CAPITULO 1: VARIEDADES DIFERENCIABLES

Javier Finat

Nota previa: Todos los apartados (incluyendo secciones) etiquetados como Apéndices están orientados a trabajos prácticos.

Índice

0.1. Hacia una demarcación del objeto de estudio 3
0.1.1. Objetos de clase C^r 4
0.1.2. Propiedades intrínsecas y extrínsecas 4
0.1.3. Pegado conjuntista de objetos 5
0.1.4. Pegado mediante campos 6
1. La noción de Variedad Diferenciable 8
1.1. Variedades 8
1.1.1. Variedades y cartas 8
1.1.2. Aplicaciones y estructuras diferenciables 9
1.1.3. C^r-equivalencias. Difeomorfismos 10
1.1.4. Ejemplos básicos 11
1.2. La noción de Dimensión 13
1.2.1. Dimensión topológica 13
1.2.2. Teorema de la Invariancia del Dominio 13
1.2.3. Algunas consecuencias 14
1.2.4. Variedades puras 14
1.3. Diferentes descripciones para objetos geométricos 14
1.3.1. Descripción implícita 15
1.3.2. Descripción explícita 15
1.3.3. Descripción paramétrica 16
1.3.4. Relaciones entre descripciones 17
1.4. Simetrías en espacios 19
1.4.1. Espacios localmente euclídeos 19
1.4.2. Espacios localmente hiperbólicos 20
1.4.3. Espacios homogéneos 21
1.4.4. Ejemplo: Grassmannianas 22
1.4.5. Espacios localmente simétricos 26
2. Atlas sobre una variedad 27
2.1. Noción de variedad topológica 27

2.1.1. Parametrización local 27
2.1.2. Compatibilidad entre cambios de carta 28
2.2. Noción de variedad de clase r 28
2.2.1. Variedad de clase r 29
2.2.2. Noción de subvariedad 29
2.2.3. Observaciones 29
2.2.4. Una extensión de la noción de subvariedad 30
2.3. El problema del pegado 31
2.3.1. Pegado directo 31
2.3.2. Pegado inverso 32
2.3.3. Pegado bajo información incompleta 33
2.3.4. Algunas aplicaciones recientes 33
3. Estructuras Diferenciables 35
3.1. Atlas completos y estructura de clase C^r 35
3.1.1. Atlas completo 35
3.1.2. Estructura de clase C^r sobre M 35
3.1.3. Tipos de proyección 36
3.1.4. Representando la distorsión 36
3.2. Objetivos de la Geometría Diferencial 38
3.2.1. Invariantes para la C^r-clasificación 39
3.2.2. El caso diferencial 40
3.2.3. Extendiendo la notación 41
3.2.4. Aplicaciones avanzadas en TIC 42
3.3. Complementos históricos 44
3.3.1. Compatibilidad y jerarquías entre C^r-estructuras 44
3.3.2. Variedades no lisas y estructuras no-equivalentes 46
3.3.3. El problema de la clasificación 46
4. Complementos 48
4.1. Conclusiones 48
4.2. Ejercicios 49
4.2.1. Parametrizando la esfera 49
4.2.2. Parametrizando el toro 50
4.2.3. Parametrizando la banda de Moebius 50
4.2.4. El espacio proyectivo como variedad 51
4.2.5. Parametrizaciones polares y esféricas 52
4.2.6. Difeomorfismo local entre esferas y espacios proyectivos . 52
4.3. Prácticas 52
4.3.1. Equivalencia entre nociones de atlas 52
4.3.2. El cono y el semicono como variedades 52
4.3.3. Repaso de Topología General de Variedades 52
4.3.4. Proyección estereográfica 53
4.4. Retos 54
4.4.1. Difeomorfismos entre esferas y entre espacios proyectivos . 54
4.4.2. Estructuras diferenciables sobre curvas racionales 55
4.4.3. Atlas diferenciable y analítico 56
4.4.4. Regularización de datos 56

0.1. Hacia una demarcación del objeto de estudio

Según el programa de Erlangen (F.Klein), la *Geometría* es el estudio de propiedades invariantes por la acción de un grupo G de transformaciones. El grupo puede ser lineal ó no, continuo ó discreto, de dimensión finita o infinita. Existe una jerarquía entre grupos que equivale a una jerarquía entre Geometrías. El caso más amplio y con menor estructura corresponde al grupo de los homeomorfismos, es decir, las aplicaciones biyectivas y bicontinuas que da lugar a la Topología conjuntista como marco más general para todas las Geometrías.

Los *problema central de la Topología* son la *caracterización* y la *clasificación* de objetos. Inicialmente los objetos son espacios y aplicaciones. Las clasificaciones de espacios y aplicaciones están relacionadas, pues las propiedades de los objetos son predicados ó atributos que evaluamos en términos de funciones ó de aplicaciones. El *problema central de la Geometría* es el *estudio de propiedades* de objetos finito-dimensionales [1]. La Topología suministra herramientas para la Geometría y la Geometría proporciona objetos (eventualmente deformables) para la Topología. Por ello, ambas disciplinas están estrechamente relacionadas entre sí.

En la *Topología Conjuntista* los objetos se clasifican *modulo homeomorfismo*; generar homeomorfismos locales es muy fácil [2]; sin embargo, demostrar si dos objetos son globalmente homeomorfos o no es un problema bastante más difícil. La clasificación topológica es muy tosca: todas las curvas simples (cerradas y sin autointersecciones son homeomorfas y todos los mamíferos con cuatro extremidades son topológicamente equivalentes, p.e.. Habitualmente, se requieren criterios "más finos" que permitan distinguir entre subclases; una discriminación más fina se alcanza utilizando funciones (ó funcionales con más generalidad) definidos sobre los objetos ó bien estudiando las transformaciones definidas sobre dichos objetos.

Si atendemos al enfoque topológico, la *clasificación modulo homeomorfismo no es constructiva*, es decir, no existen criterios eficientes (mucho menos algoritmos implementables) que permitan decidir de forma práctica si dos objetos (espacios ó variedades) son homeomorfos ó no. El problema resulta aún más complicado cuando los espacios soportan una estructura de tipo diferenciable, algebraico o analítico. Las propiedades topológicas usuales (separación, conexión, compacidad) permiten discriminar entre espacios topológicos, pero en la mayor parte de los casos, los criterios no son constructivos, ni computacionalmente implementables en tiempo finito

Por ello, para resolver problemas de clasificación se recurre habitualmente a criterios de "tipo negativo", es decir, se introducen invariantes más fácilmente computables relativos a "estructuras adicionales" sobre espacios y aplicaciones. Si los invariantes de las estructuras adicionales superpuestas son diferentes, entonces los espacios ó las variedades no son equivalentes. En Topología Algebrai-

[1] Por ello, no se ocupa de espacios de funciones, aunque éstos puedan tener propiedades geométricas, como ocurre p.e. con los espacios de Hilbert

[2] Más adelante veremos que la integración de cualquier campo vectorial proporciona un homeomorfismo local

ca, p.e., se superponen estructuras de tipo combinatorio (inicialmente lineales a trozos [3]) calculables que permiten evaluar invariantes más fáciles de describir. Las estructuras adicionales se describen mediante aplicaciones de clase C^r.

0.1.1. Objetos de clase C^r

Definición.- Una aplicación $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos X, Y es de clase C^r en $x \in X$ si f y su k-ésima derivada $D^k f$ es continua en $x \in X$ para $0 \leq k \leq r$; cuando $r = \infty$ decimos que f es "lisa", suave ó *diferenciable en* $x \in X$. Diremos que f es *analítica en* $x \in X$ cuando admite un desarrollo en serie *convergente* para un pequeño entorno de $x \in X$. Obviamente, cualquier aplicación algebraica es analítica y cualquier aplicación analítica es diferenciable (la recíproca de estas afirmaciones no es cierta). Diremos que $f : X \to Y$ es de clase C^r cuando lo es en cualquier elemento $x \in X$.

En esta asignatura se trabaja habitualmente con C^∞-objetos y C^∞-morfismos. La condición de "lisitud", diferenciabilidad ó suavidad es muy estricta y, salvo casos particulares (funciones polinómicas, trigonométricas, trascendentes) no es verificable en tiempo finito: Es imposible calcular "todas" las derivadas, salvo que la función sea un polinomio ó que presente alguna ley de formación (periodicidad, p.e.) fácilmente identificable para las derivadas sucesivas. No obstante, una "suavidad aproximada" se percibe tanto en objetos estáticos como en muchos fenómenos dinámicos

El argumento de aproximación de objetos de clase C^r por objetos de clase C^∞ (suaves) se justifica porque las aplicaciones suaves son "densas" con respecto a la topología "débil" (compacta-abierta; es decir, para una topología apropiada cualquier aplicación de clase C^r "se puede aproximar" tanto como se quiera por una de clase C^∞ para $r \geq 1$ [4]. La propiedad de densidad simplifica la demostración de un gran número de propiedades que basta verificar para aplicaciones suaves; la extensión de este argumento a los objetos suaves a trozos (PS-categoría) tiene gran interés para conectar la Geometría Diferencial con la Analítica (mediante la introducción de "estratificaciones").

0.1.2. Propiedades intrínsecas y extrínsecas

Para construir objetos globales a partir de datos locales, debemos empezar describiendo la forma *local* que presentan los objetos (tanto variedades como aplicaciones). De este modo, es posible discernir si las propiedades que proponemos son "intrínsecas" ó no. El carácter intrínseco está asociado a la independencia de la "forma"(ecuación, parametrización) ó del funcional con respecto al sistema de coordenadas elegido; el carácter intrínseco es la clave para dotar de un carácter geométrico a objetos y funcionales definidos sobre los objetos. La idea básica que desarrollaremos en este capítulo y en el siguiente está basada en la "linealización" tanto de estructuras (mediante la noción de fibrado tangente) como de aplicaciones (mediante la extensión de la diferencial).

[3] En lo sucesivo las etiquetaremos como PL: Piecewise Linear

[4] Para los detalles ver p.e. Hirsch, "Differential Topology", Springer-Verlag, 1978

- En el caso de C^r-estructuras, la idea de linealización en un punto corresponde a asociar el espacio (co)tangente a cada punto; el "pegado" de estos espacios (co)tangentes conduce "de forma natural" (pegado de fibras) a la noción de fibrado (co)tangente.

- En el caso de C^r-aplicaciones, el estudio de propiedades asociadas a la diferencial de una aplicación permite obtener propiedades de clasificación asociados a la diferencial como aplicación lineal entre espacios vectoriales dados por los espacios (co)tangentes. El invariante fundamental de cualquier aplicación lineal (en particular, de la diferencial) es el rango en cada punto.

0.1.3. Pegado conjuntista de objetos

En Geometría Diferencial el estudio de las propiedades de los C^r-objetos pasa por el "pegado" de C^r-estructuras locales más simples superpuestas a abiertos. El espacio topológico que se obtiene como resultado de este proceso de "pegado" recibe el nombre de C^r-variedad (más abajo se da una definición más formal); obviamente, el resultado de este proceso debe ser independiente de la forma de "pegado", es decir, debe ser "intrínseco". Intuitivamente, un objeto es intrínseco si es independiente del sistema de coordenadas utilizado para describirlo; en caso contrario se dice que es extrínseco. Más adelante, veremos que los datos tangenciales son intrínsecos, mientras que los datos normales son extrínsecos (dependen de la variedad ó, con más generalidad, del espacio en la que el objeto está "sumergido").

En virtud del Teorema de la Función Implícita sólo podemos "pegar" aquellos datos en los que el cambio de carta tiene rango constante. Para extender esta construcción se introduce la noción de "estratificación" relativa a una aplicación que se describe de forma conjuntista como una descomposición en unión disjunta de abiertos en los que el rango de la diferencial es constante; a esta descripción conjuntista se añaden diferentes tipos de restricciones geométricas ó analíticas asociadas a un "control" de espacios tangentes ó secantes de diferentes dimensiones para un pequeño entorno de las singularidades [5].

Nota.- En el caso singular, la noción de espacio tangente no tiene sentido debido a la discontinuidad que presenta la evolución del espacio tangente en "ramas" próximas a la singularidades. Por ello, el espacio tangente se reemplaza en el caso algebraico ó analítico por el álgebra de las $\mathbb{K}$-derivaciones donde $\mathbb{K}$ es el cuerpo base; este álgebra tiene las mismas propiedades formales que el espacio tangente pero no necesita condiciones de clase C^2, ni tampoco condiciones de unicidad relativas a las "ramas" que pasan por un punto [6].

[5] Ver Goresky y MacPherson: *Morse Stratified Theory*, Springer-Verlag, 1983, ó bien el módulo de Topología Diferencial para más detalles

[6] Ver Brocker y Janich: *Introducción a la Topología Diferencial*, Editorial AC, para una demostración sencilla de la equivalencia entre diferentes aproximaciones a la noción de espacio tangente.

La noción de "pegado" es una noción topológica que afecta a la compatibilidad entre cartas (U_i, φ_i) donde U_i es un abierto de M y $\varphi : U_i \to \mathbb{R}^m$ una C^r-equivalencia sobre su imagen en $\mathbb{R}^m$; la compatibilidad entre cartas no es global sino local,es decir, sólo está definida sobre la intersección $U_{ij} := U_i \cap U_j$ de los dominios de cada carta.

0.1.4. Pegado mediante campos

La Geometría Diferencial permite realizar el "pegado" de una forma constructiva mediante "campos"; intuitivamente, un campo vectorial (resp. tensorial) es una asignación de un objeto vector (resp. tensor ó forma multilineal) a cada punto. Esta asignación se puede interpretar como la representación de una "interacción local" de la variedad X consigo mismo (campos vectoriales tangentes) ó bien con el entorno en el que se encuentra inmerso (campos vectoriales normales). Los *campos* están definidos sobre un dominio D (abierto, conexo) y pueden ser

- *escalares* dados por un funcional que toma valores en $\mathbb{R}$, como la altura, la profundidad, la energía, p.e.;
- *vectoriales* tales como una representación vectorial en términos de una colección de vectores tangentes (ó sus duales) a lo largo de trayectorias; esta asignación proporciona una representación simple de la cinemática ó bien de los cambios (reales ó aparentes) en atributos asociados p.e. a características de la luz (intensidad en grises, color, reflectancia, opacidad, etc) ó de cualquier otro tipo de radiación electromagnética.
- *tensoriales* asociada a "cantidades invariantes" representadas mediante aplicaciones multilineales asociadas a trozos de variedades; permiten describir el comportamiento de dichas cantidades en medios rígidos (transformaciones asociadas a diferentes vistas de un mismo objeto) ó deformables continuo (elasticidad, plasticidad) ó ambos a la vez (campos de texturas dinámicas, p.e.)

La representación de campos vectoriales juega un papel crucial en las herramientas de Visualización Avanzada La realimentación con datos reales requiere estimar el efecto de estos campos como "pequeños desplazamientos"; esta evaluación se realiza en términos de 1-formas diferenciales ó con más generalidad k-formas si se evalúan k "cantidades" de forma simultánea.

El enfoque de la *Geometría basada en campos* se extiende de forma natural a espacios de dimensión arbitraria eventualmente infinita (como espacios de Hilbert, p.e.) de gran interés para aplicaciones. Estos espacios tienen "menos estructura" que una variedad (ni siquiera hace falta la continuidad). Actualmente, cualquier tipo de interacción se puede representar mediante campos. En particular, las teorías físicas de unificación entre las interacciones presentes en la

Naturaleza (gravitatoria, electromagnética, débil y fuerte) se formulan en términos de patrones comunes para propiedades de campos definidos sobre variedades generalizadas.

De forma intuitiva, un *tensor diferencial* es un producto formal de campos y formas que es compatible con los cambios de coordenadas asociadas a las diferentes representaciones locales de los objetos geométricos; un tensor representa "cantidades geométricas" que se conservan sobre variedades o bien a lo largo de "flujos". Por ello, los tensores proporcionan los objetos más generales que permiten formalizar y representar cualquier tipo de "cantidad geométrica" (y sus extensiones a espacios funcionales métricos) en cualquiera de las áreas de aplicación de las Matemáticas. En este curso sólo se consideran algunas aplicaciones básicas de los Tensores a Física [7]

[7] Una introducción a aplicaciones relacionadas con otras áreas de Ciencias, Ingeniería, Geografía o Teoría Económica se puede ver en el Apéndice dedicado a Aplicaciones de Geometría Diferencial que se encuentra disponible en el repositorio

1. La noción de Variedad Diferenciable

La Topología proporciona herramientas muy generales y muy flexibles para construir objetos aislados y para modelar relaciones entre ellos. La construcción se realiza mediante "pegado" de datos locales que se representan mediante conjuntos (abiertos o cerrados) verificando una colección de propiedades formales con respecto a operaciones conjuntistas básicas (unión e intersección).

Las evaluaciones de cantidades sobre los objetos ó bien los cambios sobre los objetos se representan mediante funciones escalares o vectoriales, eventualmente variables (es decir, dependientes del punto sobre el que se trabaja). Para facilitar la composición o la posibilidad de "deshacer cambios" sobre los objetos se imponen condiciones de "regularidad" que, en el caso continuo, se representan imponiendo la condición de *homeomorfismo local* a las aplicaciones mediante las cuales se realiza el "pegado" de datos locales. Un homeomorfismo local es una aplicación biyectiva (inyectiva y suprayectiva) y bicontinua (continua con inversa continua).

Esta construcción topológica resulta muy útil para comparar objetos con apariencias muy diversas, pero es demasiado "laxa"; además, no permite realizar una comparación de objetos basada en la utilización de "cantidades" como las asociadas a distancias, ángulos, áreas, etc ni tampoco aplicar ningún procedimiento de optimización para evaluar las mejoras de un modelo o de una solución con respecto a otra. Es necesario "añadir más estructura" y esto se puede llevar a cabo de manera diferenciable, algebraica o analítica. Este Curso está enfocado sobre todo a la superposición de estructuras de tipo diferenciable.

Intuitivamente, una variedad diferenciable n-dimensional se obtiene "pegando" espacios cartesianos $\mathbb{R}^m$ mediante transformaciones de clase C^∞. Análogamente, una variedad algebraica ó analítica se obtiene "pegando" espacios afines $\mathbb{K}^n$ mediante transformaciones birracionales (racionales con inversa racional) ó bianalíticas (de clase C^ω ella y su inversa), respectivamente. A continuación se expone con más detalle el caso suave correspondiente a la categoría C^∞.

1.1. Variedades

La Topología proporciona el marco general para la Geometría y el Análisis. El primer problema a resolver es la obtención de un objeto global mediante el "pegado" de datos locales, es decir, definidos sobre abiertos de $\mathbb{R}^m$ donde disponemos de Cálculo Diferencial e Integral. Posteriormente, el problema a resolver es la definición, cálculo ó estimación de invariantes, así como las relaciones entre dichos invariantes.

1.1.1. Variedades y cartas

Definición.- Una *variedad topológica* M es un espacio topológico Hausdorff con un recubrimiento $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ en el que cada punto tiene un entorno U_i homeomorfo via φ_i a $\mathbb{R}^m$ verificando que $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ es un homeomorfismo [8] entre

[8] Un homeomorfismo es una aplicación biyectiva y bicontinua.

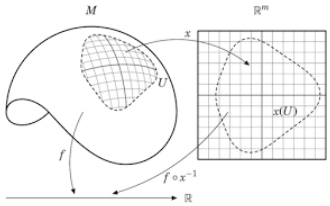

Fig. 1: Parametrización local mediante una aplicación diferenciable

$\varphi_i(U_i \cap U_j)$ y $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ para cada par $i, j \in I$.

A menudo, se identifica cada abierto U_i con su imagen $\varphi_i(U_i)$ vía el homeomorfismo φ_i. Esta identificación debe entenderse como un abuso de notación.

Definición.- Se llama *carta m-dimensional* de una variedad topológica M a cualquier aplicación *inyectiva* $\phi : U \to \mathbb{R}^m$, siendo $U \subset M$ un abierto del espacio topológico M, tal que la imagen $Im(\phi)$ es un *abierto* de $\mathbb{R}^m$ [9] .

Se denota mediante U al *dominio de la carta* ϕ. Las *funciones coordenadas de la carta* ϕ son las aplicaciones $p_i \circ \phi$ donde $p_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ denota la proyección de $\mathbb{R}^m$ sobre la i-ésima componente.

Frecuentemente se llaman "coordenadas locales" (y se denotan mediante $x^1, \ldots, x^m$ en el caso m-dimensional) a las funciones coordenadas. Esto es un abuso de notación. pues se está identificando las componentes de la carta con sus imágenes en $\mathbb{R}^m$. No obstante, para no complicar la notación se asume este abuso de notación.

Dado un dominio U de $\mathbb{R}^m$ no siempre existe una carta cuyo dominio sea el dado. Por ello, hay que agregar otras cartas que verifiquen ciertas "condiciones de compatibilidad"; más explícitamente, la restricción a la intersección de sus dominios de definición debe dar equivalencias en la categoría ambiente. Para precisar esta idea, se necesita la noción de C^r-equivalencia.

1.1.2. Aplicaciones y estructuras diferenciables

Definición.- Se dice que una aplicación f de un abierto $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es *de clase* C^r, con $1 \leq r \leq \infty$, si y sólo si f y sus derivadas parciales son continuas hasta orden r. Si $r = \infty$, decimos entonces que f es *suave* ó *diferenciable*.

Si el *dominio* de la aplicación no es un abierto de $\mathbb{R}^n$, hay que adaptar la noción anterior:

Definición.- Se dice que una *aplicación* $f : N \to \mathbb{R}^p$ es *de clase* C^r, con $1 \leq r \leq \infty$, si $\forall x \in N$, existe un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y una aplicación $\phi : U \to \mathbb{R}^p$ tales que ϕ coincide con f sobre $U \cap N$. Las C^r*-coordenadas locales* son las componentes de la aplicación f.

[9] Con esta definición es claro que la inversa ϕ^{-1} sólo está definida sobre $\phi(M)$ y que también es inyectiva

Estructura diferenciable.- Dada una variedad topológica M y un número entero $r \geq 0$, una *estructura diferenciable* o *atlas maximal* $\mathcal{A}$ de clase r sobre M es una familia $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de sistemas coordenados sobre M verificando:

- $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ es un recubrimiento de M, es decir, $\bigcup_{i \in I} U_i = M$
- Para cualquier para $i, j \in I$ el cambio de cartas $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ es diferenciable sobre $\varphi_i(U_i \cap U_j)$.
- El atlas $\mathcal{A}$ es maximal con respecto a la relación de orden dada por la inclusión para todas las familias de entornos coordenados sobre M verificando las condiciones anteriores.

El límite proyectivo proporciona una formulación abstracta (no constructiva) de la tercera condición. El fundamento de esta condición es el axioma de Zorn; para los constructivistas este axioma no se admite, lo cual dificulta la comparación entre diferentes estructuras. Para minimizar este tipo de problemas y facilitar la reducción al caso finito, habitualmente se supone que el espacio topológico soporte es *paracompacto*, es decir, cualquier recubrimiento $\mathcal{U}$ tiene un subrecubrimiento $\mathcal{U}'$ que es localmente finito.

Con la notación anterior, una C^r-*Variedad* de dimensión m y clase r está dada por el par $(M, \mathcal{A})$ formado por la variedad topológica m-dimensional M y la estructura $\mathcal{A}$ de clase r. Cuando $r = \infty$ decimos simplemente que es diferenciable, suave o lisa.

La clasificación de C^r-estructuras sobre una misma variedad topológica M es uno de los problemas centrales y más difíciles de la Topología. Para abordarlo es necesario proporcionar detalles adicionales.

1.1.3. C^r-equivalencias. Difeomorfismos

Definición.- Diremos que una aplicación $f : M \to N$ de clase C^r entre dos C^r-variedades, es una C^r-*equivalencia* si es biyectiva y la inversa f^{-1} es también de clase C^r. Los casos siguientes son los más importantes:

- *Topológico:* Una C^0-equivalencia es lo mismo que un *homeomorfismo*
- *Diferenciable* (también llamado suave o liso): Si $r = \infty$, llamamos *difeomorfismo* a una C^∞-equivalencia. En el caso global, si $f : M \to N$ es un difeomorfismo entre variedades decimos que M e N son *difeomorfas*. La *Geometría Diferencial* se ocupa del estudio de variedades diferenciables y sus clases de equivalencia módulo difeomorfismo.
- *Algebraico*: Si $r = alg$, llamamos *aplicación birracional* a una C^{alg}-equivalencia dada por una aplicación racional con inversa racional [10]. En el caso global, si $f : X \to Y$ es una equivalencia birracional entre variedades algebraicas

[10] Nótese que, aunque las variedades algebraicas están dadas localmente por la anulación de un número finito de polinomios, la inversa de un polinomio no es un polinomio.

decimos que X e Y son *birracionalmente equivalentes*. La *Geometría Algebraica* se ocupa del estudio de variedades diferenciables y sus clases de equivalencia módulo difeomorfismo.

- *Analítico* (también llamado holomorfo en el caso complejo): Si $r = \omega$, llamamos *bianalítica* a una equivalencia analítica, es decir, dada localmente por series convergentes con inversas convergentes. Cuando el cuerpo base es el complejo $\mathbb{C}$, la condición de ser analítica es equivalente a la de ser holomorfa [11]; inicialmente sólo se considera el caso complejo, en el que utilizaremos indistintamente la terminología analítica u holomorfa. En el caso global, si $f : X \to Y$ es una aplicación biholomorfa entre variedades analítica complejas decimos que X e Y son *biholomorfas*. La *Geometría Analítica* se ocupa del estudio de variedades analíticas y sus clases de equivalencia módulo aplicaciones bianalíticas.

Las transformaciones que tienen mejores propiedades son los difeomorfismos. Salvo en el caso $1D$, la construcción explícita de difeomorfismos globales es muy difícil. Por ello, nos restringimos habitualmente al caso local con los homeomorfismos o difeomorfismos locales como situaciones extremas.

Definición.- Diremos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un *homeomorfismo (resp. difeomorfismo) local en* $x \in \mathbb{R}^n$, si existe un entorno U de x tal que $f\mid_U$ es un homeomorfismo (resp. difeomorfismo) sobre $f(U)$. Diremos que f es un *homeomorfismo (resp. difeomorfismo) local* si lo es en cada punto de su dominio.

Construir homeomorfismos locales es muy fácil pues basta integrar campos vectoriales dadas localmente por EDO. En general, los difeomorfismos (mucho menos los homeomorfismos) no tienen por qué conservar la métrica, ni los ángulos, ni tampoco cualquier medida de área o de volumen ó cualquier funcional de energía (ver fig.2). Más adelante, se introducen diferente tipos de subgrupos (métricos, conformes, especiales ó simplécticos, respectivamente) que conservan dichas "cantidades geométricas", proporcionando "leyes de conservación" (en la terminología física) o integrales primeras (en la terminología matemática).

1.1.4. Ejemplos básicos

En algunos casos (excepcionales) basta con una sola carta para describir la estructura de la variedad. Esto ocurre por ejemplo en los casos siguientes (verifica las afirmaciones como ejercicio):

- Cualquier subespacio vectorial p-dimensional W de un espacio vectorial arbitrario V de dimensión m (donde $p \leq m$) sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una C^r-variedad. El grupo $Aut(V) = GL(n, \mathbb{K})$ de los automorfismos de V (representadas por matrices inversibles, es decir, $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ tales que $det(A) \neq 0$) proporciona las C^r-equivalencias de V como variedad. En particular, $Aut(W)$ proporciona C^r-equivalencias de W. Fijada una base

[11] Este resultado es no-trivial

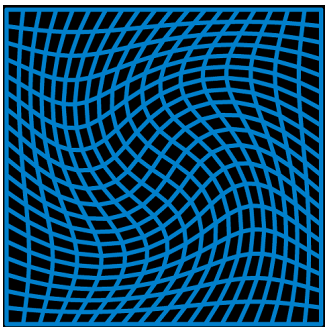

Fig. 2: Difeomorfismo de un cuadrado

de V, cualquier automorfismo está representado por una matriz regular (con determinante no-nulo).

- Cualquier espacio E de Banach es una C^r-variedad (ojo! con las aplicaciones globalmente definidas sobre el espacio que no tienen por qué ser necesariamente continuas).
- El grafo de una función (no necesariamente continua) $f : I \to \mathbb{R}$ donde $I =]a, b[$.
- El espacio complejo n-dimensional $\mathbb{C}^n$ es una C^r-variedad real $2n$-dimensional. En efecto, si $z^j = x^j + iy^j$ para $1 \leq j \leq n$, la asignación $(z^1, \ldots, z^n) \mapsto (x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n)$ correspondiente a la identificación natural $\mathbb{C}^n \simeq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2n}$ de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial es un difeomorfismo entre dos variedades reales de la misma dimensión. Por ello, $\mathbb{C}$ es una C^r-variedad diferenciable real 2-dimensional.
- Un cuaternión está dado por una expresión de la forma $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y verificando que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$, $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji}$, $\mathbf{ik} = -\mathbf{ki}$, $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj}$. Los cuaterniones $\mathbb{H}$ son isomorfos como $\mathbb{R}$-espacio vectorial a $\mathbb{R}^4$. Por ello, $\mathbb{H}$ es una C^r-variedad diferenciable real 4-dimensional. Una de las aplicaciones básicas de los cuaterniones consiste en proporcionar una representación vectorial para rotaciones en el espacio ordinario que permite evitar los errores de redondeo vinculados al uso de las funciones trigonométricas.

Ejemplo.- La parametrización usual de la circunferencia, dada por el ángulo polar $\theta \mapsto (sen\ \theta)\ , cos\ \theta)$ es un *difeomorfismo local*, pues la asignación dada

$$\phi; \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R} \ \mid \ (sen(2\pi\theta)\ , cos(2\pi\theta)) \ \mapsto \ \theta$$

define una carta sobre un abierto U. Sin embargo, no es una C^r-equivalencia, pues falla la inyectividad (compruébalo como ejercicio). Esta observación es

la clave para encontrar una diferencial no-nula sobre la circunferencia y, por tanto, para obtener un invariante diferencial que permite distinguir entre la recta (topológicamente contractible) y la circunferencia (no contractible).

Nótese que la recta no puede ser topológicamente equivalente a la circunferencia (aunque proporcione una parametrización local), pues la recta es simplemente conexa (contractible a un punto), mientras que la circunferencia sólo es conexa.

1.2. La noción de Dimensión

La dimensión topológica se describe intuitivamente como el "número de parámetros independientes". Esta noción intuitiva debe ser compatible con los cambios de carta. En esta subsección se formaliza esta noción y se demuestra que es un invariante topológico.

1.2.1. Dimensión topológica

Sea X un espacio topológico y U un abierto de trivialización en un punto $x \in X$ con $U \simeq \mathbb{R}^m$; en este caso, se dice que $dim_x(X) = m$.

Definición.- Sea M una variedad conexa. Llamamos *dimensión* de M a la dimensión topológica m del espacio U de la *carta* que usamos para dar la parametrización local de M. Si M tiene varias componentes conexas M_i para $i \in I$ con $\#I < \infty$, llamamos *dimensión de* M, y lo denotaremos como $m := dim(M)$, al máximo $max_{i \in I} dim(M_i)$ de las dimensiones de las componentes de M.

En adelante, trabajaremos con variedades de dimensión $m < \infty$; no obstante, esta restricción no es seria y puede llevarse a cabo un desarrollo similar para espacios de Banach de dimensión arbitraria razonando con la noción de *codimensión*. En particular, si un espacio m-dimensional M es subespacio de un espacio n-dimensional N, llamamos *codimensión de* M *en* N y lo representamos como $codim_N(M)$ a la diferencia de dimensiones $n - m$ [12]

Por el Teorema de la Función Implícita, la noción de dimensión para variedades de clase C^r con $r \geq 2$ es independiente del punto $\mathbf{p} \in M$ y de la carta que consideremos. De hecho, este resultado es puramente *topológico*, en virtud del resultado siguiente de la Topología General:

1.2.2. Teorema de la Invariancia del Dominio

Teorema.- Si $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un abierto y $f : U \to \mathbb{R}^m$ es inyectiva y continua, entonces la imagen $f(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ es un abierto; en particular, la aplicación f es abierta y por tanto, f es un homeomorfismo sobre su imagen $f(U)$ [13]

[12] Una vez que se muestra la noción de subvariedad, la noción de codimensión se extiende de forma obvia a subvariedades.

[13] Para la demostración ver Análisis II o bien Topología Algebraica I

1.2.3. Algunas consecuencias

- $\mathbb{R}^n$ *no es homeomorfo* a $\mathbb{R}^m$ para $n \neq m$; en particular, la noción de variedad topológica y de dimensión topológica de una variedad están bien definidas.
- La propiedad de ser un dominio (es decir, un abierto conexo) es *invariante por aplicaciones continuas e inyectivas*. Como la demostración de este resultado no es elemental en la categoría C^0, y trabajaremos siempre en la categoría C^r para $1 \leq r \leq \infty$, adoptaremos la demostración procedente del Análisis Diferencial de Varias Variables. En este caso es una consecuencia elemental del Teorema de las Funciones Implícitas; ver §1,2,7.
- Un espacio topológico *compacto* M no puede ser dotado de una estructura como C^r-variedad con *una sola carta*.

Ejercicio.- Verifica las afirmaciones precedentes.

1.2.4. Variedades puras

Un espacio topológico X puede tener k componentes conexas X_i para $1 \leq i \leq k$. Por ello, cualquier variedad M puede tener k componentes conexas M_i, eventualmente de diferente dimensión m_i. En este caso,

$$dim(M) \ = \ max\{m_i \ \mid \ 1 \leq i \leq k\}$$

Definición.- Se dice que M es una *variedad pura* si todas sus componentes conexas tienen la misma dimensión m.

En la práctica, se trabaja inicialmente con variedades conexas, que son automáticamente puras. Este es el caso más frecuente de la Geometría Algebraica, p.e.. Este enfoque se extiende asimismo a objetos geométricos "estratificados" en los que aparecen como adyacentes variedades de diferente dimensión [14].

Sin embargo, frecuentemente existen interacciones o restricciones procedentes de componentes de diferente dimensión. Un caso típico corresponde a variedades M con borde ∂M, en el que la proximidad al borde impone restricciones asociadas a fenómenos de propagación (incluyendo reflexiones, inestabilidades o turbulencias, p.e.) ó de interacción (incluyendo problemas de colisiones, p.e.)

1.3. Diferentes descripciones para objetos geométricos

En toda la subsección se supone que las funciones son de clase C^r, donde $r = alg$ (Geometría Algebraica), $r = \infty$ (Geometría Diferencial) ó $r = \omega$ (Geometría Analítica). Cualquier polinomio es de clase C^r para cualquier r; por ello, se puede aplicar cualquier tipo de técnicas (algebraicas, diferenciales ó analíticas) sobre objetos definidos por anulación de polinomios

[14] Estos tópicos se abordan en el módulo relativo a Estratificaciones en Topología Diferencial Global

Los objetos geométricos se pueden describir de diferentes formas en términos de C^r-funciones. Las descripciones más utilizadas son de tipo implícito, explícito o paramétrico. Las transformaciones entre diferentes descripciones no son elementales y se abordan en diferentes capítulos de este módulo.

1.3.1. Descripción implícita

Una *descripción implícita local* para una hipersuperficie m-dimensional M en $\mathbb{R}^{m+1}$ está dada por una expresión de la forma

$$f(x_0, \ldots, x_m) \;=\; 0$$

Una variedad de codimensión k está dada localmente por

$$f_1(x_0, \ldots, x_m) = 0 \;\; \ldots \;\; , f_k(x_0, \ldots, x_m) \;=\; 0$$

donde las $f_1, \ldots, f_k$ son funcionalmente independientes, es decir, sus diferenciales son linealmente independientes.

La descripción habitual de una esfera (ó de cualquier otra hipersuperficie cuádrica) es un ejemplo típico. Cualquier hipersuperficie se describe en términos de una única ecuación, pero este resultado no tiene por qué ser cierto para codimensión > 1. Un primer ejemplo está dado por la cúbica racional normal $\mathcal{C}_3$ en $\mathbb{P}^3$ que se describe de forma implícita como la intersección de las cuádricas asociadas a la anulación de los determinantes de los 2×2-menores de la matriz que representamos mediante

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}_2$$

que representan tres cuádricas Q_1, Q_2, Q_3 en $\mathbb{P}^3$. Por otro lado, $Q_i \cap Q_j = \mathcal{C}_3 \cup \ell_{ij}$ es la cúbica racional normal $\mathcal{C}_3$ y una recta ℓ_{ij} para $1 \leq i < j \leq 3$; es fácil comprobar que $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = \mathcal{C}_3$. Por ello, aunque localmente la cúbica racional normal esté dada por 2 ecuaciones funcionalmente independientes, en realidad hacen falta las tres ecuaciones para definir globalmente a la curva racional normal $\mathcal{C}_3$ de grado tres [15].

1.3.2. Descripción explícita

En ocasiones, es posible despejar una o más variables y expresarlas en términos de las demás. Un caso particularmente sencillo corresponde a funciones reales de una variable real que se escriben como $y = f(x)$. Esta expresión explícita se extiende de forma inmediata a hipersuperficies de la forma $x_m = f(x_1, \ldots, x_{m-1})$; el Teorema de la Función Inversa garantiza que se puede pasar de $g(x_0, \ldots, x_m) = 0$ a una expresión de este tipo cuando $\partial_{x_m} g \neq 0$.

La extensión de esta descripción a codimensión superior

[15] Para más detalles sobre propiedades relacionadas (variedades intersección completa vs determinantales), ver p.e. J.Harris ó D.Eisenbud

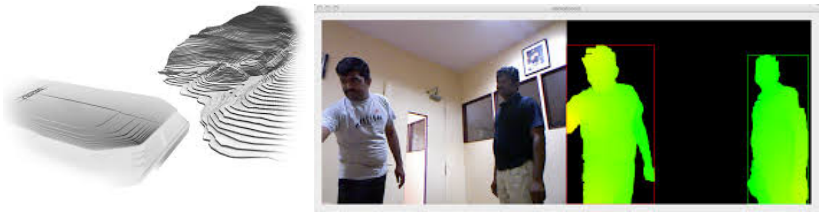

Fig. 3: Topografía local usando conjuntos de nivel. Mapa de profundidad

$$x_j = f_j(x_0, \ldots, x_k) \quad k+1 \leq j \leq m$$

requiere el Teorema de la Función Implícita que se presenta en el capítulo siguiente.

Algunos *ejemplos típicos* para la descripción explícita correspondiente al caso de hipersuperficies (codimensión 1) aparecen asociados a funciones escalares como la altura utilizada en Cartografía o bien la profundidad utilizada en Reconstrucción 3D de escenas; en este caso, las variedades resultantes se pueden visualizar como una superposición de conjuntos de nivel asociados a las imágenes recíprocas $f^{-1}(r)$ de los valores regulares para $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

1.3.3. Descripción paramétrica

La descripción mostrada en el apartado anterior se puede reinterpretar como una representación paramétrica, si se interpretan las variables $x_0, \ldots, x_{m-1}$ como los parámetros del sistema. Esta es la representación que utilizaremos con más frecuencia en este Curso y es la extensión natural de la representación local de superficies $z = f(x, y)$ en $\mathbb{R}^3$ utilizada en Geometría de Curvas y Superficies que se reescribe en forma paramétrica como

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad | \quad \varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

Ejercicio.- La esfera $\mathbb{S}^2$ de radio unidad se puede parametrizar en términos de coordenadas esféricas mediante

$$r(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi), \quad 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$$

que deja de estar unívocamente definida en los polos Norte y Sur en los cuales el azimut θ no se puede representar de forma unívoca.

Para conectar con la descripción implícita mostrada más arriba, recordemos que la curva racional de grado 3 está dada localmente por

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad | \quad \varphi(t) = (t, t^2, t^3)$$

Esta parametrización se reescribe en términos afines como

$$\varphi_a : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3 \quad | \quad \varphi(1,t) = (1,t,t^2,t^3)$$

cuya proyectivización da

$$\varphi_p : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3 \quad | \quad \varphi_p[t_0 : t_1] = (t_0^3 : t_0^2 t_1 : t_0 t_1^2 : t_1^3)$$

por lo que las coordenadas $[x_0] : x_1 : x_2 : x_3]$ del espacio de llegada verifican

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3}$$

que definen las 3 cuádricas descritas más arriba en términos de la anulación de los determinantes de los 2×2-menores la 2×3-matriz persimétrica

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}_2$$

Ejercicio.- Extender esta construcción a cualquier curva racional normal $\mathcal{C}_d$ de grado d dada por la anulación de todos los 2×2-menores la $2 \times d$-matriz persimétrica

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_d \end{pmatrix}_2$$

1.3.4. Relaciones entre descripciones

En general, las relaciones entre las descripciones presentadas en los apartados anteriores no son tan sencillas en el caso general. El paso de la representación paramétrica a una explícita requiere resolver sistemas de ecuaciones dados por

$$F(\underline{x}) = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}) = 0$$

que recibe el nombre de "discriminante" de F a lo largo de x_i. El discriminante de una proyección es el lugar de puntos en los que la aplicación proyección a lo largo de x_i no es regular, es decir, es tangente al objeto; en particular, el perfil (contorno aparente) o su proyección sobre un plano de imagen (silueta) corresponden al lugar singular de una proyección [16].

Por otro lado, el paso de la representación implícita a la paramétrica es siempre posible sólo en el caso analítico local, en el que se dispone del Teorema de Parametrización Local [17]. La imposibilidad de resolver este problema de forma global se debe a que "la mayor parte" de las variedades no son racionales, aunque sí puedan ser localmente parametrizables.

[16] Esta idea tan simple muestra que las singularidades están presentes en la vida diaria

[17] Ver p.e. Gunning: *Lectures on Local Parameterization Theorem*, Lect. Notes, Princeton Univ. Press

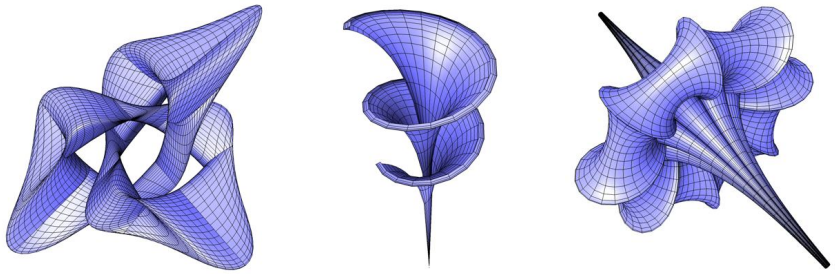

Fig. 4: Trébol triangulado, superficie de Dini, Respiradero (3d-meier)

No obstante, en muchas aplicaciones se lleva a cabo una aproximación de variedades arbitrarias por otras que son localmente racionales y parametrizables en términos de productos de curvas racionales a trozos (B-splines generalizados, NURBS) de amplio uso en toda clase de aplicaciones a Ingeniería. Dos estrategias básicas consisten en construir superficies aproximadas o bien en "pegar"trozos que pasen de forma exacta por los puntos de control. Más adelante volveremos sobre estas cuestiones.

Las *superficies de revolución* proporcionan un ejemplo de superficie que permite conectar la representación explícita $z = f(x)$ con $a \leq x \leq b$ con una representación paramétrica

$$r(u, \phi) \;=\; (u\cos\phi, u\sin\phi, f(u)), \quad a \leq u \leq b, 0 \leq \phi < 2\pi$$

Ejercicio.- Verifica que el cilindro circular recto de radio R en torno al eje Ox tiene la siguiente representación paramétrica:

$$r(x, \phi) \;=\; (x, R\cos\phi, R\sin\phi)\ .$$

En la asignatura de Curvas y Superficies en $\mathbb{R}^3$ se han mostrado diferentes métodos para construir variedades como superficies de traslación o de rotación a las que se puede extender fácilmente las estrategias presentadas en esta subsección [18]

Algunos ejemplos de superficies parametrizadas (extraídos del repositorio 3d-meier) se muestran en la fig.4

Nota-Ejercicio.- Una variedad puede ser localmente parametrizable y, sin embargo, no ser una variedad diferenciable. Verifica que curva nodal $y^2 = x^2+x^3$ se puede parametrizar mediante $\varphi(t+ = (t^2-1, t(t^2-1))$, pero tiene una singularidad en el origen $(0, 0)$, por lo que no puede ser una variedad suave. *Indicación:* Calcula la intersección con el haz de rectas $y = tx$ que pasa por el origen. Nótese que la curva nodal se puede descomponer en 3 trozos abiertos ("ramas")

[18] En http://www.3d-meier.de/tut3/Seite0.html se puede ver una gran cantidad de ejemplos de superficies parametrizadas

correspondientes a los valores $\mid t \mid < 1$, $t > 1$ y $t < -1$ (por tanto homeomorfos a la recta) que están "separados" por el origen, punto que pertenece a la adherencia de los 3 abiertos descritos. Esta idea contiene el germen de la noción de estratificación que se desarrolla en Geometría Algebraica y en Geometría Analítica.

1.4. Simetrías en espacios

Un *espacio isótropo* es un espacio que se comporta localmente de la misma forma en todas las direcciones. El comportamiento se puede describir en términos estáticos (mediante simetrías) ó dinámicos (mediante campos) ó topológicos (mediante caminos y sus clases), p.e.. La mayor parte de los espacios no son isótropos; se dice entonces que son *espacios anisótropos*: presentan irregularidades en la distribución de "cantidades" o en la evaluación de funcionales.

Por ello, la condición de isotropía debe entenderse como una simplificación inicial que facilita la formulación de resultados estructurales. La visualización de propiedades para los espacios isótropos es más sencilla cuando se cuenta con estructuras adicionales que pueden ser de tipo métrico, afín, conforme, etc. En esta subsección se consideran estructuras métricas adicionales que facilitan dicha visualización.

La visualización de condiciones de isotropía presenta pequeñas irregularidades debidas a la distribución discreta de la materia a detectar; por ello, se obtienen representaciones que se comportan de forma similar independientemente de la dirección de propagación y basta un único coeficiente para controlar el proceso de difusión. Por el contrario, cuando el material es anisótropo, la difusión depende de la dirección de propagación y es necesario introducir un "tensor de difusión" que se representa mediante una 3×3-matriz. Una simulación de la propagación en un plano con ruido se puede ver en la Fig.5

En esta subsección se presentan los modelos más básicos de objetos isótropos. Para simplificar se supone inicialmente que dichos objetos tienen una naturaleza continua o incluso diferenciable, que proporcionan soporte a modelos simplificados de fenómenos frecuentes en Física o en Ingeniería [19].

1.4.1. Espacios localmente euclídeos

Existe una gran número de propiedades geométricas, herramientas y construcciones para variedades que son independientes de la métrica. Sin embargo, la necesidad de comparar datos o de realizar procedimientos de optimización, p.e., requiere introducir criterios basados en métricas.

Los más sencillos son una extrapolación a variedades de propiedades métricas asociadas al espacio euclídeo m-dimensional $\mathbb{E}^m = (\mathbb{R}^m, ds^2)$, en el que la métrica se define como una "extensión infinitesimal" de la métrica euclídea del

[19] Los casos más interesantes corresponden a materiales discontinuas o incluso dispersos con una distribución muy irregular; estos tópicos son más avanzados y se presentan en fases avanzadas del CEViC (Curso de Especialista en Visión por Computador)

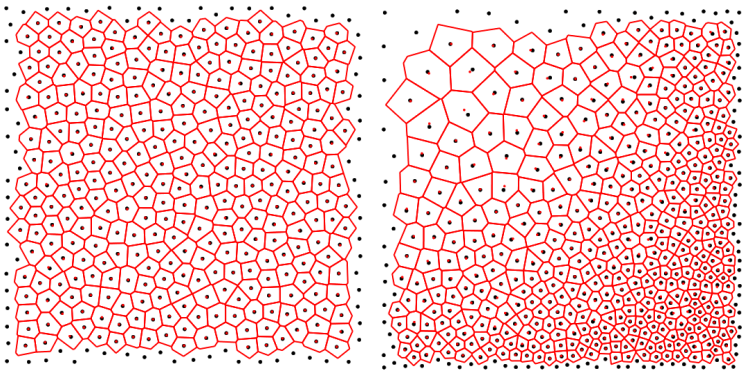

Fig. 5: Modelos simulados de difusión isótropa y anisótropa con ruido disperso

espacio cartesiano ordinario $\mathbb{R}^m$; es decir, la forma canónica de la métrica ds^2 está dada por

$$ds^2 \;=\; dx_1^2 + \ldots + dx_m^2$$

que extiende al caso infinitesimal la noción cartesiana de distancia como la diagonal de un paralelepípedo rectángulo. El estudio de las propiedades de variedades con estructura métrica inducida por "transformaciones isométricas" con el espacio euclídeo recibe el nombre de *Geometría Riemanniana*.

1.4.2. Espacios localmente hiperbólicos

Una variedad diferenciable no tiene por qué ser localmente equivalente a un espacio euclídeo. Dos geometrías alternativas son la esférica o la hiperbólica. El modelo básico para el espacio hiperbólico está dado por el hiperboloide de una hoja

$$\mathcal{H} \;=\; \{\underline{x} = (x_0, ..., x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \;\mid\; x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_m^2 = 1\}$$

En este modelo, las líneas (geodésicas) se obtienen como intersección $\mathcal{H} \cap H_{\underline{a}}$ del hiperboloide $\mathcal{H}$ con un hiperplano $H_{\underline{a}}$ que pasa por el origen en $\mathbb{R}^{m+1}$. En ocasiones y para distinguirlo del espacio cartesiano (con la métrica euclídea), en ocasiones se denota mediante $\mathbb{R}^{1,m}$.

Un *espacio localmente hiperbólico* es localmente equivalente a un espacio hiperbólico m-dimensional $\mathbb{H}^m = (\mathbb{R}^m, ds^2_{p,q})$, caracterizado por la condición de que dada una recta exterior ℓ, por cada punto $\mathbf{p} \notin \ell$ pasan (al menos) dos rectas que no cortan a ℓ [20].

[20] De hecho pasan infinitas rectas. Esta propiedad es contraria al Quinto Postulado de Euclides y marca una diferencial inicial crucial, aunque el espacio hiperbólico sea difeomorfo al espacio cartesiano

La forma canónica de la métrica $ds^2_{p,q}$ está dada por

$$ds^2 = \sum_{i=0}^{p} dx_i^2 - \sum_{i=p+1}^{m} dx_i^2$$

que corresponde a la forma canónica de una cuadrática de signatura (p, q). Si $q = 0$, se recupera la expresión correspondiente al caso euclídeo; para $(p, q) = (3, 1)$ se obtiene la métrica de Minkowski; en relatividad especial (Einstein) dicha métrica aparece cambiada de signo.

Un modelo alternativo del plano hiperbólico está dado por el *disco de Poincaré* $\mathbb{D}^2$. En dimensión arbitraria se obtiene como la imagen por la proyección estereográfica desde el polo Sur $\mathbf{S} = (-1, 0, \ldots, 0)^T$ sobre el hiperplano $x_0 = 0$ que a cada punto del hiperboloide $\mathbf{P} \in \mathcal{H}$ le asocia la intersección $\overline{\mathbf{SP}} \cap \{x_0 = 0\}$. La imagen por esta aplicación es la bola abierta

$$\mathbb{B}^{m+1} \ := \ \{(x_0, x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \ \mid \ x_0^2 + \ldots + x_m^2 < 1\}$$

donde el espacio sobre el que se proyecta corresponde al hiperplano $x_0 = 0$.

El estudio de las propiedades de variedades con estructura métrica inducida por "transformaciones isométricas" con el espacio hiperbólico de signatura (p, q) recibe el nombre de *Geometría Pseudo-Riemanniana*. La versión en términos locales de operadores diferenciales de orden 2 es dual de la expresión métrica; la versión del operador de Laplace para el caso $(1, 2)$ recibe el nombre de *operador de ondas* y fue introducido por D'Alembert a principios del s.XIX. Este operador tiene múltiples aplicaciones en todo tipo de procesos de propagación sobre medios continuos (rígidos o deformables).

1.4.3. Espacios homogéneos

Definición.- Un espacio X es *G-homogéneo* si existe una acción $\alpha : G \times X \to X$ libre y transitiva. Al resultado de la acción por este grupo se le llama una simetría. Si conserva la métrica, recibe el nombre de *isometría*.

Si X es un espacio G-homogéneo, para cada $x \in X$ se llama *estabilizador de* x al subgrupo

$$S_x \ := \ \{g \in G \ \mid \ g * x = x\}$$

es decir al conjunto de elementos del grupo que dejan fijo a $x \in X$. Con esta notación, cada punto $x \in X$ se describe como el cociente G/S_x. Recíprocamente, cualquier cociente G/H es un espacio G-homogéneo con un punto "privilegiado" o "distinguido" que corresponde a la clase del elemento neutro. Por consiguiente, cualquier espacio homogéneo es un cociente de grupos.

El *ejemplo más simple* de espacio homogéneo es el espacio cartesiano $\mathbb{R}^m$ que es G-homogéneo por la acción del grupo lineal general $G = GL(m; \mathbb{R}) = \{A \in M(m \times m; \mathbb{R}) \mid det(A) \neq 0\}$ que actúa por multiplicación a la izquierda. Algunos subgrupos importantes son

- El *grupo ortogonal* dado como $O(m) := \{A \in GL(m;\mathbb{R}) \mid {}^TA.A = I\}$.
- El *grupo especial* dado como $SL(m;\mathbb{R}) := \{A \in GL(m;\mathbb{R}) \mid det(A) = 1\}$
- El *grupo especial ortogonal* $SO(m;\mathbb{R}) := SL(m;\mathbb{R}) \cap O(m)$

A partir de estos subgrupos se construyen variedades como cocientes de grupos por subgrupos cerrados:

- *Espacio euclídeo* m-dimensional $\mathbb{E}^m = G_e^{m+1}/O(m+1)$ donde el grupo euclídeo G_e^{m+1} es el producto semidirecto del grupo especial ortogonal y el grupo de traslaciones, y $O(m+1)$ es el grupo ortogonal.
- *Esfera* m-dimensional $\mathbb{S}^m = O(m+1)/O(m)$ con la variante correspondiente a la *esfera orientada* que se obtiene como cociente reemplazando el grupo ortogonal por el especial ortogonal.
- *Espacio hiperbólico* m-dimensional $\mathbb{H}^m = O^+(1,m)/O(m)$ con la variante correspondiente al *espacio hiperbólico orientado* que se obtiene como cociente reemplazando el grupo ortogonal por el especial ortogonal.

Como veremos en el módulo 2, todos los grupos mencionados son grupos de Lie, es decir, grupos con estructura de variedad diferenciable. Por otro lado, en todos los casos mencionados, el denominador es un subgrupo cerrado H, pero *no es un subgrupo normal*. Por ello, el cociente G/H de grupos tiene estructura de espacio topológico, pero no de grupo.

Inicialmente, consideramos la estructura de G/H como espacio topológico [21]. Sobre cada espacio topológico se superpone una estructura como C^r-variedad que puede proceder del pegado de cartas o de propiedades globales de funciones definidas sobre el espacio ambiente (ver capítulo 5 del módulo 2 para más detalles).

Ejercicio.- Calcula la dimensión de los grupos citados más arriba y verifica que la dimensión del espacio euclídeo, la esfera o el espacio hiperbólico es la diferencia de dimensiones de grupos para la expresión de la variedad como cociente G/H de grupos.

1.4.4. Ejemplo: Grassmannianas

El espacio proyectivo real n-dimensional $\mathbb{P}^n$ es un espacio homogéneo por la acción del grupo $\mathbb{P}GL(n+1;\mathbb{R}) := GL(n+1;\mathbb{R})/\mathbb{R}^*$ (comprúebalo como ejercicio). La selección consecutiva de un hiperplano del infinito como complementario a cada copia afín permite obtener una "descomposición celular" (cada célula es homeomorfa a un espacio cartesiano) que escribimos como

[21] Los abiertos V del cociente están caracterizados por la condición de ser saturados (por la relación de equivalencia asociada a la conjugación por H) y la condición $\pi^{-1}(V)$ abierto en G

$$\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1} \simeq \mathbb{A}^n \cup \mathbb{A}^{n-1} \cup \mathbb{P}^{n-2} \simeq \ldots \simeq \mathbb{A}^n \cup \mathbb{A}^{n-1} \cup \ldots \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^0$$

Estamos interesados en extender esta descripción "celular" a la variedad que parametriza los subespacios de dimensión fija k de un espacio proyectivo n-dimensional $\mathbb{P}^n$ que corresponden a la proyectivización de subespacios $k+1$-dimensionales de un espacio vectorial $n+1$-dimensional. La Grassmanniana $Grass(k+1, n+1)$ es la variedad que representa dichos subespacios.

La *descripción topológica global* de la Grassmanniana es muy simple, pues el subgrupo de isotropía que deja invariante L^k está dado por $GL(k+1;\mathbb{R}) \times GL(n-k;\mathbb{R})$. Como $GL(n+1;\mathbb{R})$ actúa de forma libre y transitiva sobre el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$, induce una acción libre y transitiva sobre los subespacios que permite expresar la grassmanniana como espacio homogéneo, es decir, como cociente de grupos:

$$Grass(k+1, n+1) \;=\; GL(n+1;\mathbb{R})/[GL(k+1;\mathbb{R}) \times GL(n-k;\mathbb{R})]$$

que se reduce a

$$O(n{+}1;\mathbb{R})/[O(k{+}1;\mathbb{R}){\times}O(n{-}k;\mathbb{R})] \quad \text{o} \quad SO(n{+}1;\mathbb{R})/[SO(k{+}1;\mathbb{R}){\times}SO(n{-}k;\mathbb{R})]$$

para grassmannianas correspondientes a subespacios generados por vectores ortogonales o bien ortonormales (obtenidas mediante Gram-Schmid, p.e.). Este argumento permite dotar a la grassmanniana de estructura de variedad topológica. La estructura como variedad diferenciable se puede ver de diferentes formas. Una especialmente simple e ilustrativa para diferentes aplicaciones consiste en describirla como variedad algebraica que se obtiene como intersección no-singular de cuádricas [22].

Para fijar ideas, se considera inicilmanete el caso $Grass(2,4)$ de subespacios 2-dimensionales L^2 en un espacio vectorial 4-dimensional real V. El proyectivizado de cada subpesacio L^2 da una recta $\ell := \mathbb{P}(L^2)$ contenida en el espacio proyectivo 3-dimensional $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V) := (V - \{0\})/\mathbb{R}^*$. Fijadas referencias, cada recta $\ell = \overline{\mathbf{ab}}$ que pasa por dos puntos $\mathbf{a} = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3]$ y $\mathbf{b} = [b_0 : b_1 : b_2 : b_3]$ se describe mediante

$$\ell \;=\; \mathbf{a} \times \mathbf{b} \;=\; \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}_2$$

donde el subíndice 2 que aparece en la matriz denota el conjunto de los 6 determinantes de los 2×2-menores de la matriz de los coeficientes que denotamos mediante

$$p_{ij} \;=\; det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} \;=\; a_i b_j - a_j b_i \quad \text{para} \quad 0 \le i < j \le 3$$

[22] Para más detalles ver el Curso de Geometría Algebraica

que representtan las 6 *coordenadas de Pluecker* de la recta ℓ y que están definidas salvo factor de proporcionalidad, por lo que representan un elemento de $\mathbb{P}^5$. La pregunta inmediata es si todos los puntos de $\mathbb{P}^5$ representan rectas ℓ de $\mathbb{P}^3$. La respuesta es negativa, pero para ello es necesario identificar qué condición debe verificar una recta $\ell \subset \mathbb{P}^3$ para representar representar un punto de $\mathbb{P}^5$. Para resolver este problema calculamos la condición para que dos rectas ℓ, ℓ' contenidas en $\mathbb{P}^3$ tengan intersección no-vacía y "especializamos" una de dichas rectas para que coincida con la otra. Es fácil ver que

$$\ell \cap \ell' \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_0 & b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{pmatrix} \;=\; 0$$

donde $\ell' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}'$ Desarrollando por los determinantes de tamaño 2×2 se obtiene una relación algebraica

$$p_{01}p'_{23} - p_{02}p'_{13} + p_{03}p'_{12} + p_{12}p'_{03} - p_{13}p'_{02} + p_{23}p'_{01} = 0$$

que por especialización (cuando $\ell = \ell'$) proporciona la relación cuadrática [23]:

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} \;=\; 0$$

El recíproco se demuestra de forma análoga; por ello, el conjunto de rectas ℓ de $\mathbb{P}^3$ está representado algebraicamente por una cuádrica en $\mathbb{P}^5$:

$$Q^4_K \;=\; \{[p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}] \;\mid\; p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0\}$$

a la que se llama *cuádrica de Klein* que es un hiperboloide regular 4-dimensional (reglado por 2-planos) en $\mathbb{P}^5$.

Desde el punto de vista local, es posible elegir coordenadas locales de modo que el primer determinante en el orden lexicográfico correspondiente a la coordenada de Pluecker p_{01} sea no-nulo. Con esta elección, dividiendo todas las coordenadas proyectivas entre p_{01}, se obtiene una representación analítica local en el entorno de dicho punto mediante los determinantes de los 2×2-menores de una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}_2$$

donde los elementos $*$ representan elementos de $\mathbb{R}$ ó con más generalidad de cualquier cuerpo $\mathbb{K}$. Esta representación coordenada local muestra además la "libertad" de los 4 parámetros locales en el entorno $D^+(p_{01})$ del punto con $p_{01} \neq 0$.

Esta descripción se extiende a la grassmanniana $Gras(k+1, n+1)$ de subespacios $(k+1)$-dimensionales de V^{n+1} reemplazando la (2×2)-matriz por una

[23] suponemos que el cuerpo base tiene característica $p \neq 2$

$(k+1)\times(k+1)$-matriz con determinante no-nulo que podemos suponer igual a la identidad; la $(k+1)\times(n-k)$-caja complementaria representa las coordenadas locales de la grasmmanniana para un pequeño entorno $D^+(p_{01\ldots k})$ del punto que representa el subespacio $(k+1)$-dimensional E^{k+1}; en particular, la dimensión de la Grassmanniana es el número $(k+1)(n-k)$ de párametros que aparecen en la expresión local de dicha matriz genérica.

Volviendo al ejemplo de las rectas en $\mathbb{P}^3$, de forma análoga a como se mostró antes para el espacio proyectivo, es posible dar una descomposición de la Grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^3$ por su "posición relativa" en relación con una colección de subespacios encajados prefijada $p_0 \in \ell_0 \subset \pi_0 \subset \mathbb{P}^3$ a la que se llama una *bandera completa*. El número de condiciones lineales que se impone a la recta (en relación con la bandera prefijada) es la codimensión del "ciclo" que representa las rectas que verifican dicha condición. Así se tiene:

1. Codimensión 0 correspondiente a $\ell \subset \mathbb{P}^3$ no impone ninguna condición adicional, por lo que representa toda la cuádrica de Klein Q_K que se representa mediante $\sigma_{0,0}$
2. Codimensión 1 correspondiente a $\ell \cap \ell_0 \neq \emptyset$ que impone una condición lineal (razonarlo sobre la condición para que dos rectas se corten, fijando una de ellas). Por ello, es una sección hiperplana de Q_K que se representa mediante $\sigma_{1,0}$
3. Codimensión 2 que da lugar a dos casos
   - $\ell \subset \pi_0$ que representa el plano proyectivo dual de π_0 que es isomorfo a $\mathbb{P}^2$ que se representa mediante $\sigma_{1,1}$
   - $p_0 \in \ell$ que representa la "estrella" de rectas que pasan por p_0 que es isomorfo a $\mathbb{P}^2$ y se representa mediante $\sigma_{2,0}$
4. Codimensión 3 correspondiente a las condiciones $p_0 \in \ell \subset \pi_0$ que es isomorfo a una recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ contenida en π_0 y se representa mediante $\sigma_{1,2}$
5. Codimensión 4 correspondiente a la condición $\ell = \ell_0$ (punto en el proyectivo).

La descomposición celular en el proyectivo está dada por el complementario de una sección hiperplana en cada subespacio lineal que es un espacio afín homeomorfo a una célula dada por un espacio cartesiano. Análogamente, el complementario de cada ciclo de Schubert $\sigma_{i,j}$ en el ciclo en el que está contenido proporciona una célula correspondiente a un espacio afín que se replica rellenando todo el espacio cuando se cambian la bandera completa inicial $p_0 \in \ell_0 \subset \pi_0 \subset \mathbb{P}^3$.

Esta construcción se extiende de forma natural a la grassmanniana $Gras(k+1, n+1)$ de subespacios lineales $(k+1)$-dimensionales de una espacio vectorial $(n+1)$-dimensional y su correspondiente versión proyectiva, si bien la descripción como variedad algebraica o analítica es algo más complicada.

Estas descripciones tienen gran número de aplicaciones en Matemáticas, pues las grassmannianas tienen "propiedades universales" relativas a la factorización de morfismos en relación con el comportamientos de los espacios tangentes a cualquier variedad [24]

A mayores, esta descomposición tiene múltiples aplicaciones en Ã"ptica Geométrica (geometría de los rayos de luz, renderización) ó Física Teórica (electromagnetismo, espacios twistor de Penrose), Ingeniería (en relación con Robótica y Reconstrucción 3D, p.e.) ó Teoría Económica (identificación de regiones de estabilidad para mercados bajo información incompleta, p.e.)

1.4.5. Espacios localmente simétricos

Los espacios homogéneos son modelos muy simplificados de objetos más realistas; así p.e. cualquier modelo cosmológico realista supone que el soporte es sólo localmente homogéneo, es decir, se obtiene como "pegado de células" de diferentes dimensiones. Este argumento extiende de manera natural los procedimientos descritos más arriba (para la esfera, el espacio proyectivo o las grassmannianas, p.e.) dando lugar a una representación geométrica de objetos como "complejos celulares". La descripción más simple de dichos complejos se obtiene a partir de valores críticos de funciones (o con más generalidad funcionales) definidos sobre una variedad (o con más generalidad un espacio topológico).

Una primera aproximación a objetos complejos eventualmente singulares consiste en construirlos mediante "pegado estratificado". En el caso más favorable, los trozos a pegar son espacios G-homogéneos por la acción de un grupo G ó con más generalidad de espacio generados por *simetrías locales*. Este tipo de espacios recibe el nombre de espacios localmente simétricos y son cruciales para representar una gran cantidad de fenómenos en Física e Ingeniería.

Las *simetrías locales* se generan en Geometría Diferencial mediante la integración de campos vectoriales. Las simetrías que conservan la métrica reciben el nombre de isometrías y son cruciales para gran cantidad de aplicaciones. Un caso "particularmente importante" concierne a las *geodésicas* (curvas que minimizan la métrica sobre una variedad) que facilitan el "transporte paralelo" de "cantidades geométricas" (tensores). La clasificación de los espacios localmente simétricos se realiza en términos de la clasificación de grupos de Lie ó de su linealización dada por álgebras de Lie [25].

En la Fig.6 [26] se muestra una representación bastante sofisticada que ilustra el carácter localmente simétrico de objetos complejos a partir del comportamiento de curvas de nivel, como curvas integrales del campos gradiente.

[24] La aplicación de Gauss que a cada punto de una variedad k-dimensional en un n-espacio le lleva en su espacio tangente tiene como espacio de llegada una Grassmanniana de K-espacios. Por ello, esta aplicación permite "clasificar" los datos relativos a la geometría de los espacios tangente. Más adelante volvemos sobre esta cuestión

[25] Una aproximación más sistemática de estos tópicos se lleva a cabo en el capítulo 5 del módulo 2

[26] tomada de $http://madeincalifornia.blogspot.com.es/2011_08_01_archive.html$

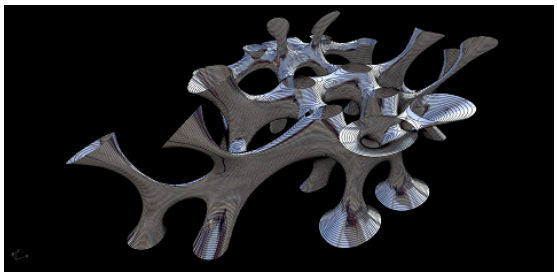

Fig. 6: Representación localmente simétrica de un objeto complejo

2. Atlas sobre una variedad

Intuitivamente, un atlas $\mathcal{A}$ sobre una C^r-variedad M es una colección de cartas (U_i, ϕ_i) donde los dominios U_i recubren M y las aplicaciones ϕ_i verifican condiciones de compatibilidad sobre (la imagen de) las intersecciones.

2.1. Noción de variedad topológica

Denotemos mediante (ϕ, U) y (ψ, V) dos cartas con $U \cap V \neq \emptyset$ dadas sobre un espacio topológico X. La aplicación $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ es una C^0-equivalencia entre U y $\phi(U)$; análogamente, La aplicación $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ es una C^0-equivalencia entre V y $\psi(V)$. Si nos restringimos a las imágenes de $U \cap V$ se obtiene una C^0-equivalencia

$$\psi \circ \phi^{-1} \mid_{\phi(U \cap V)} :\ \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

entre dos abiertos de $\mathbb{R}^m$. En este caso, no es necesario imponer restricciones adicionales a las propias de X como espacio topológico para obtener una C^0-compatibilidad entre los datos locales asociados a las cartas. En el caso C^r para $r \geq 1$ debemos incorporar restricciones adicionales para garantizar la compatibilidad entre los datos locales.

2.1.1. Parametrización local

A la inversa f^{-1} de una C^r-equivalencia local se le llama una C^r-parametrización. La más frecuente es de tipo cartesiano, es decir, con sistemas coordenados rectangulares. Otras parametrizaciones muy frecuentes utilizan coordenadas esféricas, cilíndricas ó cónicas [27].

Ejercicio.- Muestra una parametrización por funciones circulares (resp. hiperbólicas) y por funciones racionales de la circunferencia y de la hipérbola.

[27] Ver http://www.3d-meier.de/tut3/Seite0.html para una gran cantidad de ejemplos de superficies parametrizadas

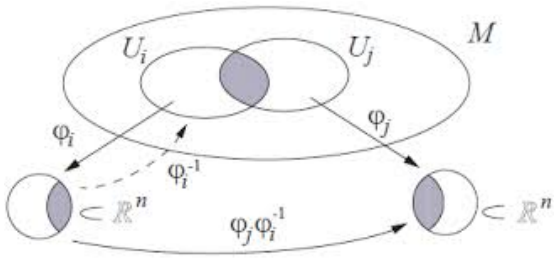

Fig. 7: Trivialidad local para una variedad

2.1.2. Compatibilidad entre cambios de carta

La noción de función continua $f : M \to \mathbb{R}$ tiene sentido globalmente, pero no necesariamente la noción de función diferenciable. En efecto, dadas dos cartas (ϕ, U) y (ψ, V) con $U \cap V \neq \emptyset$, no tiene por qué ocurrir que $f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sea una función diferenciable. Si consideramos cambios de coordenadas entre dichos pares, como

$$(f \circ \psi^{-1}) = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1}) \ ,$$

aunque las $f \circ \phi^{-1}$ sean diferenciables, los segundos miembros no tienen por qué serlo. Por ello, debemos añadir que los cambios de coordenadas $\phi \circ \psi^{-1}$ den lugar a C^r-equivalencias donde $0 \leq r \leq \infty$. En este caso, diremos que los pares (ϕ, U) y (ψ, V) son *C^r-compatibles* ó *C^r-admisibles*.

Llamamos *atlas de una C^r-variedad M* a una familia $\mathcal{A}_M$ de pares (ϕ, U) donde las ϕ son C^r-equivalencias cuyos dominios recubren M. La unión de dos atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) \ \mid \ \alpha \in A\}$ y $\mathcal{A}' = \{(U_\beta, \phi_\beta) \ \mid \ \beta \in B\}$ no tiene por qué ser un atlas, pues las restricciones de las cartas correspondientes a dos abiertos coordenados de ambos atlas no tiene por qué dar una C^r-equivalencia. Por ello, necesitamos introducir una *relación de C^r-equivalencia* sobre el conjunto de atlas dados sobre una variedad:

$$\mathcal{A} \sim_{C^r} \mathcal{A}' \ \Leftrightarrow \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \mid_{(U_\alpha \cap U_\beta)} \text{ es una } C^r\text{-equivalencia} \ .$$

2.2. Noción de variedad de clase r

Las variedades de clase C^r se construyen "pegando" datos locales de clase C^r dados por pares (ϕ, U), donde U es (C^r-equivalente a) un abierto de R^m y ϕ es una C^r-equivalencia. Sobre la intersección $U \cap V$ identificamos los datos *locales* mediante $C^r - equivalencias$ y obtenemos objetos *globales*. Más formalmente, la noción de C^r-variedad se construye a partir de la *compatibilidad* entre C^r-parametrizaciones:

2.2.1. Variedad de clase r

Definición.- Diremos que N es una C^r-*variedad*, si para cada punto $x \in N$ existe una C^r-*carta* (ϕ, U), tal que para cualquier otra carta C^r-carta (ψ, V), con $x \in V$, se tiene que la composición $\psi \circ \phi^{-1} \mid_{U \cap V}$ es una C^r-equivalencia entre $\phi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$.

Ejemplos.- 1) La parte no-singular de cualquier variedad definida por polinomios algebraicos es de clase C^r. 2) Cualquier variedad definida por funciones trascendentes (circulares, hiperbólicas, exponenciales, logarítmicas, etc) es de clase C^∞ y por tanto de clase C^r para cualquier $r \geq 0$.

2.2.2. Noción de subvariedad

Definición.- Dadas dos C^r-variedades N, P, diremos que P es una C^r-*subvariedad de* N si $P \subset N$ y la restricción de la C^r-estructura de N a P da la estructura de P como C^r-variedad.

Nota.- Una subvariedad topológica puede admitir diferentes estructuras como C^r-variedad. Un caso extremo muy significativo es la esfera $\mathbb{S}^7$ que admite 28 estructuras diferenciables no equivalentes entre sí. [28]

Existen múltiples formas de generar subvariedades. Los criterios más útiles son de tipo global y se expresan mediante diferentes extensiones del Teorema de la Función Inversa.

Nota.- Un subconjunto de una C^r-variedad en general no es una subvariedad, incluso aunque admitan una parametrización sin excepciones; ello puede deberse a diferentes circunstancias como p.e. la de ser singular (curvas nodales o cuspidales, en el plano) ó bien a presentar "patologías en el infinito" (curvas de Peano, Sierpinski, fractales, etc). Es necesario añadir condiciones adicionales que se presentan en el capítulo 3 de este módulo. El apartado siguiente da un poco más de forma a estos argumentos.

2.2.3. Observaciones

- Si $W \subset dom(\phi)$ es un subconjunto de N tal que $\phi \mid_W$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ para cualquier carta (U, ϕ) de un atlas $\mathcal{A}$ sobre N, entonces $\phi \mid_W$ es una carta sobre N. Por ello, si podemos recubrir el subespacio topológico P de N por una colección de abiertos W del tipo anterior verificando las condiciones usuales de C^r-compatibilidad, obtenemos una C^r-estructura sobre P inducida por la de N. En este caso, decimos que P es una C^r-subvariedad de N.

- Dada una C^r-variedad topológica, la familia de los dominios coordenados correspondientes a las cartas de la C^r-estructura forman una base para

[28] Este resultado es altamente no-trivial (Milnor, 1968) y se comenta con más detalle en el módulo de Topología Diferencial que trata sobre clases características

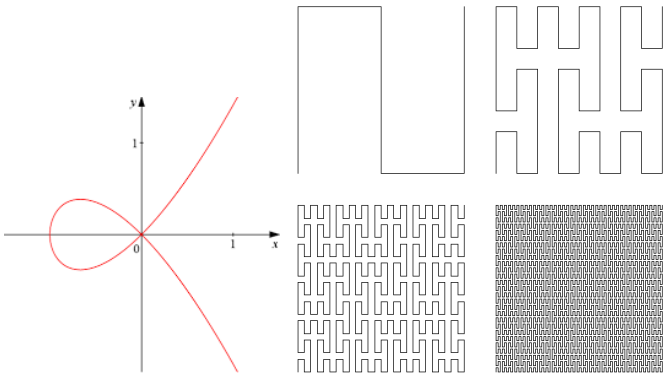

Fig. 8: La curva nodal o la curva de Peano no son variedades suaves en el plano

la topología original de N. Por ello, no distinguiremos entre la estructura original como espacio topológico y la estructura como C^r-variedad y tomaremos como abiertos para la topología de N a los dominios U de un sistema cartas coordenadas $(U, \phi_U) \in \mathcal{A}_M$ dado sobre N, a los que llamaremos *dominios coordenados*.

- De una forma más estricta, deberíamos mostrar las condiciones bajo las cuales la topología del espacio topológico de partida coincide con la inducida por la estructura de N como C^r-variedad. Pero este resultado es una consecuencia de la condición de C^r-equivalencia para las composiciones $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ sobre $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ (lo cual justifica a posteriori el orden constructivo seguido en la exposición).

2.2.4. Una extensión de la noción de subvariedad

Es posible definir una noción más general de C^r-variedad sin introducir la condición de Hausdorff. En efecto, la comparación de la topología original con la topología inducida por las cartas, muestra que M dotado con la topología inducida por las cartas es un espacio localmente conexo, verifica la primera condición de separación (el axioma T_1 de separación en topología conjuntista) y el primer axioma de numerabilidad.

Sin embargo, no hemos considerado esta mayor generalidad, pues si el espacio soporte no es Hausdorff, es posible definir sobre un mismo soporte dos estructuras de C^r-variedades que no son C^r-equivalentes. Por ejemplo, si no imponemos la condición Hausdorff, podemos dotar a la circunferencia $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ como subvariedad del plano de una C^r-estructura no equivalente a la usual.

En efecto, basta considerar una aplicación inyectiva $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = x \ \forall x \notin Q$ y por $\psi(x)$ dado por el siguiente número racional a p/q

según la ordenación diagonal de Cantor (donde hemos suprimido todos los racionales reducibles). La composición de ψ con la carta $\phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ dada por $(cos2\pi t, sen2\pi t) \mapsto t$ daría en este caso una estructura de C^r-variedad que no es C^r-equivalente a la que hemos descrito.

Por ello, en esta primera presentación preferimos evitar las posibles patologías, aun a costa de perder una mayor generalidad, que sólo sería justificable para abordar problemas topológicos más generales.

2.3. El problema del pegado

En la presentación desarrollada en estas notas insistiremos sobre todo en los "aspectos constructivos" de las variedades, aspectos que serán desarrollados "pegando datos locales". Es importante destacar que, a pesar de su frecuente utilización, no hay procedimientos universales de "pegado" y la construcción de objetos globales a partir de datos locales compatibles debe realizarse de forma explícita en cada caso.

La Topología General se ocupa de las relaciones entre las propiedades de M como espacio topológico y sus propiedades como C^r-variedad. Las "particiones de la unidad" (ver §1,5) proporcionan una aproximación general al problema que, lamentablemente, no es constructiva y por tanto no es computacionalmente implementable.

2.3.1. Pegado directo

El paso de datos locales a objetos globales es una de las características esenciales de la C^r-Topología y será utilizado frecuentemente a lo largo de toda la asignatura. En el caso *suave* (es decir, $r = \infty$), la herramienta usual para compatibilizar estos datos locales está basada en las *particiones de la unidad* que utilizaremos en el capítulo de integración de formas sobre variedades. Gracias al Cálculo Tensorial (módulo 3 de la asignatura) podemos reconocer cuándo un objeto (descrito localmente mediante ecuaciones) es *geométrico*, es decir, no depende del sistema coordenado elegido (su expresión local es independiente de la carta elegida).

La construcción de objetos geométricos "lisos a trozos" (PS ó piecewise smooth) es uno de los tópicos más importantes en el desarrollo de las Matemáticas en relación con la Física y la Ingeniería. Los PS-modelos proporcionan una extensión de los PL-modelos (piecewise linear ó lineales a trozos) que se estudian en Topología Algebraica ó en Elementos Finitos y para programas numéricos ó simbólicos presentan un menor coste computacional que los PL-modelos.

Una ventaja importante de los PS-modelos radica en la posibilidad de llevar a cabo procesos de optimización que son impracticables en los PL-modelos.

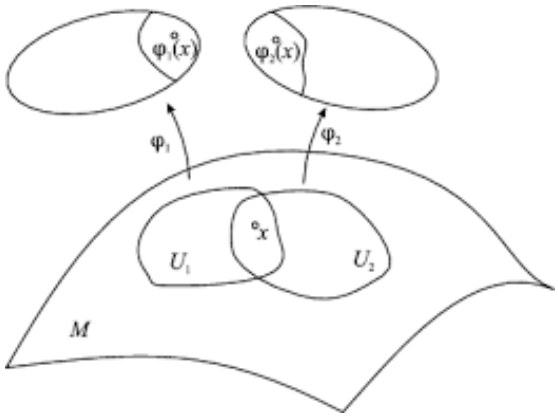

Fig. 9: Pegando datos locales para construir una variedad

2.3.2. Pegado inverso

El pegado inverso tiene en cuenta la expresión para la inversa φ_i^{-1} de la aplicación que da la trivialización local de U_i sobre su imagen $\varphi_i(U_i)$ en $\mathbb{R}^m$. Dicha inversa recibe el nombre de *parametrización local* y ha sido desarrollada con detalle en la Geometría de Curvas y Superficies en $\mathbb{R}^3$

El argumento de pegado se extiende asimismo a (inversas de) proyecciones [29]. La proyección global más sencilla desde el punto de vista matemático corresponde a la proyección estereográfica

$$\pi_N : \mathbb{S}^2 \ \rightarrow \ T_S\mathbb{S}^2$$

de la esfera de radio unidad $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^{2\text{`}} + z^2 = 1\}$ desde el polo norte $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$ sobre el plano tangente $T_S\mathbb{S}^2$ en el polo Sur $\mathbf{N} = (0, 0, -1)$ (en ocasiones se reemplaza dicha proyección por la proyección sobre el plano del ecuador. Las proyecciones básicas (esférica, cilíndrica, cónica) son proyectivamente equivalentes, si bien la distorsión métrica es completamente diferente en cada caso. En cada caso, la distorsión proporcionada por los mapas planos debe ser corregida para cualquier tipo de navegación marítima sobre la esfera o la navegación aérea sobre esferas concéntricas a la esfera terrestre.

La proyección estereográfica es la menos utilizada para aplicaciones geográficas debido a las distorsiones que genera. A pesar de las deformaciones, la proyección estereográfica conserva los ángulos; ello facilita representaciones cartográficas que "conservan las apariencias" al menos desde el punto de vista local. El carácter conforme de esta proyección facilitan una expresión muy simple [30]

[29] Este caso motiva un gran número de desarrollos de Geometría que tienen lugar desde el s.XVI hasta bien entrado el s.XIX en relación con representaciones cartográficas y se aborda con más detalle en el Apéndice dedicado a aplicaciones

[30] Ver animación en https://www.youtube.com/watch?v=LH5QGtEZeWM&feature=youtu.be

2.3.3. Pegado bajo información incompleta

En la práctica, es frecuente contar con datos incompletos o irregularmente distribuidos a los que debemos asociar trozos de curvas o de superficies. Para simplificar, se supone que los trozos de variedades a ser pegadas son algebraicas (dadas localmente por polinomios) del mismo grado. Una interpolación lineal proporciona una familia como primera inicialización al problema del pegado.

Supongamos que se dispone de información "completa" sobre una colección de k datos linealmente independientes y su evolución espacio-temporal dentro de un espacio n-dimensional. En este caso, se puede asociar un subespacio k-dimensional $L^k(t) \subset \mathbb{R}^n$ a cada colección de datos conocidos y tratar de inferir información global a partir de la evolución temporal de $L^k(t)$ [31]. Cada subespacio k-dimensional $L^k(t)$ representa un punto en una grassmanniana de k-planos en un n-espacio. Interesa describir la dinámica asociada a condiciones de equilibrio (o al menos estabilidad) para la evolución de estos subespacios k-dimensionales; el problema no es elemental, pues es preciso tener en cuenta que las grassmannianas son variedades no-lineales y resolver las EDO no-lineales que describen localmente dinámicas "genéricas" [32]

La mayor dificultad concierne al caso en el que se dispone de trozos de superficies (llamados "parches"), pero hay "agujeros" entre los trozos que deben ser "pegados". Este problema es muy frecuente en el caso de la Visión Estéreo, p.e., o en la recuperación de información a partir de secuencias de vídeo; en este último caso, la falta de resolución temporal (baja tasa de captura o de muestreo) da lugar a una falta de información geométrica que es necesario recuperar utilizando operadores de propagación entre los "parches" [33].

2.3.4. Algunas aplicaciones recientes

Las aplicaciones más recientes de los PS-modelos incluyen tópicos relacionados con las Tecnologías de la Información (Sistemas de Información Geográficos, Robótica, Visión Computacional, etc) y algunas de ellas se mostrarán en apéndices de estas notas; en mis notas de Geometría Computacional y de Visión Computacional se muestra con más detalle la construcción de PS-modelos y el diseño de algoritmos para su implementación computacional.

En ocasiones, la falta de diferenciabilidad (ó incluso de continuidad para una propiedad ó un atributo) para los PS-objetos se presenta en el "borde" de regiones R_α; algunos ejemplos significativos son

- la segmentación de una imagen digital que consiste en una descomposición en unión disjunta de regiones en las que la "variación del color" está por debajo de un umbral;

[31] Este problema es muy común en Teoría Económica, p.e.

[32] Las ecuaciones tipo Riccatti para matrices proporcionan un marco "suficientemente general" que ha sido poco explotado.

[33] Estas cuestiones se abordan en el apartado de Restauración de imagen, volumétrica o de vídeo en el Curso de Especialista en Visión por Computador

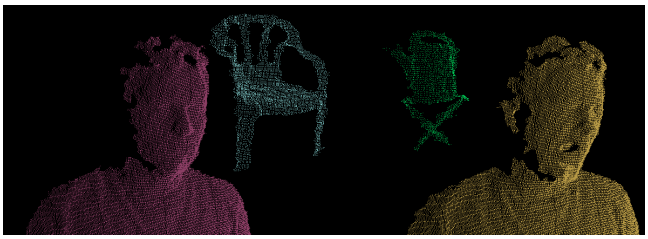

Fig. 10: Pegado de nubes de puntos 3D a diferentes resoluciones

- la segmentación de objetos volumétricos en una escena asociada a las discontinuidades de la función de profundidad y que permite "separar" unos objetos con respecto a otros.

Ante la dificultad para llevar a cabo una prolongación de las funciones (ó de los atributos) en ocasiones "se replica" la información utilizando simetrías locales asociadas a grupos con estructura de C^r-variedad; este enfoque se desarrolla en el módulo 2 [34]. Cuando el soporte no verifica condiciones de suavidad y se desean aplicar procedimientos de optimización, es conveniente introducir procedimientos de "regularización" que permiten "suavizar" elementos (aristas, p.e.) en los que falla la condición de diferenciabilidad [35].

En la práctica, es frecuente adoptar estrategias de pegado a diferentes resoluciones o niveles de detalle (LoD). El análisis de Imágenes Biomédicas ó de Microsopía Electrónica, p.e. muestra que algunos LoD pueden ser más significativos que otros. No obstante, estamos interesados en la información topológica que "permanece" y a la que podemos asociar invariantes. Esta estrategia parte de la invariancia de ciertos "hechos" fácilmente detectables (agujeros ó túneles p.e.) y restricciones geométricas sobre la variabilidad del modelo.

[34] La replicación por simetrías es un método muy tosco de propagación, pero que proporciona resultados significativos en algunas aplicaciones de Robotica, restauración de imagen ó animación a bajo nivel.

Otros procedimientos más elaborados y generales utilizan operadores diferenciales de orden 2 (elípticos, hiperbólicos ó parabólicos). Estas cuestiones se abordan en el módulo A_{46} de Topología Diferencial A_4

[35] Ver el último apartado de Retos en la subsección 4,4 para más detalles).

3. Estructuras Diferenciables

Sobre el conjunto de atlas $\mathcal{A}$ que podemos construir sobre una C^r-variedad M, introducimos la relación de orden dada por refinamiento. Para los sistemas de cartas C^r-relacionados por la relación de refinamiento el axioma de Zorn permite elegir un *atlas maximal* que les contiene.

Alternativamente y de una manera "más sofisticada", se puede definir como el límite inductivo en el C^r-categoría correspondiente, pero ambas aproximaciones hacen referencia a procedimientos de inducción trasfinita que no son constructivos. No obstante y debido a su utilidad para cuestiones relacionadas con existencia de estructuras compatibles con refinamientos sucesivos empezamos caracterizando a estos objetos:

3.1. Atlas completos y estructura de clase C^r

Formalmente, un atlas completo es un objeto maximal ó "final" atendiendo a la ordenación parcial que se realiza comparando atlas mediante refinamientos sucesivos. Por ello, se trata de un objeto ideal, cuya utilidad radica en la posibilidad de disponer d eun modelo "universal" para comparar diferentes descripciones sobre un misma variedad.

3.1.1. Atlas completo

Diremos que $\mathcal{A}$ es un *C^r-atlas completo sobre M* si no está contenido en ningún otro C^r-atlas de M. En virtud del Lema de Zorn, *cualquier C^r-atlas sobre una variedad topológica M está contenido en un único atlas completo.*

La definición de atlas completo *no es constructiva*; por ello, no es computacionalmente implementable. Por lo general, se trabaja con un representante que eventualmente se refina de acuerdo con el tipo de funcionales a estudiar sobre la variedad.

3.1.2. Estructura de clase C^r sobre M

Es la representada por un *C^r-atlas maximal* dado sobre M; no obstante, por comodidad, trabajaremos frecuentemente con representantes no maximales.

Cualquier aplicación de clase C^∞ es de clase C^r para $0 \leq r < \infty$, es decir, se tiene una cadena de inclusiones (estrictas): $C^0 \supset C^1 \supset \ldots C^r \supset C^\infty$.

Nota.- En Topología Diferencial se muestra que las estructuras suaves, es decir, de clase C^∞ son "densas" para cierta topología (compacta-abierta) en C^r para $r \geq 1$, pero no para C^0. La demostración de este resultado no es elemental pero pone de manifiesto que, desde el punto de vista topológicos, sólo hay esencialmente dos casos que corresponden al caso C^0 (continuo) y C^∞ (suave ó diferenciable). Esta observación ha dado lugar a estrategias completamente diferentes para la Topología Algebraica (como PL-aproximación a la categoría C^0) y la Topología Diferencial (correspondiente al caso C^∞).

Fig. 11: Representación simplificada de proyección planar, cónica y cilíndrica

3.1.3. Tipos de proyección

Existen diferentes tipos de proyección para la representación de objetos volumétricos. El primer objeto volumétrico a representar es la superficie de la Tierra. Los procedimientos más elementales de proyección son de tipo

- *planar* sobre el plano tangente en un punto;
- *cónico* sobre el cono tangencial trazado desde un punto exterior; ó
- *cilíndrico* sobre un cilindro tangente a un círculo máximo como el Ecuador, p.e.

La elección del tipo de proyección genera una distorsión tanto mayor cuanto más alejados están los puntos de la zona de tangencia. Existe un gran número de variantes de estos procedimientos, algunas de las cuales se siguen utilizando en la actualidad en su versión local [36]

El procedimiento que mejores propiedades tiene desde el punto de vista matemático global es la *proyección estereográfica* que está asociada a la proyección desde un punto -habitualmente el polo Norte $\mathbf{N} := (0, \ldots, 0, 1)^T$ ó el polo Dit $\mathbf{S} := (0, \ldots, 0, -1)^T$- sobre un plano -habitualmente el plano tangente en el polo opuesto o bien el plano del Ecuador-. Esta elección se justifica desde el punto de vista matemático porque proporciona una visualización muy sencilla de la compactificación del plano añadiendo un "punto del infinito" (Aleksandrov) o bien por las excelentes propiedades que tiene la aplicación que da la proyección (vinculadas a la Geometría Conforme). Estas cuestiones se abordan más adelante.

3.1.4. Representando la distorsión

El procedimiento habitual para evaluar la distorsión consiste en comparar la geometría del objeto capturado con respecto a un patrón ideal con datos

[36] El más conocido es el introducido inicialmente por G.Mercator (1569) que se utiliza bajo el acrónimo UTM en los dispositivos móviles

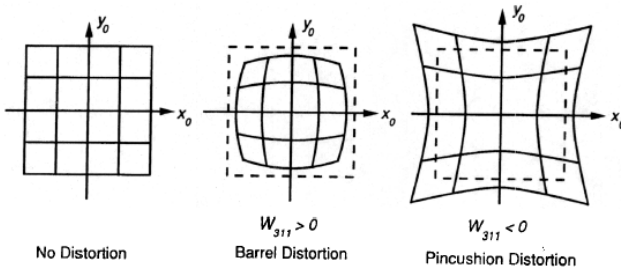

Fig. 12: Identificando el tipo de distorsión

regularmente distribuidos. La *Fig.12* ilustra esta idea en la que se muestran las distorsiones tipo barril y tipo cojín para una proyección lineal central. En la Visión Humana estas distorsiones se pueden corregir mediante lentes apropiadas (convexas vs cóncavas) que contrarrestan el efecto (convergente vs divergente) asociado al tipo de patología asociada a la proyección de un patrón regular.

En la fotografía aérea o satelital ocurren fenómenos parecidos que, en este caso, proceden de la distorsión de la superficie terrestre con respecto a un plano tangente (para cámaras situadas en posición cenital) o bien a la distorsión asociada al eje óptico con respecto a la normal a la superficie (para cámaras en posición oblicua). Para corregir la distorsión es necesario identificar el tipo y, a continuación, insertar elementos (marcas, beacons, dianas topográficas) o identificar "hechos salientes" en pares de imágenes tomadas de forma simultánea o secuencial.

La utilización de dispositivos estéreo [37] para la captura de información desde el aire proporciona imágenes muy próximas a partir de las cuales se puede calcular un mapa denso de disparidad.

La *disparidad* espacial en cada punto se define como la diferencia vectorial en la posición de un punto y su homólogo en un par de vistas. La estimación de un mapa denso de disparidad proporciona información sobre la volumetría del objeto y sobre la localización relativa del observador.

Para llevar a cabo la superposición de datos homólogos en pares de vistas estéreo es necesario "alinear" las imágenes corrigiendo la distorsión. Existe un gran número de procedimientos para llevar a cabo este proceso tanto en el caso estático (objeto fijo, cámara móvil) como en el dinámico (objeto móvil, cámaras fijas o en movimiento). Los métodos y algoritmos para dichas aproximaciones se presentan en los módulos B_{32} (Reconstrucción 3D) y B_{36} (Video 3D), respectivamente, de la materia B_3 (Visión Computacional).

El resultado de la puesta en correspondencia de elementos homólogos proporciona un mapa denso de profundidad (ó de altura) al que se asocia una malla triangular etiquetada como TIN (Triangular Irregular Network) ó DEM

[37] El estéreo puede ser espacial (pares de imágenes capturadas de forma simultánea) ó temporal (pares de imágenes obtenidas con un pequeño intervalo de tiempo) ó ambos

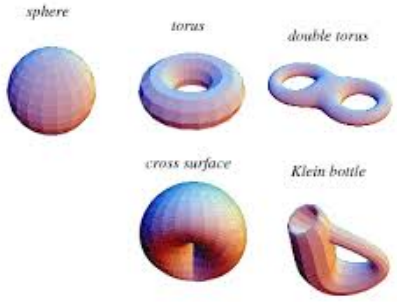

Fig. 13: Algunas superficies compactas sin borde sencillas

(Digital Elevation Map) que es un modelo lineal a trozos con resolución y error controlado. Una vez obtenido el PL-Modelo (PL: Piecewise Linear o Lineal a Trozos), se realiza un proceso de suavizado selectivo que tiene en cuenta las irregularidades (eventualmente aristas correspondientes a perfiles o accidentes orográficos, p.e.). El resultado de este último procedimiento es un PS-modelo (PS: Piecewise Smooth o Suave a Trozos).

3.2. Objetivos de la Geometría Diferencial

La Geometría Diferencial proporciona herramientas en la categoría C^∞ para el estudio, clasificación y transporte de "objetos" (funcionales, campos covectoriales, tensores) sobre variedades diferenciables. Para ello, (a) se superponen objetos adicionales lisos (campos vectoriales, formas diferenciales, formas multilineales) y (b) se introducen "reglas de diferenciación" (conexiones) que permiten mostrar cómo se "trasladan" dichos objetos sobre las variedades. La curvatura de la variedad es la responsable de las "deformaciones" que padecen dichos objetos como resultado de algún tipo de traslación.

Desde el punto de vista de las aplicaciones frecuentemente se aproximan los objetos suaves por PL-objetos que son computacionalmente más tratables. Los PL-objetos son "rectificables a trozos" mediante operaciones de "linealización local". La existencia de compatibilidad local entre estos objetos permite construir estructuras adicionales (fibrados, haces) que simplifican el estudio de las propiedades de las variedades originales.

El *problema topológico central* de la C^r-topología ó topología de C^r-variedades consiste en la clasificación de C^r-estructuras que podemos dar sobre una C^r-variedad y en la clasificación de C^r-variedades para $r \geq 0$. El caso $r = 0$ corresponde a la Topología General; la generación de homeomorfismos *locales* es muy sencilla (basta integrar campos vectoriales, como veremos más adelante), pero la construcción de homeomorfismos *globales* es bastante más complicada. De hecho, sólo existen criterios efectivos para la C^0-clasificación en el caso 1-dimensional.

Como consecuencia, la clasificación módulo difeomorfismos globales es asimismo muy difícil.

Por ello, la estrategia habitual consiste en superpone estructuras con invariantes topológicos fácilmente calculables, que sean C^r-invariantes. Los invariantes que resultan más fáciles de calcular son los diferenciales. Aparecen asociados a campos vectoriales (que representan flujos uniparamétricos) o bien a sus "efectos" medidos en términos de formas diferenciales (funcionales definidos sobre campos que a cada campo le asocian un valor real medible). El caso no trivial más sencillo corresponde las superficies compactas sin borde que pueden ser orientables o no que se muestran en la *Fig.13* .

3.2.1. Invariantes para la C^r-clasificación

En Topología Algebraica se muestran diferentes técnicas que permiten asignar objetos algebraicos (grupos, anillos) a objetos topológicos; estos objetos están asociados a (clases de caminos) ó bien a PL-estructuras superpuestas (mallas triangulares, cuadrangulares, cúbicas), ó con más generalidad estructuras celulares (CW-complejos). La cuestión importante es la *computabilidad de invariantes* asociados a las estructuras superpuestas que se expresan en términos de grupos de homotopía (traslación a lo largo de caminos, p.e.) ó, con más generalidad, módulos de (co)homología (superposición de PL-estructuras y evaluación de funcionales sobre dichas estructuras).

El rango de la parte libre de esos grupos ó la caracterización de la torsión (caso de que la haya), suministra invariantes algebraicos que son invariantes de la topología (de hecho, de la clase de homotopía, es decir, se mantienen constantes módulo deformaciones topológicas). Por ello, si dos variedades X, Y tienen invariantes algebraicos diferentes, no pueden estar en la misma clase de homotopía; por consiguiente no son homeomorfos y, con mayor razón, no pueden ser difeomorfos [38].

En otras palabras, el cálculo de invariantes proporciona criterios de "tipo negativo" para la clasificación. Lamentablemente, no existen inversos para este tipo de criterios; es decir, dos C^r-variedades pueden tener los mismos invariantes asociados a grupos de homotopía ó de (co)homología y, sin embargo, no ser homeomorfas ó no ser difeomorfas. Estas cuestiones se abordan en el Curso de Topología Algebraica.

El enfoque basado en asociar objetos algebraicos a objetos topológicos se extiende asimismo a C^r-morfismos, es decir, si $f : X \to Y$ es un C^r-morfismo, entonces la aplicación f induce una aplicación que llamamos covariante $f_* : G_i(X) \to G_i(Y)$ (donde G_i es un grupo de homotopía π_i ó un grupo de homología H_i) y una aplicación que llamamos contravariante $f^* : G^i(Y) \to G^i(X)$ (donde G^i es un grupo de cohomología H^i). Se dice entonces que el paso a la homotopía ó la homología es un "funtor" covariante y que el paso a la cohomología es un "funtor contravariante" (invierte el sentido de los morfismos asociados a

[38] Ver los módulos 1 y 2 de los apuntes de Topología Algebraica y Diferencial para más detalles

objetos algebraicos).

En términos más a ras de tierra, la (co)homología trata de identificar si un sistema genérico de ecuaciones lineales (sobre objetos en general no-lineales) es resoluble o no y, caso de no serlo, dónde está la "obstrucción" a la resolución del sistema. Esta obstrucción se expresa mediante no-anulación de la (co)homología. Este argumento tan simple relativo a la resolución de ecuaciones lineales sobre objetos arbitrarios (no necesariamente lineales) explica la ubicuidad de los argumentos (co)homológicos en todas las ramas de las Matemáticas.

3.2.2. El caso diferencial

El cálculo de invariantes basados en la estructura topológica proporciona resultados topológicos muy toscos pero que son de utilidad para una primera aproximación al problema de la clasificación. Sin embargo, no permiten evaluar la "proximidad entre formas", ni tampoco la proximidad entre elementos situados sobre las variedades. Por ello, es conveniente contar con criterios más finos que permitan incorporar invariantes (con respecto a deformaciones) asociados a propiedades métricas, angulares, afines, etc. Ello requiere considerar estructuras de tipo diferencial, métrico, analítico, etc así como grupos de transformaciones con propiedades adicionales (isometrías para el caso métrico, transformaciones conformes para la conservación de ángulos, etc).

El caso más favorable es el suave o de clase C^∞, pues se cuenta con las herramientas del cálculo diferencial e integral extendidas al caso de variedades. Cualquier objeto algebraico no-singular es suave; los objetos algebraicos o analíticos singulares sólo son suaves a trozos. En este curso supondremos que $r = \infty$, salvo que se indique lo contrario [39]. Por ello, los invariantes algebraicos utilizados para la clasificación están asociados a datos fácilmente evaluables usando métodos diferenciales, es decir, relativos a campos vectoriales (como el "índice" ó "número de vueltas", el grado de una aplicación) que se presentan en Topología Diferencial ó a formas diferenciales (como la dimensión de los grupos de cohomología) que se presentan en el módulo 4 de esta asignatura.

El enfoque diferencial se extiende asimismo a las estructuras superpuestas a las variedades que, en este caso, están dadas por (potencias de) los módulos de derivaciones, de las 1-formas diferenciales ó de ambos de forma simultánea (tensores). La extensión (ó su extensión a distribuciones de campos ó a sistemas de formas diferenciales (Pfaff) requiere un formalismo algo más elaborado. Para tratar de forma conjunta las diferentes posibilidades se introduce la noción de fibrado vectorial. Los invariantes de loas fibrados vectoriales están dados por la cohomología del fibrado que se evalúa de forma explícita utilizando formas diferenciales a partir del módulo 4 de la asignatura.

[39] Esta elección está justificada por ser la categoría C^∞ "densa en C^r para la topología compacta-abierta $\forall r \geq 1$, aunque la demostración no es elemental

3.2.3. Extendiendo la notación

Utilizaremos letras mayúsculas $M, N, P...$ para denotar variedades diferenciables con sus correspondientes dimensiones $m, n, p, \ldots$. Denotaremos mediante $\phi : N \to P$ (ó viceversa) a una aplicación entre variedades suaves. Denotaremos mediante $C^r(N, P)$ al conjunto de aplicaciones ϕ de clase C^r con dominio en N e imagen en P. La letra M denotará habitualmente una variedad diferenciable que puede corresponder indistintamente al espacio de partida ó de llegada de una C^r-aplicación.

Utilizaremos letras mayúsculas $X, Y, Z, \ldots$ para denotar variedades algebraicas ó analíticas con sus correspondientes colecciones (de hecho, haces estructurales) de funciones regulares $f : X \to K$ (suaves en el caso diferenciable, polinomios en el caso algebraico, analíticas en el caso analítico) $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$, $\mathcal{O}_Z, \ldots$. Denotaremos mediante $\phi : X \to Y$ (ó viceversa) a una C^r-aplicación entre C^r-variedades algebraicas (para $r = alg$) ó analíticas (para $r = \omega$) y mediante $\phi^* : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ al morfismo $\phi^*(f) := \phi \circ f$ inducido (mediante composición) por ϕ para cualquier función regular f sobre el espacio de llegada Y.

En todos los casos, el Álgebra Local del anillo de funciones regulares (diferenciables, algebraicas, analíticas) proporciona un lenguaje común para el desarrollo de propiedades locales. Para minimizar la dependencia con respecto a desarrollos basados en Álgebra Local (materia optativa), se adopta el punto de vista infinitesimal que sólo requiere formalizar argumentos bien conocidos del Análisis de varias variables reales.

Desde el punto de vista local, la restricción de un C^r-morfismo $f : N \to P$ entre C^r-variedades se expresa en términos de una *aplicación local* $f\,|_U \colon U \to V$ entre cartas locales de N y P, respectivamente. Si identificamos cada uno de los abiertos con su imagen en el espacio cartesiano correspondiente, dicha restricción se puede interpretar como una C^r-aplicación $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ entre espacios cartesianos. Por ello, el objeto topológico a estudiar desde el punto de vista local es el espacio de funciones $C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Este objeto tiene "muy poca" estructura y es necesario introducir algún tipo de "(semi)normas" para resolver problemas de aproximación ó de regularidad en relación con los operadores diferenciales definidos sobre dichos espacios.

Desde el punto de vista infinitesimal formal, para $f \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ se considera el desarrollo de Taylor formal en un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dado por

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^T Df(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T D^2 f(x_0)(x - x_0) + \ldots$$

Para gestionar esta información se introduce la noción de k-jet correspondiente al desarrollo de Taylor forma (no necesariamente convergente) truncado hasta orden k (inclusive); en la *Fig.14* se ilustra la aproximación del desarrollo de Taylor de la función *sen* mediante polinomios de grado bajo.

Este tipo de argumentos se extienden a desarrollos de Taylor para aplicaciones suaves en términos del espacio de jets. El conjunto $J^k(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^p)$ (denotado de forma más abreviada como $J^k(n, p)$) tiene estructura de espacio vectorial

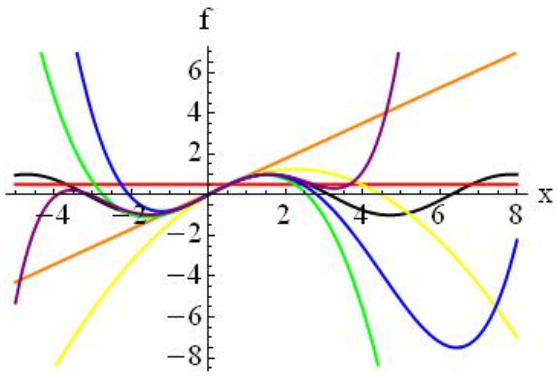

Fig. 14: Aproximación del desarrollo de Taylor por polinomios de grado bajo

finito-dimensional ó, mejor aún, de álgebra graduada (por el grado de los polinomios) y proporciona un modelo infinitesimal, primer paso para el estudio local de las funciones $f \in C^r(U, V)$ mediante las aproximaciones de orden k.

La clasificación de tipos de funciones se realiza en términos de grupos de C^r-equivalencias que actúan sobre los espacios de partida (equivalencia a la izquierda ó $\mathcal{L}$-equivalencia) ó de llegada (equivalencia a la derecha ó $\mathcal{L}$-equivalencia) ó ambos a la vez (equivalencia izquierda-derecha ó $\mathcal{A}$-equivalencia) ó bien sobre el grafo (como subvariedad diferenciable) de la aplicación f (equivalencia de contacto ó $\mathcal{K}$-equivalencia). El estudio de las diferentes $\mathcal{B}$-órbitas que pueden aparecer para cada una de las relaciones de equivalencia precedentes (es decir, para $\mathcal{B}$ igual a $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ ó $\mathcal{B}$) es el núcleo de la clasificación de singularidades de aplicaciones desde el punto de vista infinitesimal (ver Arnold, Gusein-Zade y Varcenko ó bien C.T.C.Wall para detalles).

La extensión del enfoque local al caso global requiere una formulación intrínseca (independiente del sistema de coordenadas) del desarrollo formal de Taylor (no necesariamente convergente) que se aborda en la Topología Diferencial Global de Variedades. Esta extensión permite abordar el estudio intrínseco de los jets $J^k(N, P)$ de orden k que se aborda en Topología Diferencial.

3.2.4. Aplicaciones avanzadas en TIC

La linealización de la noción de $\mathcal{A}$-equivalencia se aplica a problemas avanzados de Visión Computacional y de Robótica:

- *Visión Computacional:* La realimentación entre estructura y movimiento para la generación semi-automática de modelos a partir de una cámara en movimiento desplazándose en una escena (materia B_3)
- *Robótica:* De utilidad para la realimentación entre sensores y actuadores en el Ciclo Percepción-Acción, incluyendo interacción con el terreno en

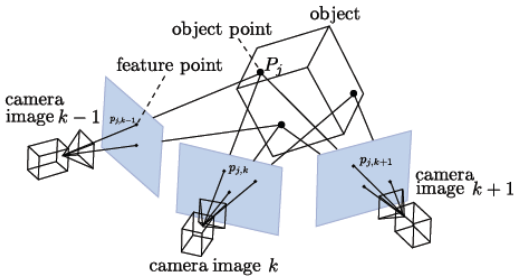

Fig. 15: Seguimiento de hechos muy sencillos para objetos rígidos

operaciones de locomoción (materia B_2).

La linealización de la noción de $\mathcal{K}$-equivalencia conserva el grafo de una aplicación en términos diferenciales, es decir, relativos a la condición de incidencia entre un elemento (un punto de una variedad o una función de un espacio de funciones) y el espacio tangente en dicho elemento. En particular, la conservación de un contacto de orden cero (asociado a la posición), uno (asociado a elementos tangenciales) o dos (control de fuerzas y momentos) se aplica a tópicos tales como

- *Visión Computacional estática* en relación con una linealización del Reconocimiento de Formas usando "hechos" vinculados a la apariencia que se representa como el grafo de una aplicación (identificable en términos de contornos de objetos segmentados en imagen ó en una secuencia de vídeo para un objeto rígido.
- *Estimación de características del movimiento* relativo de una cámara con respecto a objetos de interés eventualmente deformables (sfm para objetos no-rígidos, p.e.)
- *Robótica:* De utilidad para la implementación computacional para tareas complejas como las vinculadas a operaciones de agarre y manipulación que se expresan en términos de la fijación de condiciones de contacto para localizaciones óptimas de contacto en términos de la aplicación normal en puntos o curvas apropiadas contenidas en el objeto.

Una introducción a estas aplicaciones se presenta más abajo; una versión más detallada se muestra en la materia B_3 (Visión Computacional) y en la materia B_2 (Robotics. A hierarchical approach). Las tareas más complejas conciernen a la coordinación ojo-mano, incluyendo captura mediante visión estéreo, posicionamiento correcto, planificación, ejecución y control del agarre, proceso al que se etiqueta como *Visual Servoing* (ver Fig.16).

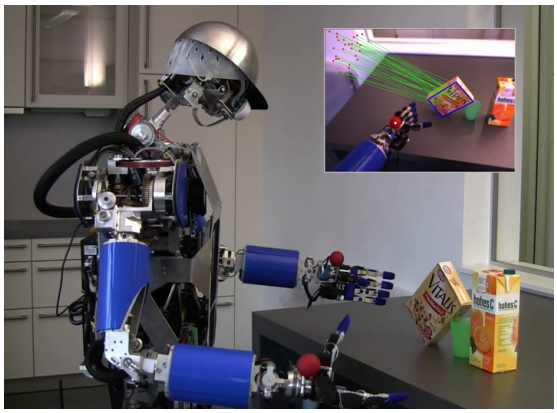

Fig. 16: Visual Servoing para un robot humanoide (Karlsruhe, Alemania)

3.3. Complementos históricos

En esta sección se presentan algunos elementos y resultados relacionados con la noción de C^r-variedad. Esta sección tiene un carácter informativo complementario y bastante más avanzado que el resto del curso; por ello, puede saltarse en una primera lectura.

3.3.1. Compatibilidad y jerarquías entre C^r-estructuras

Si $n \leq 3$ y si $n \geq 5$ es posible demostrar (no es elemental) que la estructura topológica usual sobre $\mathbb{R}^n$ es esencialmente única, es decir, única modulo difeomorfismos. Estamos interesados en objetos más generales que el espacio cartesiano. Para abordar este problema se introdujeron dos estrategias topológicas generales basadas en la superposición de PL-estructuras (mallas generalizadas) o bien en el estudio de caminos cerrados o lazos (método homotópico) contenidos en las variedades.

Con más generalidad, si la dimensión $n \leq 3$ se demuestra que cualquier variedad topológica admite una estructura de clase C^∞. En relación con este resultado se planteó la *Conjetura de triangulación* (etiquetada como *Hauptvermutung* en la terminología clásica) acerca de si una variedad topológica admite una estructura de PL-variedad (es decir, una estructura lineal a trozos) y si dicha estructura es única. Para abordar este problema, interesa generar de forma automática mallas generalizadas (extensión de mallas triangulares, inicialmente) o bien lazos; una forma constructiva de generar ambos tipos de objetos topológicos es mediante simetrías locales.

El *Quinto Problema de Hilbert* (Paris, 1900) concierne a la caracterización de los grupos de Lie y está relacionado con la conjetura formulada en el párrafo anterior; un grupo de Lie es un grupo que tiene estructura de variedad diferenciable, es decir, tales que las aplicaciones de composición y de paso al inverso

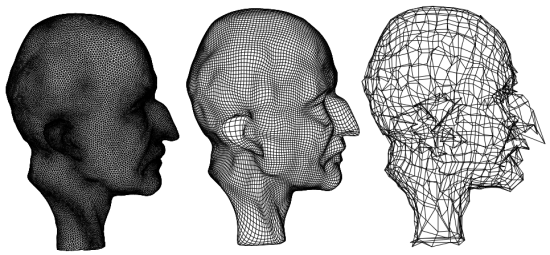

Fig. 17: PL y PS-estructuras sobre nubes: Ajustando Superficies Polinomiales

son suaves. Cualquier grupo clásico de matrices (asociada a cualquier geometría lineal) es un grupo de Lie, p.e.

Sophus Lie (hacia 1890) utilizaba grupos *continuos* de transformaciones para el estudio de sistemas de EDO (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias) y de EDP (Ecuaciones en Derivadas Parciales). Sin embargo, en la exposición de sus teorías, S.Lie usa frecuentemente la *diferenciabilidad* de dichas transformaciones de una forma implícita. A principios del siglo XX ya era bien conocido que pueden existir ecuaciones funcionales analíticas cuyas soluciones son funciones uniformes y continuas, pero no diferenciables. D.Hilbert muestra una tal $\phi(x)$ como solución del sistema de ecuaciones funcionales dado por

$$\phi(x+\alpha) - \phi(x) = f(x) \ , \ \phi(x+\beta) - \phi(x) \ = \ 0 \ ,$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f(x)$ es una función uniforme analítica y regular $\forall \ x$ (dicha función se puede construir mediante series trigonométricas, de forma similar a como se construyen soluciones no analíticas de ciertas ecuaciones en derivadas parciales). Por ello, un *grupo de Lie* se define como un grupo G tal que la aplicación $G \times G \to G$ dada por la asignación $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$ es de clase C^∞.

El *Quinto Problema* planteado por Hilbert en 1900 pregunta si un grupo topológico (es decir, que es un espacio topológico) es necesariamente un grupo de Lie. Si la respuesta fuera cierta, ello implicaría que la estructura diferenciable es "irrelevante".

J.Von Neumann (1934) demuestra que la respuesta es afirmativa si G es compacto. L.Pontryagine (1934) demuestra que la respuesta es afirmativa si G es abeliano y localmente compacto. El Quinto Problema de Hilbert problema tiene una respuesta afirmativa para el caso localmente euclídeo (descripción como variedad topológica), aunque una demostración completa y altamente sofisticada no fue dada hasta los años cincuenta. Más explícitamente, se tiene el siguiente

Teorema (Gleason, 1952, Montgomery y Zippin, 1952).- Cualquier grupo localmente euclídeo es un grupo de Lie.

Poco despues, Yamabe (1953) da una respuesta afirmativa al problema utilizando argumentos algebraicos bajo condiciones más generales para grupos conexos localmente compactos G que no contienen "subgrupos pequeños".

Por otro lado y de forma independiente (usando herramientas sofisticadas de Topología Diferencial y Algebraica), se demostró que las variedades topológicas son "esencialmente lo mismo" que las lineales a trozos (tienen los mismos invariantes topológicos). Por ello, el problema se orientó hacia la relación de las PL-variedades con las variedades de clase C^∞ que no pueden ser aproximadas por PL-variedades.

3.3.2. Variedades no lisas y estructuras no-equivalentes

Existen variedades lineales a trozos que *no admiten estructura diferenciable*. Kervaire (1960) proporcionó el primer ejemplo de una PL-variedad de dimensión 10 que no admite estructura diferenciable. Usando acciones de grupos y un resultado de Bing (1952) se puede encontrar otro contraejemplo cuyo soporte es la esfera de dimensión 3.

Por otro lado, existen variedades que son C^0-equivalentes pero no son difeomorfas, por lo que hay que precisar el tipo de C^r-estructura que estamos considerando sobre el soporte topológico. Así por ejemplo, Milnor (1960) demostró que existen 28 estructuras no difeomorfas sobre la esfera $\mathbb{S}^7$ que son homeomorfas entre sí. Los casos correspondientes a $\mathbb{S}^1$ (complejos unitarios), $\mathbb{S}^3$ (cuaterniones unitarios) y $\mathbb{S}^7$ (octoniones unitarios) son "más fáciles" de estudiar pues son las únicas esferas "paralelizables" (con fibrado tangente isomorfo al trivial) y, además, son las únicas álgebras de división sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Actualmente, se ignora una cuestión tan simple de plantear cómo cuántas estructuras homeomorfas pero no difeomorfas se pueden definir sobre una esfera $\mathbb{S}^n$ de dimensión arbitraria.

A las estructuras diferentes de la usual se les denomina "exóticas". Es posible demostrar asimismo que el espacio proyectivo real $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ admite estructuras diferenciables que no son difeomórficamente equivalentes a la usual (ver *Ejercicio 1.4.2.4 y el reto* 1,4,4,1 para una primera aproximación al problema).

3.3.3. El problema de la clasificación

Los criterios disponibles actualmente para distinguir tipos no difeomórficamente equivalentes de variedades homeomorfas, requieren la introducción de invariantes topológicos de la estructura *lineal a trozos* que son invariantes globales (clases de Pontrjagin). Este tópico es una parte altamente sofisticada de la Topología Diferencial Global, que se aborda en el último módulo de Topología.

Una de las aplicaciones de la clasificación está relacionada con el problema del *Reconocimiento de formas* para inputs procedentes de información capturada con diferentes dispositivos (imagen, vídeo, láser 3D, infrarrojos, rayos X, entre otros). Los inputs se organicen en términos de campos sobre variedades

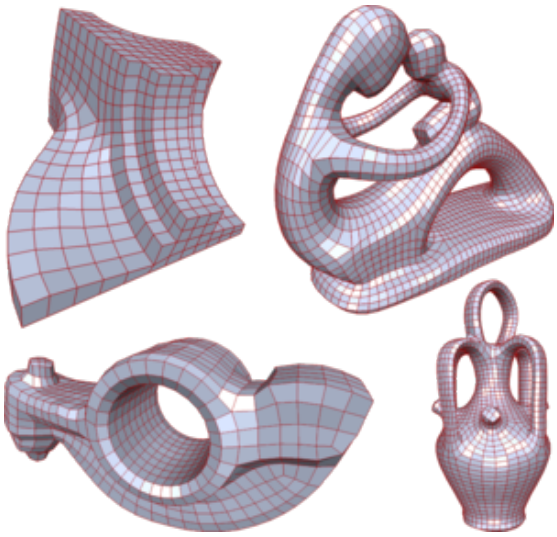

Fig. 18: Generación de mallas cuadrangulares (Bommes, Aachen)

que se caracterizan a diferentes niveles que se expresan en términos de detectores (funciones o funcionales definidas sobre el espacio base o el total de una fibración) y descriptores (secciones de fibraciones en nuestra formulación). En las aplicaciones desarrolladas desde finales de los noventa, el espacio de búsqueda de la características a estimar puede tener una dimensión muy elevada [40].

El *Reconocimiento de Formas* introduce una jerarquía entre aspectos locales y globales (asociados al pegado de datos locales). Para ello, se requieren modelos robustos (geométricos) con invariantes calculables de acuerdo con una jerarquía que va desde los aspectos más toscos (topología conjuntista o lineal a trozos) a los más finos (aspectos geométricos) pasando por modelos deformables (controlados por aplicaciones conformes, p.e.). Una estrategia común consiste en superponer mallas (triangulares vs cuadrangulares) asociadas a nubes de puntos variables (ver. Fig.18). El control efectivo de las deformaciones proporciona herramientas asimismo para la animación de objetos eventualmente articulados (ver Fig.19).

[40] El descriptor SIFT (Scale Invariant Feature Transform) tiene 128 componentes y es necesario diseñar procedimientos eficientes para disminuir de forma radical dicho número

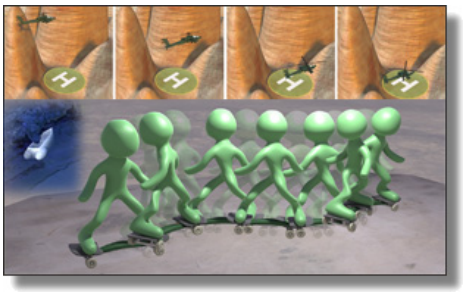

Fig. 19: Animación de caracteres basada en integradores de grupos de Lie (Crane, Desbrieu et al, 2009)

4. Complementos

A pesar del carácter en ocasiones fragmentario de los materiales presentados en este capítulo introductorio, es claro el papel central que ocupa la Geometría Diferencial de Variedades en múltiples contextos, no sólo de la mal llamada Matemática Pura (habría que decir más bien Fundamental), sino de la Matemática Aplicada y de la Estadística. Las interrleaciones entre estas diferentes subáreas ofrecen una gran cantidad de posibilidades que han sido explotadas de forma sistemática por la Física Teórica a lo largo del S.XX.

Más recientemente, los modelos y herramientas basadas en Geometría Diferencial están siendo extendidas no sólo a Matemática Aplicada y Estadística, sino también a una gran parte de áreas de Ingeniería e incluso de Teoría Económica. En la parte II de estos apuntes se pueden ver aplicaciones a la Mecánica de Medios Continuos B_1, la Robótica B_2, la Visión Computacional B_3 y la Informática Gráfica B_4. Debido a la diversidad de estas aplicaciones y a un tratamiento más elaborado en dichas materias, aquí sólo se esbozan algunas ideas generales sobre las mismas.

4.1. Conclusiones

La Geometría Diferencial surge como respuesta a una serie de retos relacionados con la representación cartográfica del mundo conocido (desde finales del s.XVI), pasando por la Ingeniería Civil (a finales del s.XVIII y principios del s.XIX) y el formidable desarrollo de la Mecánica Analítica y el Electromagnetismo a mediados del s.XIX.

El desarrollo de estas mutuas interrelaciones ha motivado sucesivas reformulaciones de la Geometría Diferenciabl desde diferentes marcos. Los desarrollos iniciales surgen como una prolongación del Cálculo Diferencial e Integral a soporte curvados (Lagrange, Riemann). A continuación se incorpora el enfoque algebraico incorporando inicialmente todas las Geometrías Clásicas (F.Klein) y, a continuación, una presentación unificada de las EDO (S.Lie) en la que se

solpan los aspectos algebraicos y analíticos.

La noción de variedad diferenciable ya estaba implícita en la memoria de B.Riemann (1856), pero su formalización tal como ahora la conocemos lleva casi cient añois de sucesivas reelaboraciones. La necesidad de un tratamiento simultáneo de campos (dados localmente por EDO) y sus duales (formas diferenciales) en un contexto intrínseco conduce de forma natural al desarrollo del Álgebra Exterior (liderado por Cartan) en el primer cuarto del s.XX como una extensión natural de los métodos combinatorios utilizados por H.Poincaré a finales del s.XIX.

Una idea clave que reaparece bajo diferentes contextos a lo largo de estas notas consiste en la introducción de "campos" y sus "flujos" asociados para representar "cambios de estado" o de configuraciones. Los campos pueden ser escalares (funciones o funcionales definidos sobre variedades), vectoriales (dados por colecciones finitas formales de campos escalares), co-vectoriales (duales de los vectoriales) o tensoriales (productos formales de todos los anteriores). Aunque los campos tensoriales incluyan como caso particular todos los anteriores, su tratamiento formal (en términos del Álgebra Multilineal), presenta una mayor complejidad.

Por ello, para fijar ideas y conectar con otras áreas de las Matemáticas, se lleva a cabo una exposición más "casuíustica" basada en los campos más sencillos correspondientes a funciones, distribuciones $\mathcal{D}$ de campos vectoriales y sistemas $\mathcal{S}$ de formas diferenciales (duales de los campos vectoriales). Es importante subrayar que todos ellos admiten un tratamiento formal como "secciones" de estructuras superpuestas (firbados, fibraciones, haces) que aparecen de forma ubicua en todas las Geometrías y sus aplicaciones.

Por ello, el enfoque de la Geometría Diferencial basado en campos se extiende de forma natural a otros áreas no sólo de la Geometría, sino también de la Física, la Ingeniería y la Teoría Económica. La noción de "campo" proporciona un marco general para abordar cualquier tipo de interacción tanto por parte de uno como de múltiples agentes, consigo mismo, con el entorno o con otros agentes. Ello explica su carácter ubicuo. Sin embargo, para que resulte operativa es necesario que esta noción y las propiedades asociadas sean susceptibles de estimación en condiciones de información incompleta o de incertidumbre. Ello ha llevado a una mutura interrelación entre la Geometría Diferencial y la Estadística desde los años ochenta que ocupa un lugar fundamental en relación con las aplicaciones a otras Ciencias Aplicadas y a Ingeniería.

4.2. Ejercicios

4.2.1. Parametrizando la esfera

Construye parametrizaciones locales de la esfera

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\} ,$$

mostrando su estructura como C^r-variedad. *Indicación*: Usar la proyección estereográfica sobre un hiperplano coordenado. Por ejemplo, si $\mathbf{N} = (0, \ldots, 0, 1)$ es el polo Norte, entonces consideramos la aplicación

$$\phi_{\mathbf{N}}(\underline{x}) \ := \ \frac{1}{1 - x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \ ,$$

definida para los puntos del complementario del ecuador dado como $\mathbb{S}^{n-1} \cap \{x_n = 1\}$. Podemos razonar análogamente con el Polo Sur $\mathbf{S}$ y mostrar que el cambio de carta está dado para cada $\underline{y} \notin \mathbb{S}^{n-1} \cap \{x_n = 1\}$ por $\phi_{\mathbf{N}} \circ \phi_{\mathbf{S}}^{-1}(\underline{y}) \ = \ y/\|y\|^2$ (en efecto, nótese que

$$\phi_{\mathbf{N}}(\underline{x}) \ = \ \frac{1}{|\phi_{\mathbf{S}}(x)|^2}\phi_{\mathbf{S}}(\underline{x}) \ .$$

De este modo obtenemos una C^r-estructura sobre la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ dada por dos cartas. Una descripción alternativa de una estructura C^r-equivalente a la que acabamos de describir se obtiene proyectando la semiesfera superior ó inferior, que denotamos respectivamente mediante

$$U_i^+ = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} \ \mid \ x^i > 0\} \quad \text{y} \quad U_i^- = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} \ \mid \ x^i < 0\} \quad 1 \leq i \leq n$$

sobre $x^i = 0$ via $(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots x^n)$.

Comprueba que la restricción de esta proyección a cada uno de los abiertos U_i^+ y U_i^- da un difeomorfismo con el disco abierto unidad del plano. Asimismo, la aplicación que da el cambio de carta sobre la intersección de dos abiertos de este tipo está dada por la identidad. Por ello, obtenemos una C^r-estructura sobre la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, dada en este caso por 2^n cartas.

La equivalencia con la C^r-estructura descrita más arriba en términos de la proyección estereográfica procede de la equivalencia entre $\mathbb{R}^{n-1}$ (que es topológicamente equivalente a la esfera menos un punto) y el disco abierto de radio unidad contenido en $\mathbb{R}^{n-1}$. Muestra esta equivalencia como ejercicio.

4.2.2. Parametrizando el toro

Parametriza el toro 2-dimensional $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ que aparece en $\mathbb{R}^3$ como la superficie de revolución obtenida haciendo girar la circunferencia dada por $\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ (y-2)^2 + z^2 = 1\}$ en torno al eje Oz. Dar una parametrización usando coordenadas complejas en la parametrización angular de Euler.

4.2.3. Parametrizando la banda de Moebius

La *banda de Moebius* está dada analíticamente en $\mathbb{R}^3$ como la imagen de la aplicación $f :]0, 2\pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ que a cada par $(\theta, t) \in [0, 2\pi] \times R$ asocia

$$(2cos\theta \ + \ tcos\frac{\theta}{2}cos\theta \quad , \quad 2sen\theta \ + \ tcos\frac{\theta}{2}sen\theta \quad , \quad tsen\frac{\theta}{2})$$

Una descripción alternativa procedente de la Topología Geométrica es la siguiente:

Sobre el conjunto $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1+\varepsilon\}$ (donde $0 < \varepsilon < 1$) se considera la relación de equivalencia $(x,y) \sim (x',y')$ si y sólo si $(x,y) = (x',y')$ ó bien si $\mid x - x' \mid = 1$, entonces $y + y' = 0$. La banda de Moebius B_M se obtiene como la imagen por paso al cociente de la relación anterior.

Recubrimos B mediante los abiertos $U_1 := \{(x,y) \mid 0 < x < \frac{\pi}{2} + \varepsilon\}$ y $U_2 := \{(x,y) \mid \frac{\pi}{2} - \varepsilon < x < 2\pi\}$. Comprueba que la aplicación $\phi_i := f \mid_{U_i}$ es *biyectiva* y que las cartas dadas por (U_i, ϕ_i) forman un C^r-atlas 2-dimensional sobre la banda de Moebius B_M, cuya expresión coordenada local en $\mathbb{R}^3$ es la que hemos mostrado más arriba.

4.2.4. El espacio proyectivo como variedad

El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ está descrito como el cociente de $\mathbb{S}^n$ por la aplicación antipodal que identifica dos puntos diametralmente opuestos, es decir, tenemos una aplicación $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ donde $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = \pm y$. Esta aplicación permite dotar al espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ de forma natural con la topología cociente, es decir, U es un abierto de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ si y solo si $f^{-1}(U)$ es un abierto de $\mathbb{S}^n$.

Por ello, la estructura *local* del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ es "esencialmente la misma" que la de la esfera $\mathbb{S}^n$. Sin embargo, como la aplicación de paso al cociente $\mathbb{S}^m \to \mathbb{P}^m = \mathbb{S}^m/\mathbb{Z}_2$ no es inyectiva, ambas variedades no pueden ser homeomorfas.

La inclusión usual $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ dada como una sección hiperplana de la segunda, permite considerar una inclusión natural $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Muestra que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} - \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$ es homeomorfo al interior del disco $Int(\mathbb{D}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(\underline{x}, \underline{0}) < 1\}$. A este conjunto se le llama una *n-célula*.

De hecho, como $Int(\mathbb{D}^n)$ es C^r-equivalente a $\mathbb{R}^n$, iterando el proceso obtenemos una descomposición en unión disjunta de espacio C^r-equivalentes a $\mathbb{R}^k$ para $k = 0, \ldots, n$

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}^{n-1} \cup \mathbb{P}^{n-2} = \ldots = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}^{n-1} \cup \ldots \mathbb{R}^0 ,$$

a la que se llama *descomposición celular del espacio proyectivo* real $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Esta descomposición también se puede llevar a cabo de forma análoga en el caso complejo; observar que en este caso, las células que aparecen tienen dimensión real par.

Describe la estructura del espacio proyectivo en términos de las cartas coordenadas locales

$$D_+(x_i) := \{\underline{x} = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mid x_i \neq 0\} ,$$

donde $\underline{x} = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ son coordenadas homogéneas. *Indicación*: verificar la condición de homeomorfismo local sobre la intersección $D_+(x_i) \cap D_+(x_j)$ de dos abiertos coordenados locales. Para esta parte es más conveniente usar la proyección cartesiana sobre el hiperplano $x_i = 0$ y razonar de la misma forma

que en la esfera (este ejercicio pone de manifiesto que el proyectivo y la esfera m-dimensionales son localmente difeomorfas, aunque no lo sean globalmente, según hemos visto más arriba).

4.2.5. Parametrizaciones polares y esféricas

Describe las parametrizaciones de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ dadas por coordenadas polares y esféricas, respectivamente, y mostrar que este sistema de cartas es compatible con la carta identidad que da la estructura topológica trivial.

Describe la parametrización del espacio ordinario mediante coordenadas cilíndricas.

4.2.6. Difeomorfismo local entre esferas y espacios proyectivos

Demuestra usando cartas que $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ es localmente difeomorfo a la circunferencia $\mathbb{S}^1$ y que $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ es localmente difeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^2_{\mathbb{C}}$.

4.3. Prácticas

4.3.1. Equivalencia entre nociones de atlas

Demuestra que la noción de atlas C^r-equivalentes introducida en el §1,1,5 es de equivalencia y que la unión de 2 atlas C^r-equivalentes es un C^r-atlas sobre una variedad topológica M. ¿Puedes formalizar la noción intuitiva de borde en el caso diferenciable?

Extiende la noción de atlas al caso de variedades no-diferenciables y haz un pequeño informe de las dificultades que encuentras para su reformulación en los casos algebraico o analítico. *Nota.-* Esta parte requiere conocimientos adicionales de Geometría Algebraica y sólo es apropiada para los estudiantes que conozcan, al menos, la descripción formal de Curvas Algebraicas como Variedades.

4.3.2. El cono y el semicono como variedades

Comprueba que el cono $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ es una variedad algebraica pero no es una C^r-subvariedad de R^3. Demuestra que el semicono positivo (con $x \geq 0$) es una C^0-subvariedad de $\mathbb{R}^3$.

Extiende los argumentos presentados al caso de variedades analíticas o semi-analíticas.

4.3.3. Repaso de Topología General de Variedades

1. Si M es una variedad entonces M es localmente compacta.

2. Si M admite un atlas numerable, entonces M admite una base numerable para su topología (en particular, cualquier variedad compacta admite una base numerable).

3. Si $f : M \to N$ es un homeomorfismo, entonces M verifica una propiedad topológica (P) si y sólo si N la verifica. Por ejemplo, una variedad compacta no puede admitir un atlas dado por una sola carta, aunque desde el punto de vista conjuntista la variedad pueda estar contenida en el dominio de una sola carta de otro espacio ambiente

Estos resultados proporcionan criterios débiles para distinguir variedades topológicas; la Topología Algebraica suministra invariantes que nos permiten distinguir clases de variedades topológicas, modulo homeomorfismo.

Cuestiones típicas de examen *Cuestión 1.-* Demuestra que una variedad compacta no puede ser recubierta por una única carta

Cuestión 2.- Demuestra que el borde de un cuadrado no puede ser recubierto por una sola carta

4.3.4. Proyección estereográfica

Sobre $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \simeq_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se considera la topología inducida por la proyección estereográfica $\mathbb{S}^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ y la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}^2$ (ó alternativamente de $\mathbb{C}$). Introducimos la relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dada por

$$z \sim z' \Leftrightarrow z = z' \ , \ \{z, z'\} = \{0, \infty\} \text{ ó si } \{z, z'\} \neq \{0, \infty\} \text{ entonces } z\bar{z}' = -1 \ ,$$

donde $\bar{z}$ denota el conjugado de z. Demuestra que si $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es la proyección estereográfica extendida, entonces π factoriza a través del cociente y se obtiene un homeomorfismo $\mathbb{S}^2/\text{relación antipodal} \to (\mathbb{C} \cup \{\infty\})/\sim$. [41]

Nota.- El ejercicio anterior muestra que la compactificación (de Alexandrov) del plano $\mathbb{R}^2$ con el punto del infinito es topológicamente equivalente a la inversión de la proyección estereográfica. Más adelante, veremos cómo este hecho permite comparar campos vectoriales sobre el plano con campos vectoriales sobre la esfera que tienen un punto singular en el polo norte (centro de la proyección estereográfica).

Debido al "mal comportamiento" del punto del infinito del plano (imagen del polo norte N de la esfera), es conveniente tomar las coordenadas usuales (x, y) del plano $\mathbb{R}^2$ como coordenadas de la copia afin correspondiente al abierto $D_+(x^0) := \{(x^0 : x^1 : x^2) \in \mathbb{P}^2_R \mid x^0 \neq 0\}$; es decir, hacemos $x := x^1/x^0$ e $y := x^2/x^0$.

[41] más detalles sobre el uso de coordenadas complejas en el §4 de B.A.Rosenfeld y N.D.Sergeeva:"Proyección Estereográfica", Ed. Mir, Moscú, 1977

Esta transformación muestra que a cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ le corresponde una familia uniparamétrica de ternas $[x^0 : x^1 : x^2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (definida unívocamente salvo factor de proporcionalidad) representada por una recta que pasa por el origen y un punto de la esfera real 2-dimensional $\mathbb{S}^2$ y recíprocamente, si $x_0 \neq 0$. Si $x_0 = 0$, a este punto le corresponde la recta del infinito.

De este modo, hemos obtenido *otra* compactificación del plano afin mediante una recta, al que se llama el plano proyectivo (detallado desde otra perspectiva en el *Ejercicio 1.4.2.4*). Nótese que con esta presentación, cada punto P de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ está representado por rectas ℓ_P de $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen.

La correspondencia que a cada punto $\imath \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ representado por $\ell_\imath$ le asocia el par de puntos antipodales $\{\pm x\}$, permite visualizar $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ como parte de la semiesfera $\mathbb{S}^2$. La proyección de esta semiesfera sobre el plano $\mathbb{R}^2$ da un disco $\mathbb{D}^2$, cuyos puntos antipodales están identificados y corresponden a la línea del infinito. Recíprocamente, la compactificación del plano euclídeo con esta línea transforma el plano $\mathbb{R}^2$ en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (esto muestra en particular que ambas compactificaciones son diferentes).

Ejercicio.- Generaliza la construcción mostrada en el párrafo anterior a dimensión arbitraria.

Nota.- En lo sucesivo supondremos ya conocidos los diferentes modelos del espacio proyectivo y serán usados sin referencia explícita.

4.4. Retos

4.4.1. Difeomorfismos entre esferas y entre espacios proyectivos

El último ejercicio planteado en la segunda subsección sugiere no sólo la extensión a dimensión arbitraria, sino también el estudio de las estructuras diferenciables que son compatibles con una estructura topológica subyacente. Este problema es demasiado general. Por ello, es conveniente acotarlo de acuerdo con representaciiones de variedades como unión de "células" $(e^k, \partial e^k)$ que son C^r-equivalentes a $(\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ que se "pegan" identificando los bordes $\mathbb{S}^{k-1}$ de discos.

La observación anterior motiva la caracterización de las clases módulo difeomorfismo de las estructuras diferenciables esferas utilizadas para los procedimi entos de pegado. Desde los años sesenta (J.Milnor) es bien conocido la existencia de diferentes estructuras topológicamente equivalentes, pero no difeomoórficamente equivalentes sobre algunas esferas; en particular $\mathbb{S}^7$ admite 28 estructuras diferenciables no diferenciablemente equivalentes entre sí, a pesar de la simplicidad que presenta su fibrado tangente (más adelante veremos que es una variedad paralelizable, es decir, con fibrado tangente trivial).

Desde los años sesenta un reto difícil ha sido tratar de identificar las estructuras diferenciables que pueden admitir esferas $\mathbb{S}^k$ ó sus cocientes $\mathbb{P}^k = \mathbb{S}^k/\mathbb{Z}_2$ (espacios proyectivos) que sean compatibles con su estructura topológica estándar. El problema es no-trivial y para el caso $k = 3$ se reveló realmente difícil, dando lugar a la conjetura de Poincaré (1903) resuelta cien años más tarde por

Perelman (2003), quien demostró con métodos diferenciales (flujo de Ricci) el carácter simplemente conexo de la esfera $\mathbb{S}^3$ (cualquier lazo es contractible a un punto). Este tipo de resultados permiten *caracterizar* topológicamente a la esfera.

El problema de caracterización del espacio proyectivo sigue presentando una dificultad formidable. Sólo se conocen resultados de caracterización para baja dimensión con contribuciones importantes por parte de Andreotti, Fraenkel y Hartshorne en el marco de la Geometría Algebraica. Desde el punto de vista diferenciable, el problema es aún más complicado pues el espacio proyectivo $\mathbb{P}^4$ admite infinitas estructuras diferenciables que no son equivalentes módulo la acción de los difeomorfismos (Donaldson, 1983).

Peor aún: no se conocen propiedades relevante del espacio de moduli de dichas estructuras. En particular, desconocemos cuál es el clase de equivalencia diferenciable de las diferentes compactificaciones que se pueden hacer del espacio-tiempo en Relatividad General. Esta ignorancia da lugar a que los resultados de los diferentes modelos sólo sean intercambiables en un marco topológico, pero no en un marco diferenciable. .

4.4.2. Estructuras diferenciables sobre curvas racionales

A la vista de las dificultades que presenta el problema de clasificación en dimensiones 3 o 4 (los casos más difíciles), parece razonable regresar al problema de clasificación diferenciable de objetos más simples como puedan ser curvas o superficies. El caso más simple corresponde a curvas, con las curvas racionales, es decir, C^r-equivalentes a la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ como caso "trivial"; las curvas racionales de grado d reciben el nombre de "serpientes" (snakes) en las aplicaciones a Ingeniería.

La simplicidad de este caso es engañosa, pues ya el producto $\mathbb{P}^1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1$ de s curvas racionales presenta cierta complejidad. En particular, si $s = 2$ dicho producto se llama una superficie B-spline con bigrado (d_1, d_2), mientras que $s = 3$ se obtiene un sólido (threefold) T-spline con trigrado (d_1, d_2, d_3). Ambos son de uso común en modelado, diseño y animación. A pesar de este uso tan frecuente, aún no se dispone de un estudio sistemático de sus deformaciones, problema que está asociado al estudio de las estructuras diferenciables que podemos describir de manera más dinámica en términos de flujos.

Por ello, es conveniente regresar al enfoque ingenuo basado en curvas racionales. Empezamos recordando el ejemplo no trivial más simple posible: Sobre la recta real $\mathbb{R}$ consideramos las estructuras diferenciables dadas por la aplicación $1_{\mathbb{R}}(x) := x$ y por la cúbica $\varphi(x) = x^3$. Demuestra que la aplicación identidad $i : (\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, \varphi)$ *es* un difeomorfismo, pero que la aplicación $F : (\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, \varphi)$ dada por $F(x) := x^3$ *no es* un difeomorfismo entre ambas estructuras diferenciables.

Nota.- Este ejemplo pone de manifiesto cómo estructuras diferenciables distintas sobre una variedad M pueden determinar variedades difeomórficamente equivalentes (mediante un apropiado difeomorfismo). El reto consiste en exten-

der este tipo de observaciones a variedades splines generalizadas, mostrando procedimientos efectivos para el cálculo de deformaciones sobre las estructuras diferenciables subyacentes.

4.4.3. Atlas diferenciable y analítico

La aparición de "patologías" (más adelante se caracterizan como singularidades) en el comportamiento de variedades, sugiere un estudio en profundidad de cuestiones relacionadas con la detección, descripción y clasificación de dichas "patologías". Estas tres cuestiones forman el "núcleo duro" de los problemas de Reconocimiento que aparecen en diferentes áreas de otras Ciencias Aplicadas e Ingeniería. Por ello, interesa estudiar estrategias generales que faciliten un transición entre los métodos locales utilizados en diferentes Geometrías. Si nos restringimos al caso regular el problema es casi trivial y se enuncia en los términos siguientes:

Ejercicio.- Demuestra que cualquier atlas $\mathcal{A}$ sobre un espacio topológico M está contenido en un único atlas *maximal*, por lo que define una estructura diferenciable sobre M. Demuestra que un atlas maximal *analítico* está contenido en exactamente un atlas maximal *diferenciable*.

Sin embargo, el caso general es bastante más complicado incluso en dimensión compleja 2, donde las relaciones entre las clasificaciones diferenciables y algebraica o analítica presentan una multiplicidad de aspectos formidable. El tratamiento más completo que conozco de estas relaciones para el caso 2D se describe en [Bar84] [42]; para una introducción ver el módulo A_{34} (Geometría Algebraica de Superficies).

En dimensión real 3, el programa de geometrización de W.Thurston iniciado a principios de los ochenta (Princeton, 1981) sienta las bases con una descripción de los 8 tipos de variedades conexas que pueden aparecer en dicha dimensión. Posteriormente, ha habido aportaciones importantes de Nielsen, Yau y Perelman, donde los aspectos topológico, diferenciable y analítico se entremezclan entre sí. Lamentablement, el impulso inicial parece haberse detenido desde principios del s.XXI. En dimensión compleja 3 el problema está completamente abierto; para una introducción a este problema en el marco de la Geometría Algebraica A_3 ver el módulo A_{36} (Classification of Algeraic Threefolds).

4.4.4. Regularización de datos

En las aplicaciones de la Geometría Diferencial es frecuente encontrar situaciones en las se desea ajustar modelos suaves a una colección de datos vectoriales con densidad variable. Un ejemplo significativo corresponde a nubes de puntos 3D procedentes de diferentes dispositivos de imagen o de rango; a dichas bubes se les puede ajustar una malla inicialmente triangular. Los retos relacionados consisten en

[42] W.Barth, C.Peters, A.Van de Ven: *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag, 1984.

- Desarrollar estrategias generales para convertir mallas trinauglares en cuadrangulares que son fácilmente parametrizables.
- Equilibrar localmente la distribución de vectores normales $\mathbf{n}$ a cada triángulo de la malla triangular original usando una normalización a vectores unitarios $\mathbf{u} := \mathbf{n}/\|\mathbf{n}\|$ y una regularización de la distribución espacial en torno a los valores locales más frecuentes (modas de la distribución).
- Rellenar los huecos que haya por debajo de un umbral mediante procesos de propagación asociados a la distribución de vectores normales.
- Superponer información adicional (relativa al color, la iluminación, las texturas, etc) para los datos geométricos rellenados.

Este tipo de estrategias son ubicuas en aplicaciones a diferentes áreas de Ingeniería como las relacionadas con la Mecánica de Medios Continuous B_1, la Restauración de Imagen en Visión Comuptacional B_3 ó procesos de Renderización, Simulación ó Animación en Informática Gráfica B_4. En todos los casos se realizan de forma manual o adaptándose a parámetros previamente evaluados. Interesa desarrollar sistemas expertos que sean capaces de capturar automáticamente la información más relevante y generarla mediante aprendizaje.