preciso desarrollar una versión intrínseca del cálculo basado en

⁶ ver la materia B_3 (Visión Computacional) para más detalles

derivadas parciales que sea independiente del sistema coordenado elegido. Esta condición motiva una transición del enfoque cartesiano a un enfoque direccional. Se presta una especial atención al enfoque de Fréchet.

Asimismo y aunque no se desarrolle en estos apuntes, el enfoque basado en Fréchet proporciona un soporte para la extensión de los métodos de Cálculo Diferencial al caso discreto, incluyendo la posibilidad de diseño e implementación de filtros para el tratamiento de información discreta o discontinua ⁷

2.1. Diferenciabilidad en un abierto

Definición.- Dada una aplicación $f : U \rightarrow V$ entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^p$, respectivamente, decimos que f es *diferenciable en $\underline{x}_0 \in U$* (ó *diferenciable en el sentido de Fréchet*) si existe una aplicación lineal continua, a la que denotaremos mediante $d_{\underline{x}_0}f$ ó mediante $\mathbf{D}f(\underline{x}_0)$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$ tal que

$$f(\underline{x}_0 + h) - f(\underline{x}_0) = d_{\underline{x}_0}f \cdot h + R(h) ,$$

donde $h \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_0 + h \in U$, $f(\underline{x}_0 + h), f(\underline{x}_0), R(h) \in \mathbb{R}^p$ y

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = 0 .$$

Definición.- Diremos que f es *diferenciable en un abierto U* si es continuamente diferenciable en cada punto $x \in U$.

En este caso, la asignación que a cada punto le asocia la diferencial en dicho punto define una aplicación $U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, donde $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ denota el conjunto de aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$.

2.1.1. Diferenciabilidad global

La definición de diferenciabilidad mostrada en el apartado anterior se extiende de forma obvia a aplicaciones entre variedades, interpretando las funciones $f^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$ con $i = 1, \dots, p$, como la expresión local de las componentes de f en un abierto apropiado. Más explícitamente, dicha f^i es la i -ésima componente de $(\psi_V \circ f \circ \phi_U^{-1})|_{\phi_U(U)}$ siendo (U, ϕ_U) y (V, ψ_V) cartas coordenadas locales correspondientes a $x \in X$ e $y \in Y$, respectivamente.

Para definir de forma intrínseca la diferencial en un punto es necesario realizar la construcción con independencia de las cartas (φ, U) , (ψ, V) utilizadas en las C^r -variedades de partida N y llegada P para $F \in C^r(N, P)$. La independencia con respecto al sistema de cartas elegido para la C^r -variedad de partida N requiere definir los objetos sobre las imágenes de cada intersección común $U_i \cap U_j$ mediante

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

⁷ ver http://sepwww.stanford.edu/public/docs/sep118/paper_html/node47.html para algunas aplicaciones relacionadas con fenómenos de propagación

que es una C^r -equivalencia entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. Análogamente, la independencia con respecto al sistema de cartas elegido para la C^r -variedad de llegada P requiere definir los objetos sobre las imágenes de cada intersección común $V_k \cap V_\ell$ mediante

$$\psi_\ell \circ \psi_k^{-1} \mid_{\psi_k(V_k \cap V_\ell)}: \psi_k(V_k \cap V_\ell) \rightarrow \psi_\ell(V_k \cap V_\ell)$$

que es una C^r -equivalencia entre abiertos de $\mathbb{R}^p$. De este modo, vemos que los datos obtenidos para la diferencial son compatibles, por lo que esta construcción proporciona un primer paso para pasar de la situación local a la global. La independencia con respecto al sistema de cartas elegido es consecuencia de la noción de germen de una aplicación que se presenta en el apartado siguiente.

2.1.2. Germen de una aplicación de clase r

Supongamos que $F_i, F_j \in C^r(N, P)$ están definidas en $\underline{p} \in N$ con respecto a cartas locales (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) .

Definición.- Diremos que F_i es equivalente a F_j en $\underline{p} \in U_i \cap U_j$ si y sólo si existe un abierto $W \subseteq U_i \cap U_j$ tal que $F_i|_W = F_j|_W$.

Obviamente, por refinamientos sucesivos (tomando un atlas maximal sobre N), podemos tomar el abierto W tan pequeño como queramos. A la clase de equivalencia por esta relación se le llama germen de la aplicación en el punto $\underline{p} \in N$.

Se tiene la noción análoga para la C^r -variedad de llegada P . Por ello, tiene sentido hablar de la noción de germen de aplicación en el punto $(\underline{p}, f(\underline{p})) \in \Gamma_f$. La noción de germen $\underline{F}$ de una aplicación F en un punto y su imagen es *independiente del sistema de cartas elegido*.

En el caso de C^r -variedades se trabaja con un representante de la C^r -estructura en lugar de trabajar con el atlas maximal que la define. De la misma forma, trabajaremos con un representante F en lugar de trabajar con gérmenes propiamente dichos.

2.2. Diferencial de una aplicación

Si el dominio de la aplicación no es un abierto de $\mathbb{R}^n$, es necesario adaptar la noción de diferencial de f , usando cartas coordenadas centradas en un punto $\mathbf{p} \in U \subset N$ de una variedad N . A pesar del peligro de confusión en la notación, representaremos a menudo al punto en términos del sistema coordenado asociado a la carta que estamos considerando para representarlo.

Es importante subrayar que los fallos en la diferenciabilidad proporcionan información significativa para identificar las irregularidades que pueden presentar la distribución de la materia. Estos “fallos” se detectan en términos de singularidades asociadas a un proceso de propagación a lo largo de determinadas direcciones y tienen múltiples aplicaciones en relación con Geofísica; la fig.10 ilustra alguna de estas aplicaciones. Es plausible asimismo su utilización en modelos económicos más realistas (los agentes que operan en cualquier mercado no

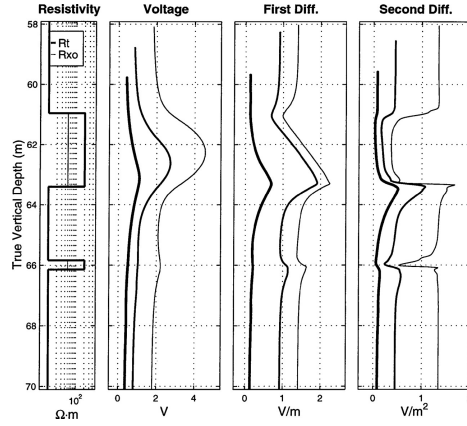


Fig. 10: Derivada rápida de Fréchet en Geofísica (Geosciences World)

son homogéneos, ni toman decisiones en la misma dirección), pero aún no ha sido desarrollada.

En esta subsección sólo se recuerdan algunos resultados básicos de utilidad para componer datos (como la versión intrínseca de la regla de la cadena) y algunas de las consecuencias teóricas. La *regla de la cadena* para la derivada de una composición de aplicaciones permite definir localmente la *diferencial* ó *aplicación tangente en un punto* $\mathbf{p}$ como sigue:

2.2.1. Versión analítica local

Definición.- Sea $f : N \rightarrow P$ (un germen de) una aplicación de clase C^r , con $r \geq 1$. Tomamos una carta (ϕ, U) centrada en $\mathbf{p} \in N$ con funciones coordenadas $\underline{x}$ centradas en $\mathbf{p}$ (para simplificar la notación, estamos identificando las funciones coordenadas (x^1, x^n) en el abierto $\phi(U)$ de $\mathbb{R}^n$ con la parametrización dada por $(\phi^{-1}(x^1), \dots, \phi^{-1}(x^n))$, donde $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ es una C^r -equivalencia.

Denotamos mediante (ψ, V) a una carta centrada en $\mathbf{P} \in P$ con funciones coordenadas $\underline{y} := f(\underline{x})$ centradas en $\mathbf{P} \in P$. Adoptamos el mismo abuso de notación que el mostrado más arriba para simplificar la notación, es decir, identificamos el punto $\mathbf{p}$ (resp. $\mathbf{P}$) con el sistema coordenado $\underline{x}$ (resp. $\underline{y}$) asociado a la carta (ϕ, U) (resp. (ψ, V)) centrada en $\mathbf{p}$ (resp. $\mathbf{P}$). Con esta notación, para un entorno U de $\underline{x} \in N$ se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 U & \longrightarrow & V \\
 \phi \downarrow & & \psi \downarrow \\
 \mathbb{R}^n \supseteq \phi(U) & \longrightarrow & \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^p \\
 & h := \psi \circ f \circ \phi^{-1} &
 \end{array}$$

Llamamos *diferencial* ó *aplicación tangente* a f en $p \in U \subset M$ y la denota-

mos por $d_p f : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$, a la aplicación lineal dada por la composición

$$d_p f := d\psi \circ dh \circ d\phi^{-1} .$$

Adaptar (como ejercicio) las definiciones precedentes al caso de espacios de Banach (ver *Ejercicio 1.2.6.4*).

2.2.2. La noción de Derivada Parcial

En términos locales, fijados dos sistemas coordenados en los espacios de "origen" y de "llegada", la diferencial de f está representada localmente por la *matriz jacobiana*:

$$Jac(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^p}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^p}{\partial x^n} \end{pmatrix} ,$$

donde $(f^1, \dots, f^p)$ representa las componentes de la aplicación f y $(x^1, \dots, x^n)$ representan coordenadas locales para un entorno de $\underline{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$. Esta descripción de la diferencial *no es intrínseca*. Nótese además que la existencia de derivadas parciales no implica que la aplicación sea diferenciable (dichas derivadas parciales deben ser además continuas).

Dado un abierto $U \simeq \mathbb{R}^n$, la derivada parcial de una función diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ se define de la forma natural de la forma siguiente:

Definición .- Dada $f : U \simeq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definimos la *derivada parcial i -ésima de una función f* en un punto $\underline{y} \in U \simeq \mathbb{R}^n$ como

$$D_i f(\underline{y}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y^1, \dots, y^i + h, \dots, y^n) - f(y^1, \dots, y^i, \dots, y^n)}{h} .$$

2.2.3. Regla de la Cadena

$$D_j(f \circ g)(\underline{p}) = \sum_{i=1}^n D_i(f(g(\underline{p}))) \cdot D_j g^i(\underline{p}) ,$$

donde $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ y $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, para un sistema coordenado (U, ϕ_U) en un entorno de $\underline{p} \in U \subset N$; más explícitamente, si $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 , tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(\underline{p}) = D_i(f \circ \phi_U^{-1})(\phi_U(\underline{p})) .$$

En particular, si tomamos como función f una de las funciones coordenadas obtenemos la expresión bien conocida en términos de la δ de Kronecker:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Si (ϕ_U, U) y (ϕ_V, V) son dos sistemas coordenados con $\underline{p} \in U \cap V \subset N$, y $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces (usando la notación del §1.2.2) podemos escribir la regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^i},$$

en forma simbólica como un operador sobre el espacio de funciones diferenciables dado por

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

2.2.4. Notación: Convenio de Einstein

Para simplificar la notación relativa al cálculo diferencial en variedades, frecuentemente usaremos el *convenio de notación de Einstein*, según el cual suprimiremos el símbolo sumatorio, sumando según el índice que aparezca repetido; esta será la norma en Cálculo Tensorial para encontrar "cantidades escalares" ó expresiones (operadores ó sistemas de ecuaciones) invariantes, es decir, que al realizar cambios de carta su expresión en el nuevo sistema de coordenadas es la misma.

Asimismo, por convenio se denotan mediante $(x^1, \dots, x^m)$ las coordenadas locales de un punto $\underline{p}$ de una variedad m -dimensional M y mediante f_i a las componentes de las aplicaciones vectoriales definidas sobre (abiertos coordenados de) M . La extensión obvia de este convenio lleva a denotar mediante ξ^i a los campos vectoriales definidos sobre M (carácter contravariante) y mediante ω_j a las 1-formas diferenciales definidas sobre M (carácter covariante)

2.3. Aplicaciones regulares. Interpretación

La linealización de una aplicación $f \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ se realiza en términos de la aplicación tangente $T_{\underline{p}}f : T_{\underline{p}}\mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(\underline{p})}\mathbb{R}^p$ asociada a la diferencial como aplicación lineal. Una vez elegidas bases en los espacios de partida y llegada, la diferencial está representada por la $(p \times n)$ -matriz jacobiana

$$Jac(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$$

Diremos que $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$ es un punto regular para f si la matriz jacobiana tiene rango máximo, es decir, $\text{rang}(Jac(f)(\underline{p})) = \min(n, p)$. En caso contrario, diremos que

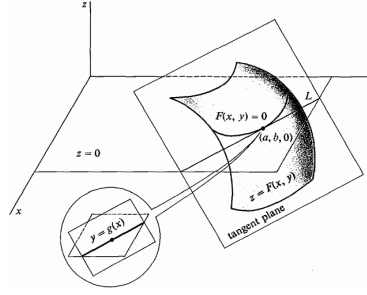


Fig. 11: Ilustrando el Teorema de la Función Implícita (vias.org)

p es un punto crítico (como la dimensión p del espacio de llegada es en general > 1 no tiene mucho sentido hablar de "valor" crítico).

La condición de regularidad es clave para generar subvariedades a partir del comportamiento de funciones. Para motivarlo, recordamos un resultado central en el Análisis Diferencial de Varias Variables Reales:

2.3.1. Teorema de la Función Implícita

Denotemos mediante $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ con $n = m + p$ una función de clase C^r para $r \geq 1$ y $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ tal que $f(a, b) = 0$. Supongamos que la submatriz que define $[D_y f(a, b)]$ de la matriz jacobiana $DF(a, b) = [D_x f(a, b), D_y f(a, b)]$ es invertible. Entonces

- existen abiertos $V \subseteq \mathbb{R}^{m+p}$ y $W \subseteq \mathbb{R}^m$ con $(a, b) \in V$ y $a \in W$ tales que para cada $x \in W$ existe un único $y \in \mathbb{R}^p$ tal que $(x, y) \in V$ y $f(x, y) = 0$,
- La expresión anterior define una función $g : W \rightarrow \mathbb{R}^p$ que es continua y diferenciable tal que $f(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in W$
- $Dg(x) = -\frac{D_x f(x, g(x))}{D_y f(x, g(x))}$ $x \in W$ con $g(a) = b$

Interpretación geométrica Para la función $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ al teorema de la Función Implícita permite construir una función $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ cuyo grafo $\Gamma_g = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}^m\}$ es el conjunto de los (x, y) tales que $f(x, y) = 0$. De una manera simbólica

$$\{(\underline{x}, g(\underline{x})) \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^m\} = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \mid f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{c}\}$$

La reparametrización que proporciona el Teorema de la Función Implícita permite reescribir las últimas p columnas de la matriz jacobiana como la matriz identidad I_p de tamaño $p \times p$ (ver Fig.11 para una representación intuitiva).

2.3.2. Teorema de las Funciones Implícitas. Versión local

Si $f \in C^r(N, P)$ tiene rango k en $p \in N$, entonces existen un sistema coordinado (U, ϕ_U) en $p \in U \subset N$ y un sistema coordinado (V, ψ_V) en $f(p) \in V \subset P$ tales que

$$\psi_V \circ f \circ \phi_U^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k, \alpha^{k+1}(\underline{x}), \dots, \alpha^p(\underline{x})) .$$

La diferencial de la aplicación $\psi_V \circ f \circ \phi_U$ evaluada en $\varphi(p)$ proporciona las formas canónicas como aplicaciones lineales entre subespacios. Algunas herramientas algebraicas elementales facilitan una expresión más compacta de estas formas canónicas:

2.3.3. Teorema de la Función Inversa

Teorema.- Sea $f : N \rightarrow P$ es una aplicación lisa. Entonces, la diferencial $d_p f$ es un isomorfismo si y sólo si f es un difeomorfismo *local*.

Interpretación topológica El resultado precedente es estrictamente *local* y no es globalizable, es decir, aunque $d_p f$ sea un isomorfismo $\forall \mathbf{p} \in M$, ello no implica que f sea un difeomorfismo. Basta pensar en la parametrización polar dada por la aplicación $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por la asignación $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ (otro ejemplo más sofisticado está propuesto en el *ejercicio 1.2.6.3*). ¿Es un difeomorfismo la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x^n$ para $n \geq 2$?

2.3.4. Variedades parametrizadas

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua, entonces el *grafo de f*:

$$\Gamma_f := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mid x^{m+1} = f(x^1, \dots, x^m) \}$$

es una variedad n -dimensional con un atlas que consiste en una sola carta $(U, \varphi) = (\Gamma_f, \varphi)$, donde el homeomorfismo $\varphi(x^1, \dots, x^{m+1}) = (x^1, \dots, x^m)$ está dado por la proyección sobre las m primeras componentes y la aplicación inversa está dada por la asignación $(x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, f(x^1, \dots, x^m))$.

La iteración de esta construcción muestra que las hipersuperficies parametrizadas localmente descritas en la Geometría Diferencial de Curvas planas y Superficies en $\mathbb{R}^3$ son asimismo variedades diferenciables. Este argumento se extiende de forma natural al caso general, usando que el grafo de una aplicación es una subvariedad de la variedad producto (ver §1,3 para notación y detalles).

Recíprocamente, ¿es posible describir una variedad globalmente mediante el grafo de una aplicación?. Razona la respuesta que es -obviamente- negativa. Salvo casos triviales correspondientes a espacios cartesianos, la parametrización es sólo local. En los ejercicios se presentan algunos ejemplos relacionados con la parametrización dada por coordenadas esféricas ó las cilíndricas que son de gran utilidad para aplicaciones vinculadas a cartografía y Topografía (motivación clásica para la Geometría Diferencial de Variedades), la visualización de

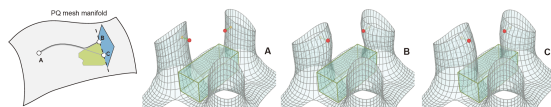


Fig. 12: Deformación de mallas en presencia de obstáculos (ucl, ac. uk)

movimientos (crucial en mecanismos artificiales, incluyendo aspectos geométricos de la Robótica) ó bien representaciones panorámicas (útiles para cuestiones de Reconstrucción 3D en Visión por Computador).

Si razonamos localmente, la respuesta a esta cuestión es afirmativa en virtud de la adaptación del Teorema de las Funciones Implícitas (para la demostración, ver p.e., [S], p.2.20 y ss.) al comportamiento local de C^r -aplicaciones entre C^r -variedades. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una aplicación es una aplicación de clase C^r (para $r \geq 2$) y si la matriz jacobiana correspondiente a las m primeras líneas (filas ó columnas) tiene determinante $\neq 0$, entonces es posible reparametrizar la imagen en términos de las coordenadas asociadas a las m primeras líneas, tomando las m primeras componentes como si fueran las "coordenadas curvilíneas" que parametrizan la variedad inicial ó la imagen.

La parametrización de variedades se puede entender de una forma estática (como extensión natural del enfoque presentado en la Teoría Local de Superficies) o bien de una forma dinámica. El desarrollo de modelos basados en operadores diferenciales proporciona una aproximación al segundo enfoque. La visualización parte de un modelo paramétrico (generado a partir del suavizado de una malla). Este modelo se deforma mediante aplicaciones lineales o suaves a trozos (PL vs PS) que deforman la malla inicial de acuerdo con principios básicos que afectan sólo a cada nodo y los más próximos.

Las deformaciones pueden verse sometidas a fuerzas tangenciales (sobre el espacio tangente a la variedad) o bien a fuerzas normales (internas o externas). Asimismo, las deformaciones pueden presentar patologías debidas a la presencia de obstáculos tal y como se muestra en la fig.12

Ejercicio.- Demuestra que los resultados anteriores son compatibles con los cambios de carta (*Indicación:* Utiliza el jacobiano de la transformación de coordenadas y expresa el resultado en términos de la clase de conjugación de la matriz jacobiana por la acción izquierda-derecha)

2.4. La noción de corango

Llamamos *rango* de una aplicación en $p \in N$ al rango de la matriz que representa la diferencial $d_p f$. La condición de tener *rango máximo* en $\mathbf{p} \in N$ para una C^r -aplicación $f : N \rightarrow P$, significa que $\text{rang}(d_p f) = \min(\dim(N), \dim(P)) = \min(n, p)$. Basta verificar esta condición sobre un abierto de una carta (U, ϕ) .

Ejercicio.- Comprobar que la noción de rango está bien definida, es decir, no

depende de la carta elegida (*indicación*: usar el Teorema de la Función Implícita).

En coordenadas locales, si $(x^1, \dots, x^n)$ representa un sistema de coordenadas locales para un punto $\mathbf{p}$, entonces la condición $\text{rang}(d_{\underline{x}}f) \geq k$ (matriz jacobiana con al menos un $k \times k$ -menor no nulo), se traduce en que la $Jac(f)(\underline{x})$ es C^r -equivalente a una matriz cuyas k primeras filas se pueden escribir de la forma $(I_k \mid B)$ (ó su traspuesta). En este caso, la topología interesante se presenta en el complementario de $\text{Reg}(f)$; si linealizamos la aplicación, el objeto a analizar es la restricción de la aplicación diferencial al subespacio $W \subset T_{\underline{x}}\mathbb{R}^n$ en el que la aplicación no es regular que es c -dimensional donde $c = \text{corang}(d_{\underline{x}}f)$

2.4.1. El caso $n = p$

Para fijar ideas, supongamos que $p = n$ y analicemos el caso $c_{\underline{x}}(f) = 1$ de corango 1 en $\underline{x}$;

- Si $\underline{x} \in \text{Reg}(f)$, la matriz jacobiana (en este caso cuadrada) es inversible y por el Teorema de la Función Implícita, se obtiene que la matriz jacobiana es C^r -equivalente a una matriz diagonal (que tras reescalar las variables) con ± 1 en la diagonal principal; en el caso complejo podemos suponer que es C^r -equivalente a la matriz identidad I_n
- Si $\underline{x} \in \text{Sing}(f)$, se tiene una "estratificación" por el corango de la matriz jacobiana $c_{\underline{x}} = \text{corang}(Jac(f))(\underline{x})$
 1. Si $c_{\underline{x}} = 1$ existe un $(n-1) \times (n-1)$ -menor con determinante no-nulo. Aplicando el Teorema de la Función Implícita al abierto caracterizado por la condición $c_{\underline{x}} = 1$, existe una transformación coordenada local que muestra la equivalencia entre la f original y su transformación $(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}))$ para un pequeño entorno de $\underline{x}$. Por ello, el análisis de las singularidades de f se reduce al análisis de la hipersuperficie $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$
 2. Si $c_{\underline{x}} = 2$ existe un $(n-2) \times (n-2)$ -menor con determinante no-nulo. Aplicando el Teorema de la Función Implícita al abierto caracterizado por la condición $c_{\underline{x}} = 2$, existe una transformación coordenada local que muestra la equivalencia entre la f original y su nueva expresión local $(x_1, \dots, x_{n-2}, g_1(x_1, \dots, x_{n-2}), g_2(x_1, \dots, x_{n-2}))$ para un pequeño entorno de $\underline{x}$. El análisis de las subvariedades de codimensión 2 presenta una mayor dificultad que el de las hipersuperficies y se aborda en Geometría Algebraica.
- Si denotamos mediante $\Sigma^k(f) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{corang}(f) \leq k\}$ se tiene una *estratificación por el corango k de $d_{\underline{x}}f$* que se denota mediante

$$\Sigma^0(f) \supset \Sigma^1(f) \supset \dots \Sigma^k(f) \supset \Sigma^{k+1}(f) \supset \dots \Sigma^n(f)$$

donde $\Sigma^0(f) \setminus \Sigma^1(f)$ es el conjunto abierto de puntos regulares $Reg(f)$ y $\Sigma^0(f)$ es el conjunto cerrado de los puntos de corango 1 correspondiente a los puntos singulares $Sing(f)$ de f .

Con esta terminología, la hipótesis del Teorema de la Función Inversa se enuncia también diciendo que f tiene rango máximo en x . Si $N = \mathbb{R}^n$ y $P = \mathbb{R}^p$, comprobad que los puntos $x \in \mathbb{R}^n$, tales que $rang(d_x f) \geq k$ forman un abierto en $\mathbb{R}^n$ (usar el *criterio jacobiano*, basado en la continuidad de la función determinante). En particular, si $n = 1$ la condición de tener rango máximo define un abierto sobre el dominio de definición de f (de hecho, este resultado también admite una versión más general en el espacio de funciones, pero su formulación requiere describir alguna topología apropiada para este espacio).

Ejercicio.- Extender la estratificación por el corango a aplicaciones $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ y $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$.

Nótese que el caso $f \in C^r(n, n+1)$ generaliza la inclusión de un subespacio lineal en otro y, por consiguiente, el estudio de una variedad a partir de las secciones hiperplanas; análogamente, el caso $f \in C^r(n+1, n)$ generaliza la proyección de un espacio lineal sobre otro y, por consiguiente, el estudio de una variedad a partir de sus proyecciones sobre subespacios lineales. Los métodos de cortar y proyectar son las herramientas fundamentales de la Geometría Proyectiva Clásica; por ello, la clasificación de este tipo de aplicaciones $f \in C^r(n, p)$ es la extensión natural al marco diferencial de las construcciones bien conocidas de la Geometría Proyectiva. Más adelante volvemos sobre esta cuestión en relación con inmersiones y submersiones, como herramientas para generar subvariedades

2.4.2. Clasificación local algebraica por el rango

El rango puede tomar cualquier valor natural comprendido entre 0 y $m = \min(n, p)$. La estratificación conjuntista relativa a una aplicación está asociada a los diferentes valores de r

- Los puntos de rango 0 están caracterizados por la anulación de todas las entradas de la matriz jacobiana; si $p = 1$ se trata del conjunto de puntos críticos de una función. Denotamos mediante

$$\Sigma_0(f) := \{ \underline{p} \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{p}) = 0 \ \forall 1 \leq i \leq p, \forall 1 \leq j \leq n \}$$

- Los puntos de rango ≤ 1 están caracterizados por la anulación de los determinantes de todos los menores de tamaño 2×2 de la matriz jacobiana. Si denotamos mediante Σ_1 al conjunto cerrado de dichos puntos, se tiene una inclusión natural $\Sigma_0(f) \subset \Sigma_1(f)$ (desarrollar el determinante de cada (2×2) -menor de la matriz jacobiana). El complementario $\Sigma_1(f) \setminus \Sigma_0(f)$ es un conjunto (relativamente) abierto no necesariamente conexo que recibe el nombre de 1-*estrato* no necesariamente conexo.

- Los puntos de rango $\leq k$ están caracterizados por la anulación de los determinantes de todos los menores de tamaño $(k+1) \times (k+1)$ de la matriz jacobiana para $0 \leq k \leq m-1$. Si denotamos mediante Σ_k al conjunto cerrado de dichos puntos, se tiene una inclusión natural $\Sigma_{k-1}(f) \subset \Sigma_k(f)$ (desarrollar el determinante de cada $(k+1) \times (k+1)$ -menor de la matriz jacobiana por los elementos de una línea). El complementario $\Sigma_k(f) \setminus \Sigma_{k-1}(f)$ es un conjunto (relativamente) abierto no necesariamente conexo que recibe el nombre de *k-estrato* no necesariamente conexo.

Como conclusión se tiene una colección de inclusiones

$$\Sigma_0(f) \subset \Sigma_1(f) \subset \dots \subset \Sigma_{k-1}(f) \subset \Sigma_k(f) \dots \Sigma_{m-1}(f) \subset \Sigma_m(f)$$

donde $\Sigma_{m-1}(f) = \text{Sing}(f)$ y $\Sigma_m(f) \setminus \Sigma_{m-1}(f) = \text{Reg}(f)$

La estratificación conjuntista es una descomposición en unión disjunta de conjuntos (relativamente) abiertos $\Sigma_k(f) \setminus \Sigma_{k-1}(f)$ para $k = 1, \dots, m$.

Ejercicio.- Verifica que $\Sigma_k(f) \setminus \Sigma_{k-1}(f)$ es una C^r -variedad para $k = 1, \dots, m$.

A menudo, esta descomposición conjuntista no presenta "buenas" propiedades desde el punto de vista de continuidad para los límites de espacios tangentes asociadas a pares de estratos sucesivos. Ello motiva refinamientos que se comentan más abajo. La versión intrínseca de esta noción fue desarrollada por R.Thom y J-Boardmann a mediados de los años sesenta y se expone con más detalle en Topología Diferencial.

2.4.3. Algunos ejemplos sencillos

Ejercicio.- Muestra una estratificación por el corango asociadas a las singularidad de $f \in C^r(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ correspondientes a los tipos siguientes: a) *punto doble*: $f(x, y, z) = (x, y, xy)$; b) *punto triple*: $f(x, y, z) = (x, y, xyz)$; c) *punto pinzado*: $f(x, y, z) = (x, y, x^2 - y^2 z)$.

Nota.- El análisis de los tipos de singularidades de corango 2 que pueden aparecer para el caso complejo está estrechamente vinculado al análisis de las singularidades de superficies complejas y fue llevado a cabo por D.Mond a principios de los años ochenta. Aparentemente, no existe un estudio similar para el caso de corango 3.

La herramienta fundamental para identificar los diferentes tipos que pueden aparecer es la identificación de las órbitas por la acción de un grupo sobre los espacios de partida y llegada ó bien sobre el grafo de $f \in C^r(N, P)$ que se aborda en la subsección siguiente.

2.4.4. Lugar discriminante de una aplicación real

El conjunto de puntos p en los que la diferencial df de una aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tiene rango no-máximo $k < \min(n, p)$ recibe el nombre de *lugar discriminante* de f . Está caracterizado por la anulación de los determinantes de

todos los menores de tamaño $k + 1$ de la matriz jacobiana de f sobre el lugar definido por f ⁸.

La condición $\text{rang}(d_p f) = k$ no depende del abierto elegido $U \simeq \mathbb{R}^n$. Por ello, como veremos más adelante, la noción de lugar discriminante se extiende de forma natural a aplicaciones $f : N \rightarrow P$ entre variedades de clase C^r para $r \geq 2$. En particular, si la aplicación f es una función (es decir, $p = 1$), entonces el lugar discriminante recibe el nombre de *lugar crítico* y el conjunto de valores críticos es la imagen via f del lugar discriminante.

El estudio de la Geometría del Lugar Discriminante juega un papel central en GAGA (Geometría Algebraica y Geometría Analítica) y en Topología Algebraica de Variedades; en este último caso, el lugar discriminante es la imagen del lugar de ramificación de una proyección (o de una aplicación más general entre variedades). Algunas aplicaciones de estas ideas en relación con la asistencia a la producción de contenidos multimedia se presentan en la subsección de retos al final de este capítulo

Para fijar ideas, supongamos que se desea extraer información asociada a la captura de datos de un actor real mediante dos o más cámaras sincronizadas de vídeo⁹. La identificación de puntos homólogos en las diferentes vistas (extraídas a partir de cada secuencia de vídeo) da lugar a puntos 3D que proporcionan elementos de control para el pegado de datos. El enlazado de dichos puntos se modela inicialmente en términos de (productos de dos) curvas tipo snake (racionales con pesos) con geometría variable. El comportamiento de dichas curvas (ó de las superficies producto tipo B-spline) se modela siguiendo puntos de control (salient features). Para ello, es necesario diseñar e implementar una realimentación entre las versiones lineal a trozos (mallas triangulares vs cuadrangulares) y la suave a trozos (asociada a trozos de curvas y superficies dadas frecuentemente de forma implícita).

El lugar discriminante para una proyección es el contorno aparente asociado a todos los puntos en los que el cono proyectante es tangente al objeto (incluye arrugas de ropa de actores, p.e.). El borde exterior de su proyección sobre cada plano de imagen es la silueta del objeto observado que se puede capturar a partir de infrarrojos (resuelto ya de forma automática por las cámaras tipo Kinect, p.e.). El problema a resolver consiste en controlar el transvase de información entre los PL y PS-modelos y en asociar de forma automática elementos geométricos (curvas ó superficies) de grado bajo a los elementos que acotan los objetos de interés. La generación automática de los modelos asociados a estrategias de refinamientos sucesivos (coarse-to-fine) es uno de los retos que aparecen al final del capítulo.

⁸ Nótese que esta caracterización es la extensión natural de la noción de discriminante de un polinomio (como lugar de raíces múltiples) dada en Álgebra Básica.

⁹ El marco general para este “ejemplo” es el vídeo 3D que se desarrolla en el módulo B_{36} de la materia B_3 (Visión Computacional).

3. Vectores tangentes

En esta sección se presentan las versiones coordenada e intrínseca de vector tangente. El carácter intrínseco está vinculado a la independencia con respecto al sistema coordenado elegido o, si se prefiere, al abierto del espacio topológico (que es un abierto de trivialización en el caso de variedades). para ello se introduce la siguiente relación de equivalencia:

Supongamos que $p \in X$ es un punto de un espacio topológico X y denotemos mediante $C^r(X, \mathbb{K})$ al conjunto de funciones de clase C^r de X a valores en un cuerpo $\mathbb{K}$. Deseamos comparar $f, g \in C^r(X, \mathbb{K})$ de manera independiente con respecto al sistema coordenado en $p \in X$ que están definidas localmente en los abiertos U, V con $p \in U \cap V$. Para ello, se introduce la relación de equivalencia siguiente:

$$f \sim_p g \Rightarrow \exists W \subset U \cap V \mid f|_W = g|_W$$

Definición.- A la clase de equivalencia por dicha relación se le llama el *germen* de f en $p \in X$ y se le representa mediante $[f]$.

A menudo y para no complicar la notación se denota al germen $[f]$ de la misma forma que a su representante, pasando de funciones a gérmenes y recíprocamente, dependiendo del contexto. Esta noción se extiende de forma natural a las derivadas de cualquier orden para dichas funciones.

Sea (U, ϕ) una carta con coordenadas locales $x^1, \dots, x^n$, correspondientes a las componentes de la C^r -equivalencia $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea $\gamma : I \rightarrow U$ una curva de clase C^r (con $r \geq 1$) que pasa por $\underline{p}_0 = \gamma(0) \in U$. Para un pequeño entorno de $\phi(\underline{p}_0)$ se tiene un desarrollo de la forma

$$(x^i \circ \gamma)(t) = x^i(\gamma(0)) + \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x^i \circ \gamma)t + o(t^2) .$$

3.1. Curvas tangentes

Empezamos motivando las definiciones formales con una presentación geométrica de la noción de vector tangente en términos cinemáticos. A continuación se desarrolla una versión intrínseca

3.1.1. Vector velocidad de una curva

Llamamos *vector velocidad de la curva* γ en el punto $\underline{p}_0$ al vector dado por

$$v^i := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x^i \circ \gamma) =: \dot{x}_i \Big|_{t=0} , \quad 1 \leq i \leq n .$$

Definición.- Diremos que dos curvas γ_1 y γ_2 que pasan por $\underline{p}_0$ son *tangentes* en $\underline{p}_0$ si la distancia $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = o(t)$ cuando $t \rightarrow 0$.

Esta noción de tangencia equivale a que las dos curvas tengan el mismo vector velocidad en el punto $\underline{p}_0$ (comprobarlo como ejercicio) y es obviamente una relación de equivalencia.

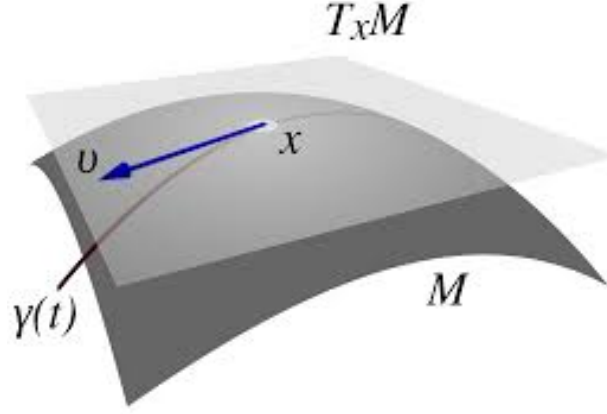


Fig. 13: Vector tangente a una curva

Por ello, *la condición de tangencia no depende de la carta elegida* (usar la regla que da la diferenciación de una función compuesta y razonar de manera similar a como se ha mostrado en el §1,2,3). Esto justifica que, en ocasiones, no representemos la carta coordenada sobre la que estamos trabajando, cuando hablamos de "vectores tangentes" (ver Fig.13)

Diremos que un *vector* $\mathbf{v}$ es *tangente* a M en p si es el vector velocidad de una curva $\gamma : I \rightarrow M$ que pasa por p . En este sentido, el vector tangente es una clase de equivalencia de órbitas cuyo representante es el germen del vector velocidad asociado a la función en un punto.

La descripción intrínseca de las condiciones de tangencia en términos de vectores tangentes a curvas contenidas en la variedad no es gratuita, pues puede no resultar práctico utilizar coordenadas locales ó bien podemos necesitar la noción de tangencia sobre espacios de dimensión infinita no numerable (para localizar extremales asociados a funcionales de tipo integral en problemas variacionales ó de optimización, por ejemplo).

No obstante, la expresión explícita del vector tangente depende del sistema coordenado elegido. Si $\underline{p}_0 \in U \cap V$, entonces la diferencial $d(\psi \circ \phi^{-1})$ del cambio de carta expresa la transformación del vector tangente en $\underline{p}_0$ en términos de la base correspondiente al nuevo sistema de coordenadas en (ψ, V) . De una manera más explícita, si denotamos mediante $x^1, \dots, x^n$ y mediante $y^1, \dots, y^n$ a coordenadas locales en $\phi(U)$ y $\psi(V)$, respectivamente, entonces dicha diferencial está representada por la matriz jacobiana del cambio de base que escribiremos abreviadamente como

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

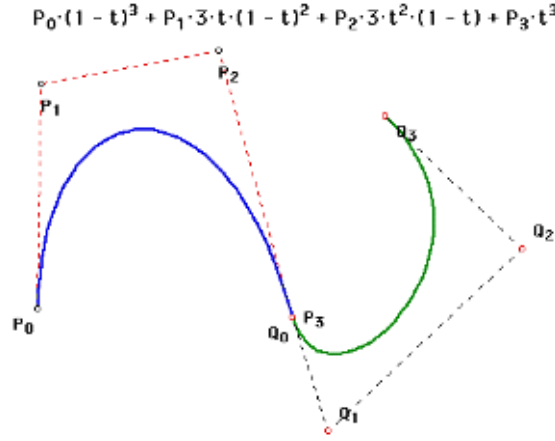


Fig. 14: Pegado de curvas con la misma tangente (Bézier)

3.1.2. Definición conjuntista-algebraica de Espacio Tangente

Dada una variedad X , llamamos *espacio tangente en* $\mathbf{p} \in X$ y lo denotamos por $T_{\mathbf{p}}X$ al conjunto de vectores que son tangentes a X en $\mathbf{p}$. Dicho conjunto de vectores se puede expresar de forma local en términos de *derivadas parciales* como

$$\xi := \sum_{i=1}^{i=n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

donde $(x^1, \dots, x^n)$ es un sistema coordenado centrado en $\mathbf{p}$, ó más geométricamente como el conjunto de vectores tangentes en $\mathbf{p}$ a las curvas $\gamma : I \rightarrow X$ que pasan por $\mathbf{p} \in X$, es decir, tales que $\gamma(0) = \mathbf{p}$. Como los operadores $\partial/\partial x^i$ son lineales sobre el espacio de (gérmenes de) funciones y además verifican la regla de Leibnitz, se tiene que la descripción conjuntista mostrada proporciona el soporte para la definición algebraica en términos de derivaciones sobre el anillo de (gérmenes de) funciones.

3.1.3. Pegado de curvas con tangentes compatibles

En aplicaciones de diseño CAD/CAM es frecuente utilizar curvas de Bézier que imponen restricciones en puntos de control para curvas de grado bajo que tengan la misma tangente. Este tópico tiene interés para modelado de objetos planares y se extiende al caso de superficies en 3D usando B-splines que pueden ser descritas en términos de “producto tensorial” de curvas de Bézier o de snakes. En la fig.14 se muestra un ejemplo particularmente simple basado en curvas de grado ≤ 3

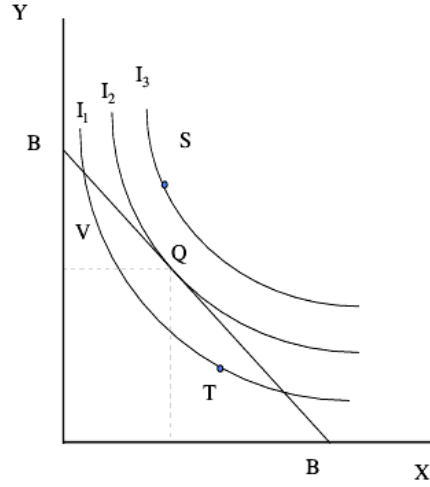


Fig. 15: Preferencia Óptima del consumidor sobre curvas de indiferencia

La generación automática de snakes es apropiada para reconocimiento de siluetas o cuestiones de animación basadas en la variación de puntos de control.

3.1.4. Reinterpretación usando operadores

La descripción conjuntista de vectores tangentes se puede reinterpretar de una manera funcional en términos de operadores. Esta versión es la que se muestra en las aplicaciones, donde la diferencia para el valor de una variable entre dos estados se representa mediante un operador vectorial que asociamos a la "tasa de variación" de la variable. Esta tasa de variación se representa matemáticamente como la *derivada direccional* correspondiente a la variable seleccionada cuyo comportamiento espacio-temporal deseamos evaluar.

Una aplicación básica de esta idea aparece en relación con la formulación en términos de *estática comparativa* de las preferencias de un consumidor asociadas a una *restricción presupuestaria* r en Microeconomía. La elección entre dos bienes en función de los precios relativos se puede representar mediante una colección de funciones (visualizables como hipérbolas). La restricción presupuestaria de cada consumidor se representa mediante una recta r .

El punto en el que esta recta es tangente a las "curvas de indiferencia" I_j determina la asignación óptima de recursos por parte del consumidor. El desplazamiento de la recta asociada a la restricción presupuestaria o la variación en los precios relativos de los bienes a consumir da lugar a desplazamientos en la localización del equilibrio (ver Fig.15). En este caso, los operadores pueden actuar sobre las rectas o bien sobre las curvas.

Este modelo se extiende a un número mayor de bienes, a preferencias no-

convexas (no unicidad de equilibrios), a modelos macroeconómicos o de finanzas o también a la propagación de shocks y la localización de equilibrios dinámicos en términos de hiperplanos o, con más generalidad, hipersuperficies tangentes.

3.2. Gérmenes de aplicaciones

Dado el conjunto de las aplicaciones locales $f : U \rightarrow Y$ (donde U es un abierto de X que contiene a p_0), introducimos la relación de equivalencia siguiente:

$$(f, U) \sim (g, V) \iff \exists W \subset U \cap V \text{ con } p_0 \in W \mid f|_W = g|_W$$

3.2.1. Definición

A la clase de equivalencia por esta relación se le llama el *germen de la aplicación f en el punto $x \in X$* .

Al conjunto de gérmenes de aplicaciones en un punto $x \in X$ se le denota mediante $\mathcal{O}_{X,x}$ (para el caso analítico) ó mediante $\mathcal{E}_{M,p}$ para el caso diferenciable. Ambos conjuntos tiene estructura de álgebra real con respecto a las operaciones suma y multiplicación definidas mediante la suma y la multiplicación de sus representantes (comprobarlo como ejercicio).

3.2.2. Proposición

El conjunto de gérmenes de funciones $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ en $x \in X$ tiene estructura de anillo local, con ideal maximal $\mathcal{M}$ igual al conjunto de funciones que se anulan en $x \in X$ (ver *Ejercicio 1.1.7.6*). Los elementos inversibles ó unidades son los no pertenecientes al ideal maximal.

3.2.3. Comportamiento funtorial

Una aplicación $F : X \rightarrow Y$ entre C^r -variedades induce un homomorfismo entre álgebras (análogamente para los anillos) locales en x e $y = f(x)$ dado por la composición:

$$F^* : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \mid F^*(\varphi) := \varphi \circ F$$

verificándose que $Id^* = Id$ y $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ (carácter contravariante para el funtor). En particular, si F representa un germen inversible con respecto a la composición (localmente biyectivo), entonces

$$F \circ F^{-1} = Id \implies (F \circ F^{-1})^* = Id \implies (F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$$

3.2.4. Ejemplo

El caso más simple corresponde a gérmenes de funciones definidas sobre $\mathbb{R}^n$, es decir $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}$; el anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ está dado por el conjunto de las funciones definidas sobre $\mathbb{R}^n$ cuyo ideal maximal corresponde a las funciones que se anulan en un punto x (que podemos tomar como el origen). Denotamos mediante $\mathcal{O}_n$ a este anillo local.

Usando una carta local (φ, U) la derivación bajo el signo integral permite reducirnos al caso anterior. En efecto, para un pequeño entorno de $x \in X$ tenemos

$$f(\underline{x}) - f(\underline{0}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx^1, \dots, tx^n) dt = \sum_{i=1}^n x^i \int_0^1 D_i f(tx^1, \dots, tx^n) dt$$

por lo que en la categoría C^r (para $r \geq 2$) podemos escribir

$$f(\underline{x}) = f(\underline{0}) + \sum_{i=1}^n x^i f_i(\underline{x}) \quad \text{donde} \quad f_i(\underline{x}) = \int_0^1 D_i f(t\underline{x}) dt$$

La descripción del germen de una aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ en términos de sus componentes $(f_1, \dots, f_p)$ con $f_j = f_j(x^1, \dots, x^n)$ para $j = 1, \dots, p$, dota al conjunto de gérmenes de aplicaciones $F : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, f(x))$ de la estructura de $\mathcal{O}_n$ -módulo.

3.2.5. Una nota sobre la aproximación analítica local

La reformulación en términos de anillos ó de álgebras locales asociadas a C^r -variedades permite estudiarlas mediante las propiedades de espacios de funciones definidas sobre variedades, incluso en el caso singular. La extensión del estudio al caso singular no es posible si utilizamos la aproximación tradicional de la Geometría Diferencial de Variedades.

El procedimiento de “pegado” de datos locales para obtener C^r -variedades se extiende de forma natural al “pegado” de estructuras definidas por los anillos, módulos ó álgebras locales asociadas a los anillos locales A de funciones regulares $\mathcal{O}_{X,x}$ ó los módulos M construidos sobre dichos anillos. El caso más simple corresponde a la representación de los gérmenes de aplicaciones $f \in C^r(n, p)$ en un punto como el módulo dado por la suma de p copias del anillo $\mathcal{O}_{X,x}$.

Obviamente, además de los anillos (o módulos) de funciones regulares sobre un punto, se pueden considerar otros objetos obtenidos a partir de las operaciones básicas (producto tensorial, p.e.) definidos sobre dichos anillos que es necesario “pegar” usando condiciones de compatibilidad similares a las del caso regular. Los objetos iniciales que verifican las propiedades naturales de compatibilidad reciben el nombre de “prehaces”. Una reformulación de la Geometría Diferencial en estos términos se puede ver en Warner ¹⁰.

¹⁰ Una reformulación de la Geometría Algebraica y Analítica se puede ver en Grothendieck y Dieudonné: *Eléments de Géométrie Algébrique, I*, Springer-Verlag, 1974

3.3. El módulo de las derivaciones

Una *derivación* ξ es una aplicación lineal $\xi : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathbb{R}$ (análogamente para el caso diferenciable $\mathcal{E}_{M,p}$) que es nula sobre las constantes y satisface la *regla de Leibnitz*, es decir,

$$\xi(f \cdot g) = (\xi f)g + f(\xi g) \quad \forall f, g \in \mathcal{O}_{X,x}$$

La expresión anterior debe ser entendida de forma simbólica, es decir, cada una de las funciones se evalúa en un punto $x \in X$ (en $p \in M$ para el caso diferenciable). Si trabajamos en la categoría C^r para $r < \infty$, hay que tener presente que una derivación llevará funciones de clase C^r en funciones de clase C^{r-1} .

Con esta notación, el espacio tangente se expresa algebraicamente como

$$T_x X := \text{Der}_{\mathbf{k}}(\mathcal{O}_{X,x}) = \text{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathbf{k}) \simeq \mathcal{O}_{X,x} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle ,$$

donde el último isomorfismo es como $\mathbf{k}$ -álgebras. En particular, si $X = \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, entonces el espacio tangente en cualquier punto es isomorfo al $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo de las derivaciones generado sobre el anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ por las derivadas parciales

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle ,$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathbb{R} \quad | \quad f \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} f(0)$$

es decir, cualquier derivación sobre $\mathbb{R}^n$ se escribe en coordenadas locales como un operador diferencial en derivadas parciales de primer orden (y recíprocamente):

$$\sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{donde} \quad f^i \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) , \quad \forall i = 1, \dots, n .$$

Es bien conocido del Análisis que el vector tangente a cualquier curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se puede expresar en términos de las coordenadas locales de $\mathbb{R}^n$ usando la fórmula precedente y la regla de la cadena. Recíprocamente, la integración de un operador diferencial de la forma anterior (con condiciones iniciales prefijadas) permite obtener una curva cuyo vector tangente satisface al operador. Por tratarse de una propiedad *local*, esta situación se extiende obviamente al caso más general de variedades:

3.3.1. Equivalencia entre descripciones

Proposición.- Las descripciones precedentes de espacio tangente para una variedad X son equivalentes

Ejercicio (avanzado).- Demuestra la proposición precedente (Indicación: ver [Bro77]¹¹ para detalles).

Nota.-La mayor parte del curso está dedicada a técnicas para el caso suave o diferenciable. Por ello, relegamos las propiedades algebraicas que son sin embargo cruciales para la Geometría Analítica y la Geometría Algebraica. Las condiciones de suavidad y la dimensión finita de las variedades con que trabajamos permiten una aproximación más intuitiva basada en coordenadas locales.

3.3.2. Trivialidad local para el espacio tangente

Como la descripción del espacio tangente es *local* (en virtud del Teorema de la Función Implícita), si $x^1, \dots, x^m$ son coordenadas locales para un abierto coordenado U de $p \in M$ suficientemente pequeño, existe una C^r -equivalencia local que permite describir localmente el espacio tangente TU al abierto coordenado U como un producto cartesiano $U \times T_p M$.

En particular, si $\pi : TU \rightarrow U$ denota la proyección sobre la primera componente, entonces la C^r -equivalencia precedente se expresa mediante $TU \simeq U \times T_p M$ y la restricción de esta C^r -equivalencia a la fibra $\pi^{-1}(p')$ sobre cualquier punto $p' \in U \subset M$, induce un isomorfismo

$$\pi^{-1}(p') \simeq \pi^{-1}(p) \simeq \mathbf{K} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\rangle \simeq \mathbf{K}^m.$$

Por ello, identificaremos usualmente al espacio tangente de una variedad m -dimensional M con el espacio cartesiano $\mathbb{K}^m$, aunque esta identificación no es canónica (depende de la carta elegida). La identificación es canónica cuando la variedad es el propio espacio producto $\mathbb{K}^m$. Para fijar ideas, restringimos la atención al caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, aunque los argumentos algebraicos se extienden a cualquier otro cuerpo.

Si se parte de un espacio de Banach B en lugar de un espacio cartesiano, el razonamiento es similar, con una identificación canónica de la fibra con el propio espacio B ; en el §2, se muestra que el fibrado tangente de un espacio de Banach (en el caso geométrico, un espacio cartesiano con la métrica euclídea ó la hermitica ordinaria) es “trivial”, es decir, es una variedad producto de la base con la fibra genérica. Nótese que una variedad de Banach $\mathcal{B}$ construida sobre un espacio de Banach B (ver capítulo 3) es, en general, no trivial, lo cual extiende al caso infinito-dimensional los argumentos presentados para el caso geométrico. Esta extensión no es gratuita, pues responde al estudio de soluciones de ecuaciones funcionales definidas sobre espacios de funciones.

3.3.3. El espacio tangente a la circunferencia

Denotemos mediante $\mathbb{S}^1 := \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ a la circunferencia de radio unidad centrada en el origen O

¹¹ Brocker y Janich: *Introducción a la Topología Diferencial*, Ed. AC, 1977

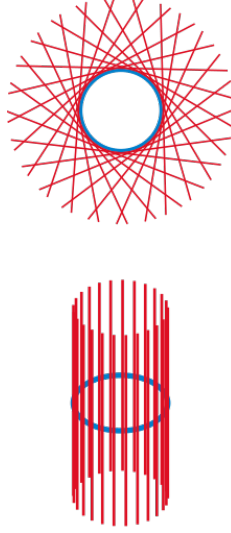


Fig. 16: Rectas tangentes a una circunferencia y representación espacial global

El espacio tangente $T_p\mathbb{S}^1$ está dado por la recta normal a $\mathbb{S}^1$ al radio vector $\overline{Op}$. Dicho subespacio en $p = (x, y)$ está generado por el vector $(-y, x)$ que varía de forma C^r con respecto al punto base y es siempre no-nulo; nótese que $(x, y) \cdot (-y, x)^T = 0$ lo cual permite reinterpretar al vector libre (x, y) como el vector normal $\mathbf{n}_p\mathbb{S}^1$ a $\mathbb{S}^1$ en p .

Por ello, el “conjunto” de los vectores tangentes $\mathbf{v} = t_p\mathbb{S}^1$ a la circunferencia se puede expresar globalmente como el producto (ver Fig.16)

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 = \{(p, \mathbf{v}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mid \mathbf{v} = t_p\mathbb{S}^1\}$$

La representación polar $e^{i\theta}$ proporciona una parametrización de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ por el ángulo polar $\theta = \arctan(y/x)$. En el lenguaje de los campos vectoriales el vector tangente está representado por la derivación $\partial/\partial\theta$.

En este caso, como la fibra es idéntica para todos los puntos (aunque la orientación cambie), el “pegado” de los datos locales correspondientes a las cartas que recubren $\mathbb{S}^1$ se lleva a cabo utilizando las mismas cartas que las correspondientes a la estructura de $\mathbb{S}^1$ como variedad (en este caso bastan dos cartas). Al resultado de “pegar” las rectas tangentes se le etiqueta como “fibrado tangente” (más adelante se da una definición más formal)

De una forma sintética y global se expresa esta condición diciendo que el fibrado tangente a la circunferencia $\mathbb{S}^1$, obtenido como producto cartesiano global $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ es el fibrado trivial sobre $\mathbb{S}^1$ al que se denota mediante

$$\tau_{\mathbb{S}^1} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 = \varepsilon_{\mathbb{S}^1}^1$$

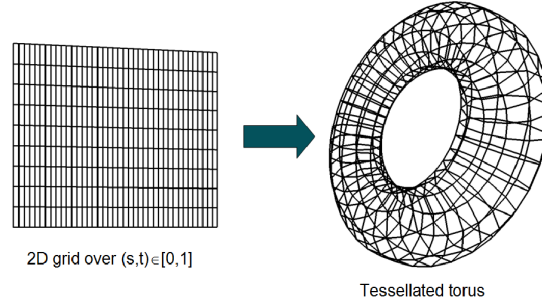


Fig. 17: Trivialización del Fibrado tangente al toro 2D

donde $\tau_{\mathbb{S}^1}$ denota el fibrado tangente a $\mathbb{S}^1$.

3.3.4. El espacio tangente al toro

Denotemos mediante $\mathbb{T}^m := \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ al toro m -dimensional producto de m copias de $\mathbb{S}^1$. Cada punto $p \in \mathbb{T}^m$ está parametrizado por $(\theta_1, \dots, \theta_m)$. Como el toro es un producto cartesiano, no existe ninguna relación algebraica entre las coordenadas (ver Fig.17). Por ello, el vector tangente en cada punto es una suma formal de vectores l.i. que expresamos de forma más compacta como

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) \in T_p \mathbb{T}^m \quad \text{donde} \quad \mathbf{v}_i \in T_{\theta_i} \mathbb{S}^1 \quad 1 \leq i \leq m$$

Como cada vector tangente $\mathbf{v}_i \in T_{\theta_i} \mathbb{S}^1$ se puede representar mediante una derivación, el conjunto de vectores tangentes es un espacio vectorial generado por las derivaciones $\partial/\partial\theta_i$ para $1 \leq i \leq m$. El argumento mostrado en el apartado anterior se extiende de forma inmediata a

$$\tau_{\mathbb{T}^m} = \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^m = \prod_{i=1}^m (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1) \simeq \oplus^m \varepsilon_{\mathbb{S}^1}^1$$

donde $\tau_{\mathbb{T}^m}$ denota el fibrado tangente a $\mathbb{T}^m$. En este caso, las derivaciones definidas sobre el toro son combinaciones lineales formales de $\partial/\partial\theta_i$ que expresamos en términos de coordenadas polares como

$$\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial\theta_i} \quad \text{donde} \quad a_i \in C^r(\mathbb{T}^m, \mathbb{R})$$

con la ventaja en este caso de que las derivaciones son globales, es decir, $\partial/\partial\theta_i$ se extiende a la copia i -ésima de $\mathbb{S}^1$.

Ejercicio.- Cualquier junta esférica de un robot descompone en producto de juntas rotacionales (parametrizadas por la circunferencia $\mathbb{S}^1$). Por ello, el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$ de un robot que no tenga juntas traslacionales se puede reducir al acoplamiento de un número finito de m juntas rotacionales; el acoplamiento se lleva a cabo en términos de sistemas de barras que suponemos

de longitud fija. Describe el espacio ambiente para la cinemática del robot en términos de la parametrización de un toro m -dimensional.

3.4. Aplicación Tangente como derivación

La diferencial $d_p f$ de la aplicación f en $p \in N$ está dada por una asignación que a cada vector tangente $\xi_p \in T_p N$ le lleva en un vector $\eta_{f(p)} \in T_{f(p)} P$. En esta subsección se interpreta y se formaliza esta idea.

3.4.1. La derivación como funcional

Interpretamos ahora dichos vectores como la evaluación de las derivaciones que actúan como operadores sobre el espacio de funciones definido en cada uno de los puntos. Cada uno de los vectores está determinado por el valor que toma el operador dado por la derivación en cada punto del espacio de funciones. Por ello, para definir la aplicación tangente, debemos mostrar cuál es la imagen de cada función $g \in C^{r-1}(P, \mathbb{R})$. De una manera más formal, escribiremos esta asignación mediante

$$(d_p f)(\xi)(g) := \xi(g \circ f) =: \xi(f^*(g)) ,$$

donde $f^*(g) := g \circ f$ representa la *imagen recíproca de g via f* , obtenida por composición. De una forma más simbólica, si hacemos $f_* := d_p f$, la expresión anterior se escribe también en forma algebraica como

$$(f_* \xi)(g) = \xi(f^* g) .$$

Esta formulación es especialmente apropiada para cuestiones relacionadas con el comportamiento funtorial de las derivaciones y las diferenciales. La definición que acabamos de mostrar es intrínseca, por lo que es fácilmente generalizable a espacios de funciones.

La equivalencia formulada en la Proposición precedente permite traducir esta formulación a los términos locales que son más familiares por el uso que de ellos se hace en Análisis Matemático.

3.4.2. Expresión Local de la Aplicación Tangente

Dada una aplicación $f : N \rightarrow P$ entre C^r -variedades, los atlas $\mathcal{A}_N = \{(U_i, \phi_{U_i})\}_{i \in I}$ y $\mathcal{A}_P = \{(V_j, \phi_{V_j})\}_{j \in J}$, permiten compatibilizar los datos relativos a la construcción de los espacios tangentes para cada punto. Para simplificar la notación, identifiquemos al punto p con sus coordenadas locales $\underline{x}$ y hagamos $\underline{y} = f(\underline{x}) \in V \subset P$ la imagen de $\underline{x} \in U \subset N$ via f .

Como ϕ_U y ψ_V son C^r -equivalencias sobre sus imágenes respectivas, se tiene que la restricción de sus diferenciales a las fibras inducen isomorfismos entre los espacios tangentes. Por ello, tiene sentido construir la diferencial de f relativa a las cartas (U, ϕ_U) y (V, ψ_V) en las C^r -variedades de partida N y llegada P como la restricción a $(d_x \phi_U)(T_x U)$ de la composición $d\psi_V \circ df \circ d\phi_U^{-1}$.

Si $x^1, \dots, x^n$ e $y^1, \dots, y^p$ denotan coordenadas locales en $\phi(U)$ y $\psi(V)$, respectivamente, entonces la regla de la cadena usual en Análisis de Varias Variables, permite expresar localmente el valor que toma en ξ la diferencial $d_{\underline{p}}f$ de f en $\underline{p}$ como

$$(d_{\underline{p}}f)(\xi) = \sum_{j=1}^p \xi(y^j \circ f) |_{\underline{p}} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

En particular, las imágenes via $d_{\underline{p}}f$ de los elementos $\xi^i = \partial/\partial x^i$ de la base de $T_{\underline{p}}N$ están dadas como

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) |_{\underline{p}} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j \circ f) |_{\underline{p}} \frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(\underline{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \quad 1 \leq i \leq n$$

Usando nuevamente la regla de la cadena para la intersección $U_\alpha \cap U_\beta$ de los dominios de dos cartas coordenadas (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) , obtenemos que

$$(d_{\underline{p}}f |_{U_\alpha})(\xi_\alpha) = (d_{\underline{p}}f |_{U_\beta})(\xi_\beta)$$

(comprobarlo), por lo que *la diferencial de f en $\underline{p} \in N$ no depende de la carta elegida*. Una vez fijados sistemas coordenados locales en los espacios de partida y de llegada, en el lenguaje del Análisis Clásico la diferencial está representada localmente por la *matriz jacobiana*. En este sentido, es frecuente encontrar en Física ó Ingeniería descripciones antiguas de vectores tangentes como aquellos que se transforman de acuerdo con reglas de transformación dadas por matrices jacobianas. El origen de este enfoque se justifica por el carácter intrínseco de los tensores que representan los vectores tangentes (es decir las derivaciones) ó sus duales (vectores cotangentes ó diferenciales); más adelante, volveremos sobre ello.

Esta propiedad permite trasladar las propiedades usuales del Análisis de Varias Variables al caso de Variedades (en particular, su caracterización algebraica como una aplicación lineal que satisface la regla de Leibnitz).

3.4.3. Campo vectorial gradiente

Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^r (para $r \geq 1$) definida sobre una C^r -variedad M , entonces $(d_{\underline{p}}f)(\xi) = \xi(f)(\underline{p})$ para cualquier $\xi \in T_{\underline{p}}M$ (comprobarlo como ejercicio). Por ello,

Lema.- Cualquier campo vectorial en un punto tiene asociada una aplicación lineal, es decir, se puede representar como un *operador lineal* dado sobre el conjunto $C_{\underline{p}}^r(N, \mathbb{R})$ de las aplicaciones definidas en un punto $\underline{p} \in N$. El operador lineal dado por un campo vectorial no depende del sistema coordenado elegido.

Ejercicio.- Comprueba que

- La expresión habitual de df es local, pero es una noción intrínseca.

- Si dos funciones $f \in C^r(U, \mathbb{R})$, $g \in C^r(V, \mathbb{R})$ coinciden sobre un abierto $W \subseteq U \cap V$, entonces el valor de cualquier campo sobre ellas es el mismo.
- El conjunto de campos (considerados como operadores lineales) con las operaciones habituales (suma y producto por un escalar) tiene una estructura de espacio vectorial al que se llama *espacio tangente en un punto* (Indicación: utiliza las propiedades algebraicas descritas en §1,4,3)

3.4.4. Versión coordenada local

Denotemos mediante $(\xi^1, \dots, \xi^n)$ a las componentes de ξ en $T_{\underline{p}}N$, y tomamos coordenadas locales $(x^1, \dots, x^n)$ en una carta (U, ϕ) con $\underline{p} \in U \subset N$. Entonces,

$$(d_{\underline{p}}f)(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \xi^i = \text{grad}_{\underline{p}}(f) \cdot \underline{\xi},$$

donde

$$\text{grad}_{\underline{p}}(f) := \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right)$$

denota el *gradiente de f* . El gradiente es un operador vectorial que actúa sobre cada vector $\underline{\xi} = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ mediante $f \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{1 \leq i \leq n} (f)$. Es inmediato verificar que $\text{grad}(f)$ es una aplicación lineal sobre $T_{\underline{p}}N$. Por ello, el gradiente así construido define un elemento del *espacio vectorial dual* $T_{\underline{p}}^*N$ del espacio tangente en cada punto.

4. Vector Tangente a una Aplicación en un Punto

Notación.- En toda esta sección M denotará la C^r -variedad correspondiente al espacio de partida N ó de llegada P para una C^r -aplicación $f : N \rightarrow P$.

4.1. Dualidad entre derivaciones y diferenciales

El operador delta de Kronecker $dx_i(\partial/\partial x_j) = \delta_{ij}$ da lugar a una dualidad formal entre los módulos de derivaciones y diferenciales sobre cualquier anillo base A ; estamos especialmente interesados en

- anillos de C^r -funciones regulares que denotamos mediante $\mathcal{E}_M$ (caso diferenciable) ó $\mathcal{O}_X$ (caso algebraico $k[\underline{x}]$ ó analítico $k[[\underline{x}]]$);
- anillos coordenados de variedades del tipo que denotamos mediante $\mathcal{E}_M/\mathcal{I}$ (caso diferenciable) ó bien mediante $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ (caso algebraico $k[\underline{x}]/I$ ó analítico $k[[\underline{x}]]/I$ donde I es un ideal);
- anillos locales que denotamos mediante $\mathcal{E}_M/\mathcal{M}$ (caso diferenciable) ó $\mathcal{O}_X/\mathcal{M}$ (caso algebraico ó analítico) siendo $\mathcal{M}$ el ideal maximal $(\underline{x} - \underline{x}_0)$ en el punto $\underline{p}_0 \in M$ ó $\underline{x}_0 \in X$

4.1.1. Espacio cotangente. Definición

Dada una C^r -variedad M , al espacio $T_p^*M := \text{Hom}(T_pM, \mathbb{R})$ dual de T_pM se le llama el *espacio cotangente* ó también *espacio de las fases* (en Física, Ingeniería, Economía, etc). En particular, si $f = x_j$ tenemos que

$$(d_p f)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \Rightarrow (d_p x^j)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \delta_i^j \quad 1 \leq i, j \leq n$$

lo cual proporciona una versión coordinada local para la dualidad entre los espacios tangente y cotangente en $\underline{p} \in M$

Nota.- En las aplicaciones practicas, casi nunca se conoce cuáles son las leyes del movimiento o las características de las fuerzas que actúan sobre los sistemas. En este caso, sólo podemos llegar a conocer los campos de forma indirecta, es decir, midiendo el efecto que producen sobre el sistema; esa medida numérica en cada punto es precisamente el valor que proporciona la diferencial. Por consiguiente, el conjunto de dichas medidas sobre una colección de tasas de variación linealmente independientes genera el espacio cotangente que, por dualidad, nos proporciona el espacio tangente.

4.1.2. El caso cartesiano

En virtud de la igualdad $d_p x^j(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \delta_i^j$, las diferenciales dx^j para $j = 1, \dots, m$, desempeñan un papel dual al que desempeñan las derivaciones ordinarias $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Esta igualdad se expresa globalmente como una dualidad

$$\mathbb{R}^m \simeq T_{\underline{p}}M \simeq \mathbb{R} \langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \rangle \rightarrow \mathbb{R} \langle dx_1 \dots dx_m \rangle \simeq T_{\underline{p}}^*M \simeq \mathbb{R}^m$$

En ocasiones (abuso de notación) se denota mediante el mismo símbolo a un vector de un espacio y a su dual. Así, por ejemplo el gradiente está definido por la expresión $(d_{\underline{p}}f)(\xi) = \xi(f)(\underline{p})$ por lo que es un elemento del espacio cotangente $T_{\underline{p}}^*M$.

Sin embargo, lo más frecuente es referirse a él en términos coordenados locales adoptando la expresión

$$(d_{\underline{p}}f)(\xi) = \text{grad}_{\underline{p}}(f) \cdot \underline{\xi}$$

donde $\text{grad}_{\underline{p}}(f)$ es la evaluación del campo vectorial $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$ sobre f , es decir, como un elemento de $T_{\underline{p}}M$. En este último caso, se sobreentiende que estamos tomando el vector dual y consideramos el gradiente como un operador diferencial $C^r(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^{r-1}(M, \mathbb{R})$. Esta diversidad puede dar lugar a alguna confusión que se salva diciendo que el contexto es el que determina una acepción u otra.

4.1.3. Formas no-degeneradas

El isomorfismo $T_{\underline{p}}M \simeq T_{\underline{p}}^*M := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_{\underline{p}}M, \mathbb{R})$ equivale a la existencia de una aplicación bilineal no-degenerada

$$T_{\underline{p}}M \times T_{\underline{p}}M \rightarrow \mathbb{R}$$

Una métrica g sobre una variedad M está dada por una aplicación bilineal simétrica no-degenerada $g_{ij}(\underline{p})$ que depende de forma C^∞ del punto $\underline{p} \in M$. La métrica g así definida induce un isomorfismo $T_{\underline{p}}M \simeq T_{\underline{p}}^*M$ entre los espacios tangente y cotangente que depende del punto base elegido $\underline{p} \in M$, es decir, la métrica g no es constante. En particular, la dualidad entre derivaciones y diferenciales asociada a

$$d_{\underline{p}}x^j(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \delta_i^j$$

sólo es “natural” para la métrica euclídea. Así, para una variedad M con una métrica $g = ds^2$ sobre M se tiene un isomorfismo no-canónico $T_{\underline{p}}M \simeq T_{\underline{p}}^*M$ inducido por la métrica (este punto de vista se desarrolla a partir del §4).

4.2. Calculando espacios tangentes

El operador diferencial gradiente proporciona la primera aproximación al cálculo del espacio tangente de una variedad regular, es decir, no singular; al final del primera apartado de esta subsección se muestra una primera aproximación al

cálculo de "elementos tangentes" correspondiente al caso singular, en términos del "cono tangente".

El Teorema de la Función Implícita permite reparametrizar localmente una variedad en términos de funciones coordenadas locales correspondientes a las variables que tienen un menor de tamaño máximo con determinante no-nulo; la interpretación geométrica de este enfoque motiva el estudio de la Geometría del Discriminante que ilustramos con un ejemplo básico asociado a familias de variedades dependientes de parámetros.

El último apartado de esta subsección está dedicado a mostrar una estrategia sintética para el caso en el que no se dispone (ó resulta muy engorroso de utilizar) una descripción implícita ó paramétrica para una variedad.

4.2.1. Representaciones implícitas

La forma más sencilla para expresar una superficie en $\mathbb{R}^3$ está dada en forma implícita por $z = f(x, y)$ (donde z se puede interpretar como una función "altura" ó la "profundidad" de una escena, p.e.). En este caso, el campo gradiente para $g(x, y, z) = f(x, y) - z$ está dado por $(f_x, f_y, -1)$ que representa el vector normal $\mathbf{N}$ (dirigido hacia el "exterior") de la variedad $V(g) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$. En este caso, el plano tangente está dado por la condición de ortogonalidad

$$\langle \mathbf{N}_{\mathbf{x}_0}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0$$

Esta construcción y su interpretación geométrica se extienden al caso n -dimensional para

- Una *hipersuperficie* $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ con hiperplano tangente $(n-1)$ -dimensional dado por $\langle \mathbf{N}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0$ donde ahora $\mathbf{N}_{\mathbf{x}_0} = \text{grad}(f)(\mathbf{x}_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ que genéricamente es $\neq 0$ (Teorema de Sard)
- La *intersección de p hipersuperficies* $f_1, \dots, f_k$ (sistema no-redundante ó "funcionalmente independiente") con $f_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$. El rango de la matriz jacobiana $\text{Jac}(F) = \text{Jac}(f_1, \dots, f_k)$ es genéricamente $m = \min(n, k)$ (más adelante diremos que las hipersuperficies se cortan "transversalmente"). Por ello, el espacio vectorial tangente $T_{\underline{x}_0}(\cap_{i=1}^k V(f_i))$ a la intersección $\cap_{i=1}^k V(f_i)$ de las variedades $V(f_i)$ es la intersección de los espacios tangentes $\cap_{i=1}^k T_{\underline{x}_0}(V(f_i))$ que es un subespacio de codimensión k , es decir, un elemento de $\text{Grass}(n-k, n) \simeq \text{Grass}(k, n)$. En otras palabras, el subespacio L^{n-k} tangente a $\cap_{i=1}^k V(f_i)$ en cada punto regular $\underline{x}_0$ está representado en cada punto regular $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (matriz jacobiana de rango máximo) por el producto exterior $(\mathbf{N}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{N}_k)(\underline{x}_0)$ donde $\mathbf{N}_j = \text{grad}(f_j) = (\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n})$. Por la condición de regularidad de F en $\underline{x}_0$ podemos reordenar las líneas de la matriz jacobiana para que el primer $(m \times m)$ -menor tange determinante no-nulo donde $m = \min(n, k)$

4.2.2. Nota sobre la extensión al caso singular

Los argumentos anteriores se aplican al caso de puntos regulares de f que son "genéricos" (forman un denso) en virtud del Teorema de Sard. Las Geometrías Algebraica y Analítica se ocupan del análisis correspondiente al caso singular. Una primera aproximación al caso singular está dada por los ejemplos siguientes básicos:

- *Curva nodal*: El campo gradiente para la curva $y^2 = x^2 + x^3$ (dibujarla) está dado por $(2x + 3x^2, -2y)$ que es genéricamente no-nulo salvo en el origen. La noción de espacio tangente presentada al comienzo del capítulo no es aplicable pues el término lineal es idénticamente nulo. Por ello, se recurre a la *forma inicial* dada por los términos de menor grado $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ (diagonales de los cuadrantes) que son las rectas tangentes a las dos ramas que presenta la curva nodal en el origen. A esta forma inicial se le llama el *cono tangente de Zariski* y desempeña el mismo papel que el espacio tangente para cada una de las ramas. *Ejercicio.*- Obtener una parametrización regular $(x(t), y(t))$ de la curva (fuera del origen) a partir de la familia de rectas $y = tx$ para $t \in \mathbb{R}$ y verificar que esta parametrización está dada por cocientes de polinomios en t ; se dice entonces que la curva es *racional* (el cuerpo de funciones racionales es el mismo que el de la recta).
- *Curva cuspidal*: El campo gradiente para la curva $y^2 = x^3$ (parábola semicuspidal de Newton en la terminología del s.XVIII) está dado por $(3x^2, -2y)$ que es genéricamente no-nulo salvo en el origen. De forma análoga al caso anterior se tiene un cono tangente dado por $y^2 = 0$ (una única rama correspondiente al eje Ox contado con "multiplicidad" 2), por lo que no es aplicable el argumento anterior. Sin embargo, la parametrización es bastante más sencilla, pues basta tomar $(x(t), y(t)) = (t^2, t^3)$. En este caso, cada una de las dos ramas de la curva cuspidal admite una parametrización analítica (serie de potencias convergentes) correspondientes a cada una de las raíces cuadradas de x^3 .

El análisis de las singularidades que pueden presentar hipersuperficies más generales se aborda de forma sucesiva en términos de singularidades aisladas, singularidades estables por perturbación (incluyendo puntos múltiples ordinarios, puntos pinzados y las intersecciones entre ambos tipos de lugares) y singularidades arbitrarias (caso que aún presenta muchos problemas abiertos). Las singularidades correspondientes a la intersección de k hipersuperficies requieren una estratificación por el rango de la diferencial (representada por la matriz jacobiana), presentando una mayor diversidad de tipos que los considerados para el caso de una única hipersuperficie.

Una herramienta general para abordar este tipo de problemas consiste en identificar parametrizaciones locales, resultado que es consecuencia del Teore-

ma Preparatorio de Weierstrass; para detalles ver [Gun65]¹². En el apartado siguiente se aborda el estudio de representaciones paramétricas para el caso regular:

4.2.3. Representaciones paramétricas

Una representación paramétrica real está dada por una C^r -aplicación $F : \mathbb{R}^n \times \Lambda^\ell \rightarrow \mathbb{R}^p$ que se puede interpretar como una "familia" de aplicaciones $f_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ dependientes de un "espacio" de parámetros Λ . Denotemos mediante $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \Lambda^\ell \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección sobre la primera componente y mediante $\pi_\Lambda : \mathbb{R}^n \times \Lambda^\ell \rightarrow \Lambda$ la proyección sobre la segunda componente. Ambas proyecciones son genéricamente regulares. Para la detección de "cambios de estado" o de "transiciones de fase", tiene interés estudiar la *Geometría del Lugar Discriminante* de la deformación asociado a π_1 dado por

$$\{(\underline{x}, \underline{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda^\ell \mid F(\underline{x}, \underline{\lambda}) = 0, \frac{\partial F(\underline{x}, \underline{\lambda})}{\partial \underline{x}} = 0\}$$

que consiste en "eliminar" los parámetros $\underline{\lambda}$ ó bien en la *Geometría del Lugar discriminante asociado a π_Λ* dado por

$$\{(\underline{x}, \underline{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda^\ell \mid F(\underline{x}, \underline{\lambda}) = 0, \frac{\partial F(\underline{x}, \underline{\lambda})}{\partial \underline{\lambda}} = 0\}$$

que consiste en "eliminar" las variables $\underline{x}$. Para entender este proceso, consideremos un ejemplo muy sencillo que permite "conectar" los dos ejemplos considerados en el apartado anterior como elementos de una familia de cúbicas dada por la deformación "universal" de $y = f(x^3)$ (singularidad de tipo A_2 dentro de la clasificación diferencial de gérmenes de aplicaciones):

Ejemplo.- Se considera la familia $f(x; a, b) := x^3 - 3ax + b$ (representarlo gráficamente como un "pliegue" geológico con su correspondiente sinclinal y anticlinal). El lugar discriminante asociado a la proyección sobre el plano (a, b) de parámetros corresponde a "eliminar" la x , resolviendo el sistema

$$f(x; a, b) := x^3 - 3ax + b = 0, \quad \frac{\partial f(x; a, b)}{\partial x} := 3x^2 - 3a = 0$$

por lo que $a = x^2 \Rightarrow x = \pm a^{1/2}$; sustituyendo obtenemos $f(a, b) = \pm a^{3/2} - 3(\pm a^{3/2}) + b = 0$, por lo que

$$b = \pm 2a^{3/2} \quad \Rightarrow \quad b^2 = 4a^3$$

es decir, se obtiene una curva cuspidal K en el plano de parámetros $(a, b) \in \Lambda$ con la siguiente interpretación:

¹² R.C.Gunning and H.Rossi: *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice Hall, 1965.

- $\forall(a, b) \in \Lambda - K$ la imagen recíproca es un polinomio que tiene 3 raíces simples;
- la imagen recíproca de $(a, b) \in K - \underline{0}$ es un polinomio que tiene 2 raíces múltiples y una simple
- la imagen recíproca de $\underline{0}$ es un polinomio con una única raíz triple

Por ello, la curva cuspidal del plano de parámetros "separa" los diferentes casos que se pueden presentar para los polinomios en una sola variable de grado 3 en términos del lugar discriminante, es decir, de las raíces múltiples de dichos polinomios. La elevación del lugar discriminante a la superficie cúbica $V(f)$ en $\mathbb{R}^3$ dada por $f(x; a, b) = 0$ da una curva $Ram(f) \subset V(f)$ a la que se llama el *lugar de ramificación* que se visualiza como el *contorno aparente* asociado a la proyección sobre el plano (a, b)

La generalización de este ejemplo al caso de singularidades de tipo A_k (en la terminología de V.I. Arnold) con deformación "universal" dada por la familia $f(x; a_1, \dots, a_k) := x^{k+1} + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$ que depende de k parámetros (verificar que siempre existe una transformación que permite "eliminar" el coeficiente correspondiente al término de grado k). La extensión a funciones que dependen de dos o más variables $(x_1, x_2, \dots)$ ya no es tan elemental¹³.

4.2.4. Representaciones simbólicas

Las descripciones correspondientes a los dos apartados anteriores utilizan la forma implícita ó paramétrica para la representación global ó local de una variedad. En este apartado se incluye un "ejemplo" que muestra cómo calcular el espacio tangente a una variedad X en un punto $\underline{x}_0$ de una forma "intrínseca", es decir⁴, sin utilizar ningún tipo de representación en términos coordenados. La estrategia consiste en construir el espacio tangente a partir de la definición, es decir, como el conjunto de los vectores tangentes a las curvas $\gamma : I \rightarrow X$ que tienen un contacto de orden ≥ 2 con la variedad X en el punto $\gamma(0) = \underline{x}_0$.

Ejemplo: Espacio tangente a la grassmanniana en un punto Denotemos por L_0 a un subespacio vectorial $(k+1)$ -dimensional de V^{n+1} representado por un punto $\mathbf{P}_{L_0} \in Grass(k+1, n+1)$ que denotamos abreviadamente como G^{n-k} (grassmanniana de subespacios de codimensión $n-k$). La grassmanniana G^{m-1} es intersección de una colección de hipersuperficies cuádricas, pero esta representación carece de utilidad para calcular el espacio tangente y da lugar a una casuística considerable. Por ello, es conveniente adoptar una estrategia alternativa basada en la descomposición $V^{n+1} = L_0^{k+1} \oplus Q^{n-1}$ inducida por la sucesión exacta

$$0 \rightarrow L_0^{k+1} \rightarrow V^{n+1} \rightarrow Q^{n-1} = V^{n+1}/L_0^{k+1} \rightarrow 0$$

¹³ Más detalles y referencias en el módulo A_{44} (Clasificación de Singularidades de Aplicaciones) de la materia A_4 (Topología Diferencial)

Denotemos mediante $\{e_0, \dots, e_k\}$ a una base $B(L_0^{k+1})$ de L_0^{k+1} que completamos con $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ de Q^{n-k} que forman una base $B(Q^{n-k})$, hasta obtener una base $\{e_0, \dots, e_n\}$ de V^{n+1} . Denotemos mediante L_{ij}^{k+1} al subespacio $(k+1)$ -dimensional que resulta de reemplazar el generador i -ésimo e_i de $B(L_0^{k+1})$ por el vector j -ésimo e_j de $B(Q^{n-k})$ para $0 \leq i \leq k$ y para $k+1 \leq j \leq n$; esta construcción da lugar a $(k+1)(n-k)$ elementos de la grassmanniana verificando que $\dim(L_0^{k+1} \cap L_{ij}^{k+1}) = k$ por lo que el haz $\lambda_0 L_0^{k+1} + \lambda_1 L_{ij}^{k+1}$ determina una recta tangente a la grassmanniana G^{n-k} ; por la elección de los generadores, todos los subespacios $(k+1)$ -dimensionales están asociados a vectores l.i. $e_0 \wedge \dots \wedge \hat{e}_j^i \wedge \dots \wedge e_k$ en el álgebra exterior $\wedge^{k+1} V$ donde $\hat{e}_j^i$ denota el resultado de reemplazar el elemento i -ésimo e_i de $B(L_0^{k+1})$ por el elemento j -ésimo e_j de $B(Q^{n-k})$. Como la dimensión de G^{n-k} es $(k+1)(n-k)$ los multivectores $e_0 \wedge \dots \wedge \hat{e}_j^i \wedge \dots \wedge e_k$ son l.i., son necesariamente un sistema de generadores de G^{n-k} . De una manera más sintética, la construcción anterior muestra que

$$T_{L_0^{k+1}} \text{Grass}(k+1, n+1) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(L_0^{k+1}, Q^{n-k})$$

y están representados por la $(k+1) \times (n-k)$ -matriz correspondiente a las $(n-k)$ últimas columnas de la representación paramétrica usual de una grassmanniana como variedad proyectiva en el abierto coordenado $D_+(p_{01\dots k}) = \{(p_I) \in \mathbb{P}^N \mid p_{01\dots k} \neq 0\}$ (una vez realizada la división por dicha coordenada $p_{01\dots k}$ que permite reemplazar la primera caja por la matriz identidad I_{k+1}). Para $k=0$ se obtiene que $\text{Grass}(1, n+1) \simeq \mathbb{P}^n$, por lo que el espacio tangente al espacio proyectivo en un punto L^1 está dado por (el proyectivizado de) $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(L^1, Q^n)$

Ejercicio.- Describe de forma explícita el espacio tangente a la grassmanniana $\text{Grass}(2, 4)$ (rectas en $\mathbb{P}^3$) en un espacio 2-dimensional $L^{(2)}$ (cuyo proyectivizado es una recta proyectiva ℓ).

Ejercicio.- Denotemos mediante $\mathcal{B}(\ell_1, \dots, \ell_r)$ denota la variedad de banderas de “nacionalidad” $(\ell_1, \dots, \ell_r)$, es decir a la colección de subespacios encajados

$$(9) \subset L^{\ell_1} \subset L^{\ell_1} \oplus L^{\ell_2} \subset \dots \subset L^{\ell_1} \oplus L^{\ell_2} \oplus \dots \oplus L^{\ell_r} = V^n$$

para cualquier partición $(\ell_1, \dots, \ell_r)$ de $n+1$. Si $B \in \mathcal{B}(\ell_1, \dots, \ell_r)$, demostrar que que

$$T_B \mathcal{B}(\ell_1, \dots, \ell_r) \simeq \prod_{1 \leq i < j \leq r} \text{Hom}(L^{\ell_i}, L^{\ell_j})$$

indicación: El estabilizador de B es el producto $GL(\ell_1) \times \dots \times GL(\ell_r)$ (matrices diagonales por cajas de tamaño $\ell_1, \dots, \ell_r$ y la variedad $\mathcal{B}(\ell_1, \dots, \ell_r)$ está parametrizada por las matrices triangulares por cajas de tamaño $(\ell_i \times \ell_j)$ que están situadas por encima de las cajas de la diagonal principal. Razonando por inducción sobre r (el caso $r=1$ es trivial y el caso $r=2$ es la grassmanniana) se concluye.

Nota avanzada.- La descripción anterior es válida para cualquier tipo de jerarquía geométrica que podemos introducir sobre variedades en el sentido más

amplio de la palabra, incluyendo el caso estratificado o variedades de Hilbert $\mathcal{H}$ ó de Banach $\mathcal{B}$ modeladas sobre espacios de Hilbert H ó de Banach B . En particular,

- Para una variedad estratificada, la descripción anterior permite comparar los límites de espacios tangentes de diferentes dimensiones asociados a diferentes estratos.
- Si se tiene una jerarquía entre soluciones asociadas a diferentes operadores cuyas soluciones dan lugar a conjuntos parcialmente ordenados (posets), el esquema precedente permite aproximar las soluciones de un sistema por las de otro sistema de ecuaciones

Este tipo de observaciones plantea el problema de identificar soluciones óptimas (que minimicen algún tipo de funcional definido sobre una variedad ó sobre un espacio de funciones) atendiendo a las jerarquías naturales de una variedad eventualmente estratificada o bien de espacios de soluciones asociados a diferentes tipos de operadores. La descripción de la variedad de banderas como cociente de un producto de grupos lineales es poco apropiada, pues $GL(r; \mathbb{R})$ es un abierto, lo cual da lugar a una convergencia "muy lenta" para las soluciones de sistemas. Para remediar este problema, resulta más apropiado ortogonalizar o bien ortonormalizar las bases:

- *Ortogonalización* (Gram-Schmid): está justificada porque cualquier matriz regular con coeficientes reales descompone en producto de una simétrica y una ortogonal. El conjunto de las matrices simétricas es contractible por ser un espacio vectorial. Por ello, la ortogonalización permite pasar a un subgrupo cerrado.
- *Ortonormalización* en términos de grupos consiste en pasar a $SO(n) = SL(n) \cap O(n)$ que es un grupo compacto, lo cual acelera la convergencia, si bien a costa de "reescalar" modelos y procesos (algo que puede resultar inapropiado dependiendo del problema a resolver).

Esta "reducción" del grupo estructural (paso del grupo lineal general al ortogonal o al especial ortogonal) implica que los cálculos de Optimización deben ser llevados a cabo en el grupo ortogonal $O(n)$ (cerrado) ó el especial ortogonal $SO(n)$ (compacto); en otras palabras, es necesario resolver el problema de optimización en el espacio tangente (álgebra de Lie) del grupo. Esta cuestión se aborda en el módulo 2. Una pequeña introducción a cuestiones de optimización se presenta en la sección siguiente.

Toda la construcción llevada a cabo en este apartado se traslada casi de forma inmediata al caso complejo, si bien la interpretación intuitiva es algo más complicada, debido al carácter que tienen las derivaciones holomorfas y antiholomorfas. La subsección siguiente lleva a cabo una primera introducción al problema que se irá abordando en diferentes módulos de esta asignatura.

4.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

Nota previa.- Toda esta subsección se incluye como posible práctica para aquellas personas matriculadas que tengan algún interés en las EDO y sus aplicaciones a Física Matemática.

4.3.1. Notación

Una ecuación diferencial ordinaria (en adelante, EDO) de orden n dada por

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right),$$

es equivalente a un sistema de EDO de primer orden dado por

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_{n+1} = F(t, x_1, \dots, x_n).$$

Por ello, dar una solución $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de la ecuación original verificando condiciones iniciales prefijadas, equivale a dar una solución del sistema de n ecuaciones de primer orden, verificando las condiciones iniciales

$$\phi(u_0) = u_1, \quad \frac{d\phi}{dt} \Big|_{t=t_0} = u_2, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}\phi}{dt^{n-1}} \Big|_{t=t_0} = u_n.$$

La situación más favorable se presenta cuando estudiamos EDO de orden n que son lineales en $x_2, \dots, x_n$ (según la notación del sistema precedente). En este caso existen diferentes procedimientos de reducción ó transformación que nos permiten "separar" variables (ver por ejemplo, Ince y Sneddon, §5 para una introducción). Aunque éste no es un problema elemental, supongamos que hemos realizado cambios en las variables que nos permiten resolver el sistema por iteración.

4.3.2. Construcción local de vectores tangentes de orden superior

El procedimiento descrito equivale geoméricamente a construir elevaciones sucesivas de caminos ϕ_i con $i = 1, \dots, n$ que son soluciones para cada uno de los sistemas parciales de EDO de primer orden que aparecen en las i primeras filas del sistema original, de modo que dichas elevaciones sean "compatibles" sobre la intersección de sus dominios de definición.

De una manera más explícita $\phi_1 : I \rightarrow I \times \mathbb{R}$ asocia a cada $u_0 \in U \subseteq I$ un par $(u_0, u_1) \in \text{grafo}(u_1) \subset I \times \mathbb{R}$ tal que $\phi(u_0) = u_1$. Por ello, ϕ_1 sólo fija el valor de la solución en el punto de acuerdo con las condiciones iniciales.

A continuación, como $\phi|_{t=t_0}$ fija el valor u_2 del vector tangente en el punto, tenemos que la aplicación $\phi_2 : I \rightarrow I \times T\mathbb{R}$ está dada por el par cuyas componentes son (u_0, u_1) y (u_1, u_2) , donde la segunda componente (u_1, u_2) fija de forma única la solución que pasa por el punto. Este par puede ser interpretado como una terna ordenada dada por (u_0, u_1, u_2) con la misma significación que la expuesta.

La aplicación $\phi_3 : I \rightarrow T^2\mathbb{R}$ asigna a cada punto u_0 una terna de pares cuyas componentes (u_0, u_1) , (u_1, u_2) y (u_2, u_3) corresponden a la condición para que una curva u_1 pase por un punto u_0 , tenga un vector tangente u_2 en u_0 y la velocidad de dicho vector tangente (ó aceleración, según la terminología física tradicional) sea u_3 en u_0 . Del mismo modo que antes, dicha terna puede ser reescrita como una 4-tupla.

La iteración de esta construcción es obvia. Interesa resaltar que esta construcción se puede llevar a cabo en situaciones más generales relativas no sólo a una ecuación diferencial de orden superior, sino a un sistema de EDO de diferentes órdenes. Como veremos en el §2, el lenguaje de fibrados tangentes sucesivos proporciona un lenguaje geométrico apropiado para abordar el estudio de las propiedades de este tipo de sistemas dados sobre variedades más generales que $\mathbb{R}$. En Topología Diferencial se lleva a cabo un estudio más sistemático en términos de jets.

4.3.3. Un ejemplo elemental: El Péndulo Simple

Consideremos la ecuación de segundo orden

$$\ddot{x}(t) := \frac{d^2x}{dt^2} = -x ,$$

Esta ecuación es equivalente al sistema de EDO de primer orden

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad , \quad \dot{x}_2 = -x_1 ,$$

que también podemos representar matricialmente como

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Para pequeñas oscilaciones de un péndulo, las funciones $\phi(t) = \sin(t)$ y $\psi(t) = \cos(t)$ son soluciones independientes de la ecuación original que corresponden a las condiciones iniciales $(0, 0, 1)$ y $(0, 1, 0)$ para $(t, x, \dot{x})$, respectivamente. Describir la solución general como una función trigonométrica, representarla gráficamente y mostrar la proyección de la dinámica sobre el espacio base. ¿A qué tipo topológico de punto corresponde el origen, si consideramos las soluciones correspondiente a la familia uniparamétrica de EDO dada por $\ddot{x}(t) = \lambda^2 x$?

La primera aplicación de este modelo simplificado de péndulo corresponde al *movimiento de un cuerpo sólido* pendiente de una cuerda perfectamente elástica (se supone que no hay disipación). Muestra que el campo dado por $V(x) := (x, -kx)$ (para $k > 0$) es conservativo y describir el movimiento.

La integración de la ecuación original del péndulo (dada como $\ddot{x}(t) + \sin(x) = 0$) es más difícil, pues requiere el uso de funciones elípticas. Sin embargo, el comportamiento cualitativo de las soluciones que hemos mostrado es el mismo que el de la ecuación original para pequeñas oscilaciones. Esta es una primera muestra de un procedimiento de linealización, que desarrollaremos a partir del §2.

4.4. Apéndice: Ecuaciones del movimiento en Mecánica Clásica

4.4.1. Formulación newtoniana

Denotemos mediante $E_p := mgz$ la energía potencial de un punto material P de masa m (donde z denota la altura). Esta energía es una función $E_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Las *ecuaciones de Newton* expresan que el campo gravitatorio dado por la función de energía potencial es conservativo, es decir,

$$m\ddot{\underline{q}} = -\text{grad}(U(\underline{q})) ,$$

donde $\underline{q} = (q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$ son las coordenadas del punto (una situación más general se considera en el *Ejercicio 1.4.11.3*). Si dicho punto está en movimiento, posee una *energía cinética*

$$E_c : T_P\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad | \quad \text{dada como} \quad E_c := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m(\dot{q}^i)^2 .$$

Si en lugar de trabajar con un punto material, tenemos n puntos materiales en $\mathbb{R}^3$, la formulación es similar, aunque en este caso tenemos $3n$ ecuaciones en lugar de 3. Según la terminología tradicional, se dice entonces que tenemos un *espacio de configuraciones* $3n$ -dimensional que describe las posiciones de los n puntos materiales en cada momento. Las condiciones de acoplamiento entre los puntos materiales complican la descripción de soluciones del sistema hasta el punto de que frecuentemente sólo podemos realizar afirmaciones de tipo cualitativo sobre el comportamiento de las soluciones del sistema.

4.4.2. Formulación hamiltoniana

Hagamos $p_i := m_i \dot{q}^i$ (este cambio recibe el nombre de *transformación canónica* en la Mecánica Analítica). Denotemos mediante $\pi : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a la proyección canónica y sea $H := E_p \circ \pi + E_c$ la energía total del sistema (un caso particular de Hamiltoniano en la terminología de la Física Clásica). Un cálculo elemental muestra que para cada punto

$$p_i = m_i \dot{q}^i \Rightarrow \dot{p}_i = m_i \ddot{q}^i = F_i = - \frac{\partial U}{\partial q^i} = - \frac{\partial H}{\partial q^i} ,$$

pues la versión newtoniana del campo gravitatorio es conservativo y por otro lado

$$p_i = m_i \dot{q}^i \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{q}^i)^2 = \frac{1}{2} \sum \frac{p_i^2}{m_i} \Rightarrow \frac{\partial E_c}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m_i} = \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} .$$

Por ello, el sistema de EDO de segundo orden dado por las n ecuaciones de Newton es equivalente al sistema de $6n$ ecuaciones de Hamilton dado por

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad ,$$

que también podemos escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \dot{q}^1 \\ \vdots \\ \dot{q}^{3n} \\ \dot{p}_1 \\ \vdots \\ \dot{p}_{3n} \end{pmatrix} = \text{grad}(H(\underline{q}, \underline{p})) \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} .$$

ó en forma vectorial más abreviada como

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{q}} \\ \dot{\underline{p}} \end{pmatrix} = \text{grad}(H(\underline{q}, \underline{p})) \begin{pmatrix} 0 & I_{3n} \\ -I_{3n} & 0 \end{pmatrix} = \text{grad}(H(\underline{q}, \underline{p})).J .$$

En ocasiones, a $\text{grad}(H(\underline{q}, \underline{p})).J$ se le llama el *gradiente simpléctico* de la función $H(\underline{q}, \underline{p}) : T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Con esta presentación, el sistema que acabamos de mostrar es conservativo, si bien respecto a un producto diferente del usual.

Nótese que el ejemplo presentado en el último apartado de la sección anterior es un caso particular de esta situación, y la situación que acabamos de mostrar es a su vez un caso particular de una formulación mucho más general, que es característica de la Mecánica Analítica (en su formulación hamiltoniana). En el §2,5 veremos que esta formulación hamiltoniana es invariante por la acción de un grupo (al que llamaremos “simpléctico”) que deja invariante la matriz J cuando actúa por conjugación.

4.4.3. Formulación hamiltoniana generalizada

En la formulación más general de la Mecánica Analítica que se presenta en el §2,6, se sustituye el espacio ambiente TU por el fibrado tangente de una variedad y daremos una versión más directamente relacionada con el Cálculo de Variaciones. Por otro lado, el hamiltoniano cuadrático que hemos presentado es de hecho la parte de orden 2 del desarrollo de Taylor de Hamiltonianos más generales.

En la práctica, no es fácil determinar cuál es el “verdadero” hamiltoniano (si existe, es decir, si el sistema es conservativo). Por ello, se debe empezar describiendo el marco general de la dinámica mediante un sistema conservativo del tipo descrito y luego “perturbar” el sistema hasta que las soluciones del sistema modificado tengan un comportamiento cualitativo similar al observado.

Si partimos del péndulo simple, por ejemplo, podemos extender fácilmente el análisis del problema a una situación de un péndulo forzado, pero la extensión deja de ser elemental cuando admitimos la existencia de “pequeñas fricciones” procedentes de la acción de un torque constante T :

$$\ddot{x} + \operatorname{sen}(x) + \varepsilon \dot{x} = T$$

Asimismo, incluso en el caso del péndulo, si introducimos perturbaciones no lineales, el análisis es bastante más complicado. El ejemplo típico lo proporciona el *oscilador de Van der Pol* dado por

$$\ddot{x} + x - \varepsilon \dot{x}(1 - x^2) = 0$$

de gran interés para circuitos eléctricos elementales.

Además, la dinámica puede proceder de dos ó más hamiltonianos que pueden interferir ó no entre sí (en el caso más elemental que acabamos de comentar, esto correspondería al acoplamiento de dos ó más osciladores). En la parte de Sistemas Dinámicos de Topología Diferencial desarrollaremos estos tópicos desde el punto de vista de la Teoría de Bifurcación.

Más adelante (ver §2,6) daremos una reformulación en términos lagrangianos (es decir, trabajando con $L := E_c - E_p \circ \pi$ en lugar de con el Hamiltoniano H) de las ecuaciones del movimiento de Newton correspondientes al desplazamiento de una ó varias partículas cuya(s) trayectorias están contenidas en una variedad. Para ello, es necesario desarrollar un lenguaje más geométrico.

5. Complementos

5.1. Conclusiones

En este capítulo se han mostrado diferentes aspectos vinculados al estudio de variedades suaves M basado en las funciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definidas sobre M . El estudio de aplicaciones suaves $f : N \rightarrow P$ entre variedades diferenciables se lleva a cabo en términos de cartas, lo cual permite reconducir el problema al análisis de varias variables reales. La noción de germen de f en un punto permite evitar el uso de coordenadas locales.

Una estrategia básica consiste en linealizar las funciones, lo cual permite reemplazar el estudio de una función por el análisis de su aproximación de primer orden. Esta aproximación se puede describir en términos geométricos (vector tangente), algebraicos (como derivación del anillo local) o analíticos (desarrollo truncado en serie de Taylor como primer ejemplo de jet). Para variedades suaves, todas estas aproximaciones son equivalentes entre sí; en el caso singular la equivalencia no tiene sentido, pues pueden existir diferentes vectores tangentes para cada una de las ramas que confluyen en un punto singular; por ello, sólo se puede trabajar con las versiones algebraica o analítica local.

De manera análoga, las aplicaciones $f : N \rightarrow P$ entre variedades suaves se pueden abordar usando propiedades algebraicas formales vinculadas al anillo de gérmenes de C^r -aplicaciones regulares en cada punto. Para ello, debemos extender el formalismo algebraico a módulos de derivaciones sobre el anillo local de (gérmenes de) funciones suaves $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ que denotamos mediante $\mathcal{E}(n, 1) = \mathcal{E}_n$ o, con más generalidad el $\mathcal{E}_n$ -módulo $\oplus^p \mathcal{E}_n$ de (gérmenes de) aplicaciones $f : N \rightarrow P$ que denotamos mediante $\mathcal{E}(n, p)$; en el caso analítico, el anillo local de (gérmenes de) funciones analíticas en $x \in X$ se denota mediante $\mathcal{E}_{n,x}$ y el módulo de (gérmenes de) aplicaciones analíticas se denota mediante $\mathcal{O}(n, p)$. Como $\mathcal{E}(n, 1)$ y $\mathcal{O}(n, 1)$ son anillos locales, las propiedades básicas formales son similares, lo cual permite llevar a cabo un análisis simultáneo de los casos diferenciable, algebraico y analítico.

La linealización de una aplicación $f : N \rightarrow P$ en el par $(x, f(x)) \in N \times P$ se expresa en términos locales en términos de una aplicación lineal entre los módulos de derivaciones que está representada localmente por la matriz jacobiana en el punto. Esta ‘presentación’ permite extender las nociones de campo gradiente ∇f de una función a la diferencial representada localmente por $Jac(f)$. El análisis de los cambios en la topología de las hipersuperficies de nivel $f^{-1}(y)$ de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y su extensión al caso de aplicaciones suaves $f : N \rightarrow P$ motiva el estudio los puntos “singulares” de f caracterizados por la condición de rango no máximo, es decir, menor que $inf(n, p)$ de la aplicación diferencial df . Este análisis es la extensión natural del lugar crítico de una función y conduce a una primera noción intuitiva de estratificación para el caso diferenciable.

A pesar de la simplicidad de los conceptos y propiedades presentados, existe un gran número de aplicaciones de este enfoque. Las más clásicas (relacionadas

con la Mecánica Newtoniana, p.e.) o con aplicaciones sencillas a Robótica o Visión Computacional se presentan en diferentes partados (habitualmente al final de las secciones). Otras más avanzadas relacionadas con aplicaciones a TIC se presentan en la última subsección de esta sección en el apartado de retos.

5.2. Ejercicios

5.2.1. Carácter intrínseco de la aplicación tangente

Comprueba que las nociones de aplicación tangente y rango de f en $x \in X$ están bien definidas, es decir, no dependen de la elección de las cartas. En particular, esto implica que las nociones de punto regular y valor crítico son intrínsecas, es decir, independientes del sistema coordenado elegido.

5.2.2. Estructura diferencial de la circunferencia

Razona por qué no existe ninguna función continua definida globalmente sobre la circunferencia $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ (*Indicación:* utiliza cartas).

Este ejercicio tiene una gran importancia para las aplicaciones relacionadas con el diseño, la ejecución y el control de movimientos de mecanismos planares en Robótica, incluyendo la incorporación de discontinuidades (switching) para los dispositivos de realimentación. Asimismo, orienta el problema hacia la construcción de campos vectoriales que proporcionen impulsos en regiones planares cuyos efectos puedan recubrir la circunferencia. En virtud del Teorema de Euler, cualquier rotación esférica es composición de tres rotaciones planares, por lo que esta construcción se extiende de forma natural al caso $3D$.

5.2.3. Inmersiones locales

Comprueba que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ es un isomorfismo local (es decir, su diferencial es inyectiva), pero f no es inyectiva (representarlo).

5.2.4. El complementario de una semirecta en el plano

Consideremos el sistema coordenado dado en la región $R := \mathbb{R}^2 - Ox^+$ (donde Ox^+ denota la parte no negativa del eje de abscisas) por las coordenadas polares; es decir, tenemos una aplicación $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada par (x, y) le asocia el par (r, θ) , donde $r := (x^2 + y^2)^{1/2}$ y $\theta := \arctg(y/x)$. Comprueba que la función inversa está dada por $P^{-1}(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ y que las derivadas direccionales están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r}(x, y) &= D_1 f(x, y) \cdot \cos \theta(x, y) + D_2 f(x, y) \cdot \sin \theta(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial \theta}(x, y) &= D_1 f(x, y) [-r(x, y) \cdot \sin \theta(x, y)] + D_2 f(x, y) [r(x, y) \cdot \cos \theta(x, y)] \end{aligned}$$

De este modo, comprobamos analíticamente (según [S], Vol.1, §2) que el vector tangente a la circunferencia con centro el origen que pasa por el punto (x, y) está dado en coordenadas polares por $(-sen\theta(x, y), cos\theta(x, y))$, por lo que es ortogonal al vector de posición del punto (razonarlo). Con una notación más tradicional, podemos escribir las igualdades anteriores de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} sen\theta = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} [-r.sen\theta] + \frac{\partial f}{\partial y} r.cos\theta = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{aligned}$$

5.2.5. Estructuras diferenciables sobre el espacio cartesiano

Demuestra que las estructuras globales dadas por cada una de las cartas siguientes sobre $\mathbb{R}$ *no son compatibles*: $\phi(x) := x$ y $\psi(x) := x^3$ (aunque la aplicación $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sea biyectiva). Sin embargo, la aplicación $f(x) := x^{1/3}$ es un difeomorfismo local entre ambas estructuras.

Nota.- Sobre $\mathbb{R}^n$ para $n \neq 4$ cualquier estructura diferenciable es difeomorfa a la trivial. Sin embargo, este resultado deja de ser cierto para $n = 4$ (la demostración es bastante difícil y se debe a Donaldson, 1983).

5.3. Prácticas

5.3.1. Cálculo diferencial sobre espacios de Banach

Escribe la regla de la cadena en forma vectorial para la diferencial de una composición de aplicaciones sobre espacios de Banach. Enuncia y repasa la demostración el Teorema de la Función Inversa para espacios de Banach (*Indicación*: ver Choquet-Bruhat et al, p.91; ó el §2,5 de [Abr88]¹⁴).

Nota.- Este ejercicio muestra que los principios básicos de la Geometría Diferencial se pueden extender a espacios de Banach, aunque no haremos uso de esta extensión en este Curso. La extensión de la Geometría Diferencial de Variedades a espacios de Hilbert proporciona una aproximación geométrica a diferentes aspectos de la Mecánica Cuántica, incluyendo la equivalencia entre modelos métricos asociados a diferentes operadores.

La práctica consiste en realizar un informe sobre el enfoque de Von Neumann de geometrización del Análisis Funcional en el marco de la Mecánica Cuántica.

5.3.2. Revisitando la proyección estereográfica

Consideremos la esfera n -dimensional de radio unidad

$$\mathbb{S}^n := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\underline{x}\|^2 = 1\}$$

¹⁴ R.Abraham, J.E.Marsden and T.Ratiu: *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, Springer-Verlag, 1988.

La ecuación de la recta que pasa por $\mathbf{N} = (1, 0, \dots, 0)$ y un punto arbitrario $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^n$ con coordenadas $(x_0, \dots, x_n)$ se escribe en forma continua como

$$\frac{X_0 - 1}{x_0 - 1} = \frac{X_1}{x_1} = \dots = \frac{X_n}{x_n}$$

Esta recta corta al hiperplano ecuatorial $X_0 = 0$ en el punto

$$\pi_N(\mathbf{p}) = (t_1, \dots, t_n) = \left(\frac{x_1}{1 - x_0}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_0} \right)$$

Verifica que la proyección construida es biyectiva y define un difeomorfismo de $U_+ = \mathbb{S}^n \setminus \mathbf{N}$ sobre el hiperplano $\mathbb{R}^n$. Análogamente, si tomamos ahora el polo sur $\mathbf{S} = (-1, 0, \dots, 0)$, la recta que pasa por $\mathbf{S}$ y $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^n$ corta al plano ecuatorial en el punto

$$\pi_S(\mathbf{p}) = (t'_1, \dots, t'_n) = \left(\frac{x_1}{1 + x_0}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_0} \right)$$

y nuevamente la proyección construida es biyectiva y define un difeomorfismo de $U_- = \mathbb{S}^n \setminus \mathbf{S}$ sobre el hiperplano $\mathbb{R}^n$. La restricción de la composición a la intersección $U_+ \cap U_-$ de los abiertos coordenados define una aplicación $\pi_S \circ \pi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que se obtiene eliminando $x_0, x_1, \dots, x_n$. Ahora bien, como $x_i = (1 - x_0)t_i$, sustituyendo en la ecuación de la esfera obtenemos

$$1 = \|\underline{x}\|^2 = x_0^2 + (1 - x_0)^2 \sum_{i=1}^n t_i^2 = x_0^2 + (1 - x_0)^2 \underline{t}^2$$

que resolvemos como una ecuación de segundo grado en x_0 :

$$(1 + \underline{t}^2)x_0^2 - 2\underline{t}^2x_0 + (\underline{t}^2 - 1) = 0$$

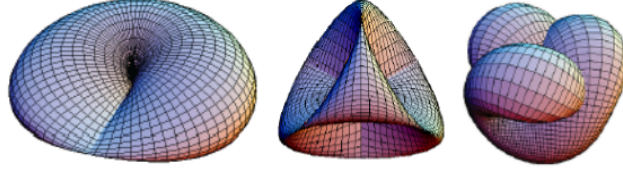
lo cual nos da la raíz $x_0 = 1$ que corresponde al punto excluido y la raíz

$$x_0 = \frac{\underline{t}^2 - 1}{\underline{t}^2 + 1} \Rightarrow 1 - x_0 = \frac{2}{\underline{t}^2 + 1}, \quad 1 + x_0 = \frac{2\underline{t}^2}{\underline{t}^2 + 1}$$

por lo que

$$x_i = (1 - x_0)t_i = \frac{2t_i}{\underline{t}^2 + 1} \Rightarrow t'_i = \frac{x_i}{1 + x_0} = \frac{t_i}{\underline{t}^2}$$

De este modo vemos que los cambios de carta están dados por $t_i = t'_i \underline{t}^2$, lo cual permite dotar a la esfera n -dimensional $\mathbb{S}^n$ de una *estructura de variedad diferenciable con dos cartas*.

Fig. 18: Visualizaciones del Plano Proyectivo $\mathbb{P}^2$ en 3D

5.3.3. El plano proyectivo como variedad diferenciable

Definimos la distancia entre dos rectas del plano como el mínimo ángulo entre ambas; esto convierte al plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ en un espacio métrico. Los puntos del plano proyectivo están representados por 3-tuplas $(x_0 : x_1 : x_2)$ definidas salvo factor de proporcionalidad, es decir, no todas nulas; por ello, $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 > 0$. Como no se tiene una descripción en términos de ninguna ecuación implícita, se recubre al plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ mediante tres cartas $(D_+(x_i), \varphi_i)$ donde

$$D_+(x_i) := \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_i \neq 0\} \simeq \left\{ \left(\frac{x_0}{x_i} : \frac{x_1}{x_i} : \frac{x_2}{x_i} \right) \mid x_i \neq 0 \right\}$$

son los *abiertos coordenados* y $\varphi_i : D_+(x_i) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la deshomonogeneización con respecto a la variable x_i para $0 \leq i \leq 2$. Demuestra que la aplicación $D_+(x_i) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por la asignación que a cada terna $(\frac{x_0}{x_i} : \frac{x_1}{x_i} : \frac{x_2}{x_i})$ le lleva en el par de elementos con coordenada no siempre igual a 1 sobre el abierto coordenado define una C^r -equivalencia, mostrando que la inversa tiene también rango máximo. Esta construcción dota al plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ de la estructura de C^r -variedad con un atlas minimal de tres cartas. Extiende esta construcción al caso del espacio proyectivo n -dimensional $\mathbb{RP}^n$ (¿cuántas cartas se requieren como mínimo?).

La práctica consiste en entender las diferentes representaciones asociadas a la visualización del plano proyectivo en $\mathbb{R}^3$ que, forzosamente adquiere singularidades. En la figura siguiente se proporcionan varias representaciones asociadas a puntos pinzados (cross-cap), la superficie Romana (Steiner) y la superficie de Boy ¹⁵

Nota. - El enfoque presentado en este apartado se extiende de forma natural a cualquier otra variedades proyectiva, aunque la visualización sea bastante más complicada que la descrita más arriba; ver [Sha72]¹⁶ para una aproximación clásica.

¹⁵ tomado de <https://mathoverflow.net/questions/135991/visualization-of-the-real-projective-plane/136035#136035>

¹⁶ I.R.Shafarevich: *Basic Algebraic Geometry*, GMW 213, Springer-Verlag, 1972

5.3.4. Forma local en el entorno de un punto regular

Sea $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ definida localmente en un pequeño entorno $U \subset \mathbb{R}^n$ de un punto $\mathbf{p}_0$. Demuestra que se puede elegir un sistema coordenado local (V, φ) en un entorno de $\mathbf{p}_0 \in U$ tal que f está dada por

$$f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}_0) + \sum_{i=1}^n (x^i - \mathbf{p}_0^i) \phi^i \quad \forall \mathbf{p} \in V \text{ con } \phi = (\phi^1, \dots, \phi^n)$$

Indicación: Elige coordenadas locales dadas por $(x^1, \dots, x^n)$ de modo que la imagen de $\underline{x}(\mathbf{p}_0)$ sea el origen $\underline{0}$ de coordenadas y utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para expresar

$$f(\underline{x}) - f(\underline{0}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [(f \circ \underline{x}^{-1})(tx^1, \dots, tx^n)] dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial (f \circ \underline{x}^{-1})}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n)$$

Nota.- Una consecuencia elemental de este ejercicio muestra que los vectores $(\partial/\partial x^i)$ para $i = 1, \dots, n$ dan una base para el espacio tangente $T_p U$ (ver §1.4 para notación y resultados relacionados).

La idea expuesta en la demostración de este ejercicio se usa también en la demostración del Lema de Morse que da la forma local de una función en el entorno de puntos críticos no degenerados (es decir, tales que $Hess(f)(\underline{p})$ es una forma cuadrática de rango máximo).

Reformula la condición de inmersión y submersión local para una aplicación $f \in C^r(M, N)$ entre dos C^r -variedades M y N , donde $r \geq 1$.

5.4. Retos

Se proponen cuatro retos correspondientes a aplicaciones de los materiales presentados en este capítulo a otras áreas de conocimiento, según un orden creciente de dificultad.

5.4.1. Políticas de ajuste en Macroeconomía

Los modelos básicos (aunque no elementales) de Equilibrio en Macroeconomía Keynesiana parten de sistemas de ecuaciones en los que se iguala la oferta y la demanda tanto en la producción de bienes manufacturados como en la oferta y demanda monetarias. Estos modelos no son estáticos, pues una modificación de las condiciones de oferta y demanda en uno de los macrosectores induce modificaciones en el otro. La formulación más sencilla utiliza herramientas de Estática Comparativa, en la que se analizan el estado actual como si fuera una “instantánea” representable mediante hiperplanos (rectas si sólo se analizan dos variables) con comportamiento variable en función de la interacción entre

diferentes agentes. Obviamente, dichos hiperplanos son los subespacios tangentes a las foliaciones que representan las soluciones de un modelo diferencial estructural más amplio.

Para fijar ideas, se empieza considerando el modelo keynesiano IS-LM en Macroeconomía (en realidad debido a Hicks) donde I es la inversión, S el ahorro, L la oferta monetaria (liquidity) y M la demanda monetaria para los 2-espacio IS (mercado de bienes) y LM (mercado monetario), respectivamente. Las políticas fiscales modifican el equilibrio en el plano IS , mientras que las políticas monetarias modifican el equilibrio en el plano LM . Si se toman las funciones ISLM como las coordenadas locales del modelo se obtiene una representación “natural”.

Una política inteligente consiste en modificar de forma alternativa y anticíclica unas y otras, algo muy alejado del dumping fiscal que unos estados ejercen contra otros y de la estúpida política del Banco Central Europeo y de sus acólitos. Ante la imposibilidad de llevar a cabo una convergencia en el terreno fiscal, el Banco Central Europeo se empeña en actuar sólo sobre la componente LM , evitando cualquier coordinación en política fiscal y dando lugar a más desequilibrios entre estados; ello da lugar de forma inevitable al estancamiento o al retroceso ¹⁷.

La práctica consiste en introducir los sistemas integrables de ecuaciones diferenciales y las soluciones correspondientes (hojas de una foliación) cuyos espacios tangentes proporcionan el modelo de estática comparativa descrito más arriba (ver mis apuntes sobre Modelos Geométricos para Macroeconomía).

5.4.2. Espacios de configuraciones y trabajo en Robótica

La reducción de una junta esférica (rotación en 3D) a juntas rotacionales planares es una simplificación matemática que puede resultar abusiva para algunas aplicaciones. En particular, no incluye la presencia de juntas traslacionales de las que disponen un gran número de robots. En ocasiones es necesario trabajar directamente con transformaciones euclídeas en el espacio ordinario. El grupo de transformaciones euclídeas $SE(3)$ es un grupo 6-dimensional definido como el producto semidirecto del grupo de rotaciones por el grupo de traslaciones que es una variedad no-lineal.

En este caso, las trayectorias óptimas (geodésicas) a realizar por el efector final del robots deben describirse directamente sobre la variedad, aunque pueden ser aproximadas por su discretización dada sobre copias “suficientemente próximas” del espacio tangente. El control para la ejecución de tareas por parte de los mecanismos del robot se lleva a cabo sobre el espacio tangente en puntos próximos (ver Fig.19).

Algunos robots tienen componentes que no son reducibles a sistemas de barras y juntas rotacionales; un ejemplo típico está dado por plataformas de Stewart que cuentan con dos “platos” conectados entre sí mediante un sistema de barras extensibles (juntas prismáticas) que no están contenidas en ninguno

¹⁷ Para más detalles ver G.Mankiw: *Macroeconomía* (1994)

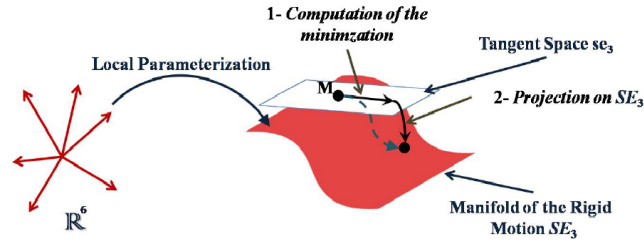


Fig. 19: Geodésicas en el grupo Euclídeo

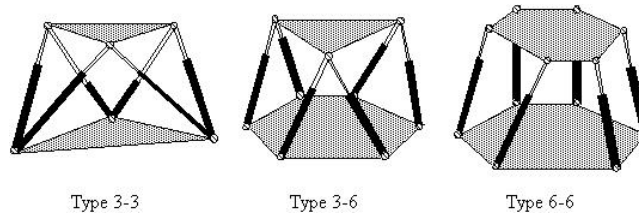


Fig. 20: Plataforma de Stewart simétricas

de los planos correspondientes a dichas plataformas con juntas esféricas en los extremos. Estos robots se utilizan p.e. para simuladores de vuelo.

La cinemática ocupa un lugar intermedio entre la Geometría y la Dinámica del Robot. En la cinemática no se considera el origen de las fuerzas ó momentos asociados a los mecanismos. En particular, la cinemática prescinde de efectos fundamentales correspondientes a fenómenos inerciales y los mecanismos de anticipación o compensación que permiten mejorar el rendimiento de los dispositivos robóticos. Estos aspectos requieren herramientas más avanzadas de dinámica que son una extensión natural de la mecánica newtoniana (ver final de este capítulo) y su reformulación lagrangiana (que se desarrolla a partir del capítulo 5 del módulo A_{12}).

El reto consiste en dar una descripción completa de los espacios de configuraciones y de trabajo de una plataforma de Stewart (ver Fig.20).

5.4.3. Asistencia a la producción de contenidos multimedia

Para fijar ideas, supongamos que se desea extraer información asociada a la captura de datos de un actor real mediante dos o más cámaras sincronizadas de vídeo¹⁸. La identificación de puntos homólogos en las diferentes vistas (extraídas a partir de cada secuencia de vídeo) da lugar a puntos 3D que proporcionan elementos de control para el pegado de datos.

¹⁸ El marco general para este “ejemplo” es el vídeo 3D que se desarrolla en el módulo B_{36} de la materia B_3 (Visión Computacional).

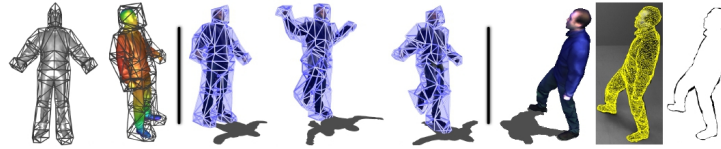


Fig. 21: Diferentes estrategias de animación para generar actores virtuales

El enlazado de dichos puntos se modela inicialmente en términos de (productos de dos) curvas tipo snake (racionales con pesos) con geometría variable. El comportamiento de dichas curvas (ó de las superficies producto tipo B-spline) se modela siguiendo puntos de control (salient features). Para ello, es necesario diseñar e implementar una realimentación entre las versiones lineal a trozos (mallas triangulares vs cuadrangulares) y la suave a trozos (asociada a trozos de curvas y superficies dadas frecuentemente de forma implícita).

El lugar discriminante para una proyección es el contorno aparente asociado a todos los puntos en los que el cono proyectante es tangente al objeto (incluye arrugas de ropa de actores, p.e.). El borde exterior de su proyección sobre cada plano de imagen es la silueta del objeto observado que se puede capturar a partir de infrarrojos. El problema a resolver consiste en controlar el transvase de información entre los PL y PS-modelos y en asociar de forma automática elemento geométricos (curvas ó superficies) de grado bajo a los elementos que acotan los objetos de interés. La fig.21 (tomada de Yann Savoye ¹⁹) ilustra la animación de mallas convencionales superpuestas a modelos volumétricos en relación con la animación basada en una “jaula” (envolvente convexa vs envolvente visual) de forma variable que se va ajustando a la geometría cambiante del objeto deformable

5.4.4. Interacciones en Mecánica de Medios Continuos

El carácter no-lineal de la mayor parte de los modelos de interacción sugiere una primera aproximación en términos de las insuficiencias que presenta el modelo lineal. Una estrategia habitual, consiste en linealizar el problema pasando al espacio tangente de los gérmes asociados a los flujos de campos vectoriales o tensoriales. La comparación entre las observaciones originales y las soluciones asociadas a la linealización, sugiere una acción simultánea sobre los espacios de partida (correspondientes a los sistemas de ecuaciones) y de llegada (correspondientes a las soluciones). Dicha acción se representa mediante difeomorfismos que actúan sobre ambos espacios de forma independiente (acción producto) ó bajo condiciones de “ligadura” (que se representan sobre el grafo); dichas acciones se representan mediante la $\mathcal{A}$ y la $\mathcal{K}$ -equivalencia respectivamente.

La linealización de la acción del producto (directo o semidirecto) de grupos de difeomorfismos da lugar a un producto (directo o semidirecto) de acciones

¹⁹ <http://www.animlife.com/sigasia10.php>

del grupo lineal general. La introducción de restricciones adicionales vinculadas a estructuras métricas (grupos especial ortogonal ó unitario, p.e.) , simplécticas generalizadas (grupo simpléctico o de contacto de la Mecánica Analítica) ó de fluidos ideales (grupos especial lineal) dan lugar a una restricción de la acción anterior. La extensión de estas restricciones a los difeomorfismos permite dotar de “más estructura” a las $\mathcal{A}$ y la $\mathcal{K}$ -acciones consideradas más arriba.

Los resultados fundamentales de este marco para sistemas aislados (que sólo interactúan con ellos mismos) se engloban dentro de la teoría KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) desarrollada en los años sesenta. El reto (muy difícil) consiste en llevar a cabo una reformulación de la dinámica entre diferentes sistemas abiertos continuos para obtener modelos de la interacción entre atmósfera y océano.²⁰

²⁰ Para detalles y referencias ver mi introducción a la materia B_1 (Computational Mechanics of Continuous Media) o a los diferentes módulos B_{1i} de dicha materia