

Taller de Grafos: Rutas, Mapas y Redes Sociales

Cristina Chiralt y Fernando Hernando

Universidad Jaume I e Instituto Universitario de
Matemáticas y sus Aplicaciones de Castellón

Grado de Matemática Computacional

GRAFOS

Empezamos con un monólogo

<http://www.youtube.com/watch?v=lp-1rvtRYQg>

¿Qué son?

Un GRAFO es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones entre elementos de un conjunto.

Las aristas pueden ser dirigidas, es decir, flechas que representan la distribución de flujo entre muchos nodos. Sobre cada flecha puede ponerse un número que indica el flujo máximo que puede pasar por la flecha.

GRAFOS

Empezamos con un monólogo

<http://www.youtube.com/watch?v=lp-1rvtRYQg>

¿Qué son?

Un GRAFO es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones entre elementos de un conjunto.

Las aristas pueden ser dirigidas, es decir, flechas que representan la distribución de flujo entre muchos nodos. Sobre cada flecha puede ponerse un número que indica el flujo máximo que puede pasar por la flecha.

GRAFOS

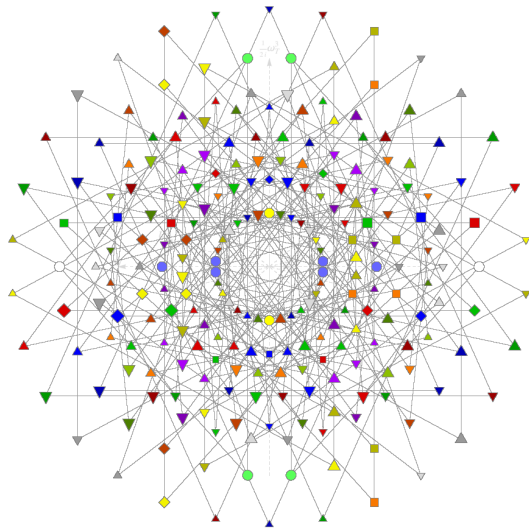
Empezamos con un monólogo

<http://www.youtube.com/watch?v=lp-1rvtRYQg>

¿Qué son?

Un GRAFO es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones entre elementos de un conjunto.

Las aristas pueden ser dirigidas, es decir, flechas que representan la distribución de flujo entre muchos nodos. Sobre cada flecha puede ponerse un número que indica el flujo máximo que puede pasar por la flecha.



UTILIDAD

- Tráfico de vehículos: transporte público urbano, aéreo, marítimo y por carretera, y sistemas de recolección y entrega de mercancías) y a la planeación y diseño de sistemas de servicios urbanos orientados a la logística (atención de emergencias bomberos y policía, urgencias médicas, servicios urgentes de reparaciones)
- Transporte de fluidos (agua, petróleo, gas, etc.)
- Organizar la venta de billetes compañía aérea: ¿cuánta gente puede volar en un día de Sevilla a Barcelona con o sin hacer escala? Hay que tener en cuenta las escalas y los horarios de los vuelos para encajar bien los enlaces entre un vuelo y el que tenemos que coger después para llegar a destino.
- Otros transportes: electricidad, BITS a través de la red, etc.

UTILIDAD

- Tráfico de vehículos: transporte público urbano, aéreo, marítimo y por carretera, y sistemas de recolección y entrega de mercancías) y a la planeación y diseño de sistemas de servicios urbanos orientados a la logística (atención de emergencias bomberos y policía, urgencias médicas, servicios urgentes de reparaciones)
- Transporte de fluidos (agua, petróleo, gas, etc.)
- Organizar la venta de billetes compañía aérea: ¿cuánta gente puede volar en un día de Sevilla a Barcelona con o sin hacer escala? Hay que tener en cuenta las escalas y los horarios de los vuelos para encajar bien los enlaces entre un vuelo y el que tenemos que coger después para llegar a destino.
- Otros transportes: electricidad, BITS a través de la red, etc.

UTILIDAD

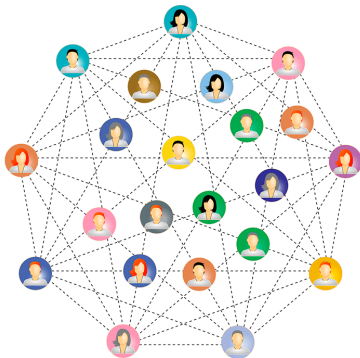
- Tráfico de vehículos: transporte público urbano, aéreo, marítimo y por carretera, y sistemas de recolección y entrega de mercancías) y a la planeación y diseño de sistemas de servicios urbanos orientados a la logística (atención de emergencias bomberos y policía, urgencias médicas, servicios urgentes de reparaciones)
- Transporte de fluidos (agua, petróleo, gas, etc.)
- Organizar la venta de billetes compañía aérea: ¿cuánta gente puede volar en un día de Sevilla a Barcelona con o sin hacer escala? Hay que tener en cuenta las escalas y los horarios de los vuelos para encajar bien los enlaces entre un vuelo y el que tenemos que coger después para llegar a destino.
- Otros transportes: electricidad, BITS a través de la red, etc.

UTILIDAD

- Tráfico de vehículos: transporte público urbano, aéreo, marítimo y por carretera, y sistemas de recolección y entrega de mercancías) y a la planeación y diseño de sistemas de servicios urbanos orientados a la logística (atención de emergencias bomberos y policía, urgencias médicas, servicios urgentes de reparaciones)
- Transporte de fluidos (agua, petróleo, gas, etc.)
- Organizar la venta de billetes compañía aérea: ¿cuánta gente puede volar en un día de Sevilla a Barcelona con o sin hacer escala? Hay que tener en cuenta las escalas y los horarios de los vuelos para encajar bien los enlaces entre un vuelo y el que tenemos que coger después para llegar a destino.
- Otros transportes: electricidad, **BITS** a través de la red, etc.

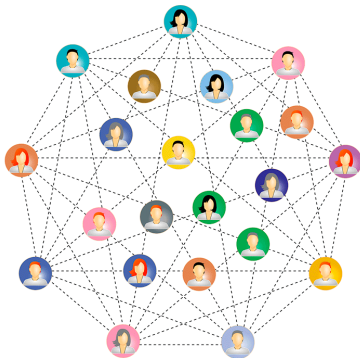
UTILIDAD

- Redes Sociales.
- Decodificar códigos. Aquí se usan un tipo de grafos llamados árboles.



UTILIDAD

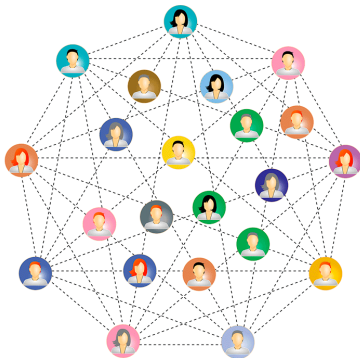
- Redes Sociales.
- Decodificar códigos. Aquí se usan un tipo de grafos llamados árboles.



- Dibujar mapas.

UTILIDAD

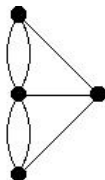
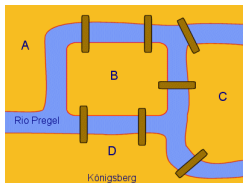
- Redes Sociales.
- Decodificar códigos. Aquí se usan un tipo de grafos llamados árboles.



- Dibujar mapas.

Los puentes de Königsberg

El **problema de los puentes de Königsberg** es un célebre problema matemático, resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya resolución dio origen a la teoría de grafos. Königsberg (hoy Kaliningrado) era en tiempos de Euler (siglo XVIII) una ciudad prusiana cruzada por siete puentes. Durante la época se suscitó la cuestión de si era posible recorrer toda la ciudad cruzando cada uno de los puentes una y sólo una vez.

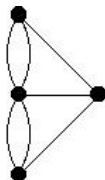
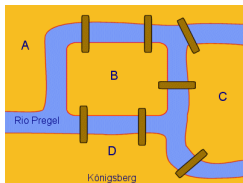


No había un camino que recorriese todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos. Recorridos Eulerianos!!!

Los puentes de Königsberg

El **problema de los puentes de Königsberg** es un célebre problema matemático, resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya resolución dio origen a la teoría de grafos.

Königsberg (hoy Kaliningrado) era en tiempos de Euler (siglo XVIII) una ciudad prusiana cruzada por siete puentes. Durante la época se suscitó la cuestión de si era posible recorrer toda la ciudad cruzando cada uno de los puentes una y sólo una vez.

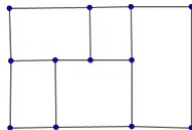
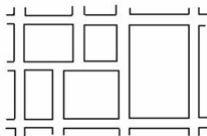


No había un camino que recorriese todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos. Recorridos Eulerianos!!!

Problema del cartero chino

Kwan Mei-Ko publico un artículo en un diario chino referido a optimizar la ruta de un cartero en 1962, debido a su autor, Alan Goldman sugirió llamarlo **problema del cartero chino**.

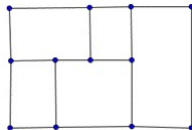
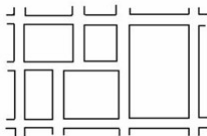
Formulación del problema: Un cartero debe repartir la correspondencia a cada una de las casas de su distrito, siendo la oficina de correos su punto de partida y llegada. Debemos encontrar una ruta óptima para que el cartero camine la menor distancia posible.



Problema del cartero chino

Kwan Mei-Ko publico un artículo en un diario chino referido a optimizar la ruta de un cartero en 1962, debido a su autor, Alan Goldman sugirió llamarlo **problema del cartero chino**.

Formulación del problema: Un cartero debe repartir la correspondencia a cada una de las casas de su distrito, siendo la oficina de correos su punto de partida y llegada. Debemos encontrar una ruta óptima para que el cartero camine la menor distancia posible.



Por tanto el cartero debe recorrer cada arista del grafo una vez al menos en su recorrido. Aunque hay veces en que el cartero no debe repetir el recorrido de ninguna arista.

A cada arista se le asocia un peso (la longitud del tramo correspondiente) y así el objetivo del problema del cartero sería encontrar un grafo de peso mínimo (longitud mínima).

Ciclos Eulerianos: Grafo cerrado que recorre todas las aristas sin repetirlas $\Leftrightarrow$ todos los vertices de grado par.

Por tanto el cartero debe recorrer cada arista del grafo una vez al menos en su recorrido. Aunque hay veces en que el cartero no debe repetir el recorrido de ninguna arista.

A cada arista se le asocia un peso (la longitud del tramo correspondiente) y así el objetivo del problema del cartero sería encontrar un grafo de peso mínimo (longitud mínima).

Ciclos Eulerianos: Grafo cerrado que recorre todas las aristas sin repetirlas $\Leftrightarrow$ todos los vertices de grado par.

Metro urbano

Problema: Dada una red de transporte, hallar la ruta óptima entre dos elementos de la red.



Modelización: Encontrar un camino mínimo entre cada par de vértices de un grafo conexo y ponderado. Algoritmo de Dijkstra.

Metro urbano

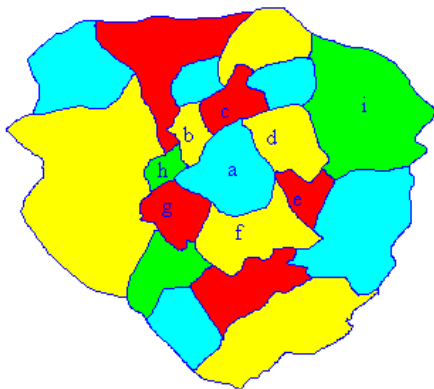
Problema: Dada una red de transporte, hallar la ruta óptima entre dos elementos de la red.



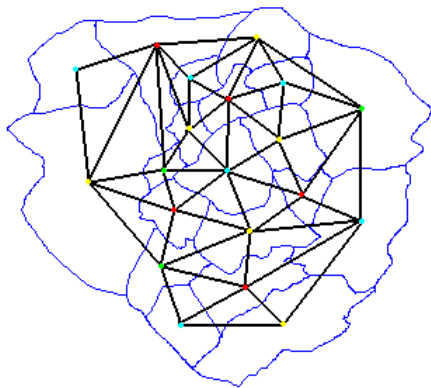
Modelización: Encontrar un camino mínimo entre cada par de vértices de un grafo conexo y ponderado. Algoritmo de Dijkstra.

Histórico: Mapa de los cuatro colores

Problema: ¿Cuántos colores son necesarios para dibujar un mapa político, con la condición obvia que dos países adyacentes no puedan tener el mismo color?



Histórico: Mapa de los cuatro colores



Respuesta: Cuatro colores son siempre suficientes para colorear un mapa. Algoritmo secuencial básico.

Otros ejemplos de grafos

Internet

Al visitar una página web y hacer click a un enlace, visto como un grafo los vértices son los sitios y las aristas son los enlaces. Si descartamos los sitios que no tienen enlaces, y escogemos dos páginas web al azar: ¿En cuántos clicks se puede pasar de la primera a la segunda?

Horarios

Confeccionar un calendario de exámenes, que comprenda el mínimo número de días, teniendo en cuenta que un estudiante no puede realizar más de un examen en un mismo día.

Otros ejemplos de grafos

Internet

Al visitar una página web y hacer click a un enlace, visto como un grafo los vértices son los sitios y las aristas son los enlaces. Si descartamos los sitios que no tienen enlaces, y escogemos dos páginas web al azar: ¿En cuántos clicks se puede pasar de la primera a la segunda?

Horarios

Confeccionar un calendario de exámenes, que comprenda el mínimo número de días, teniendo en cuenta que un estudiante no puede realizar más de un examen en un mismo día.

¿Cómo representa un grafo un ordenador?

Matrices

Una matriz es una caja con m-filas y n-columnas. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Matriz de Incidencia

Los grafos se representan con matrices simétricas. En la posición correspondiente con la fila i-esima y columna j-esima se escribe un 1 si los correspondientes vértices están conectados y un 0 en otro caso.

¿Cómo representa un grafo un ordenador?

Matrices

Una matriz es una caja con m-filas y n-columnas. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Matriz de Incidencia

Los grafos se representan con matrices simétricas. En la posición correspondiente con la fila i-esima y columna j-esima se escribe un 1 si los correspondientes vértices están conectados y un 0 en otro caso.

¿Cómo representa un grafo un ordenador?

Matrices

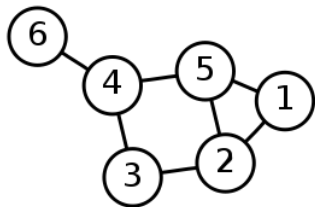
Una matriz es una caja con m-filas y n-columnas. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Matriz de Incidencia

Los grafos se representan con matrices simétricas. En la posición correspondiente con la fila i-esima y columna j-esima se escribe un 1 si los correspondientes vértices están conectados y un 0 en otro caso.

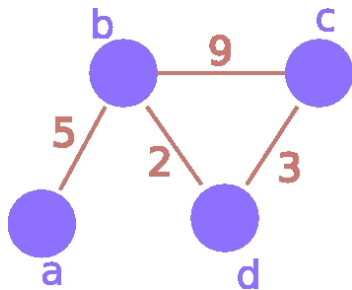
Ejemplo



Se representa con la matriz,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Grafo Pesado



Se representa con la matriz,

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

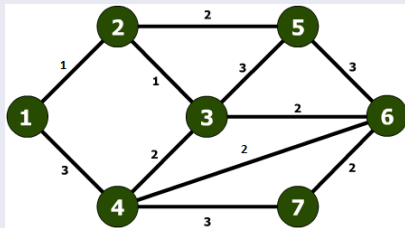
¿Cómo se manejan?

CON PROGRAMAS DE CÁLCULO SIMBÓLICO.
MATHEMATICA.

EJEMPLO PRACTICO

Gasto en transmitir información

La red de ordenadores de un negocio puede esquematizarse en el grafo siguiente. Los nodos corresponden a grandes maquinas numeradas del 1 al 7. Cada arista tiene un peso que refleja el gasto en euros de enviar 1 Gb. de información.



¿CUAL ES EL MODO MÁS BARATO DE HACERLO?

Cómo se introduce un grafo en Mathematica

Abrimos el programa. Y luego le pedimos que cargue un paquete específico

Paquete

```
<<DiscreteMath`Combinatorica`
```

Modo elemental de introducir un grafo

Ponemos una matriz que indica las flechas y otra las coordenadas de los puntos. $b =$

```
Graph[{ {0, 1, 0, 3, 0, 0, 0}, {1, 0, 1, 0, 2, 0, 0},  
 {0, 1, 0, 2, 3, 2, 0}, {3, 0, 2, 0, 0, 2, 3}, {0, 2, 3, 0, 0, 3, 0}},  
 {0, 0, 2, 2, 3, 0, 2}, {0, 0, 0, 3, 0, 2, 0}},  
 {{-1., 0}, {-1., 1.}, {0, 0}, {-1., -1.}, {1., 1.}, {1., 0}, {1., -1.}}]
```

Para verlo en pantalla. **ShowLabeledGraph[b]**

NUESTRO PROBLEMA

Basta poner `ShortestPath[b, 1, 6]`

SOLUCIÓN: 1,2,3,6

NUESTRO PROBLEMA

Basta poner `ShortestPath[b, 1, 6]`

SOLUCIÓN: 1,2,3,6