Taller de grafs: rutes, mapes i xarxes socials

Cristina Chiralt y Fernando Hernando

Universidad Jaume I e Instituto Universitario de Matemáticas y sus Aplicaciones de Castellón

Grado de Matemática Computacional

GRAFOS

¿Qué son?

Un GRAFO es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones entre elementos de un conjunto.

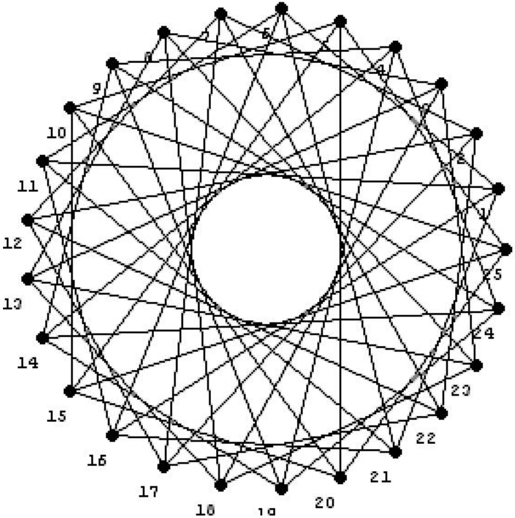
Las aristas puedes ser dirigidas, es decir, flechas que representan la distribución de flujo entre muchos nodos. Sobre cada flecha puede ponerse un número que indica el flujo máximo que puede pasar por la flecha.

GRAFOS

¿Qué son?

Un GRAFO es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones entre elementos de un conjunto.

Las aristas puedes ser dirigidas, es decir, flechas que representan la distribución de flujo entre muchos nodos. Sobre cada flecha puede ponerse un número que indica el flujo máximo que puede pasar por la flecha.



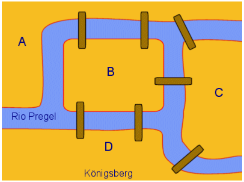
9
10
11
12
13
14
15
16
17
20
21
22
23
24

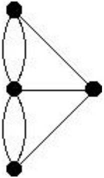
UTILIDAD

- Tráfico de vehículos.
- Transporte de fluidos (agua, petróleo, gas, etc.)
- Otros transportes: electricidad, BITS a través de la red.
- Dibujar mapas
- Decodificar códigos (aquí se usan un tipo de grafos llamados árboles).
- Redes Sociales.
- Biología.

Los puentes de Königsberg

El problema de los puentes de Königsberg es un célebre problema matemático, resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya resolución dio origen a la teoría de grafos.
Königsberg (hoy Kaliningrado) era en tiempos de Euler (siglo XVIII) una ciudad prusiana cruzada por siete puentes. Durante la época se suscitó la cuestión de si era posible recorrer toda la ciudad cruzando cada uno de los puentes una y sólo una vez.

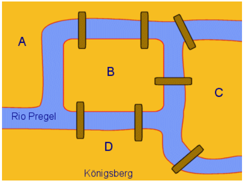


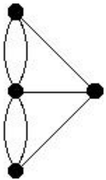


No había un camino que recorriese todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos. Recorridos Eulerianos!!!

Los puentes de Königsberg

El problema de los puentes de Königsberg es un célebre problema matemático, resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya resolución dio origen a la teoría de grafos.
Königsberg (hoy Kaliningrado) era en tiempos de Euler (siglo XVIII) una ciudad prusiana cruzada por siete puentes. Durante la época se suscitó la cuestión de si era posible recorrer toda la ciudad cruzando cada uno de los puentes una y sólo una vez.





No había un camino que recorriese todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos. Recorridos Eulerianos!!!

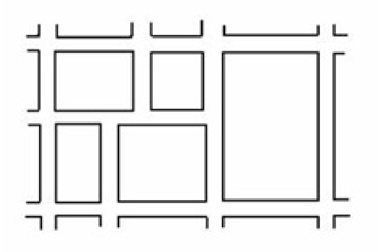
EL cartero chino

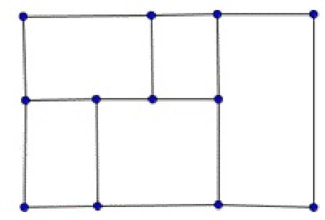
Kwan Mei-Ko publico un artículo en un diario chino referido a optimizar la ruta de un cartero en 1962, debido a su autor, Alan Goldman sugirió llamarlo problema del cartero chino.

Problema: Un cartero debe repartir la correspondencia a cada una de las casas de su distrito, siendo la oficina de correos su punto de partida y llegada. Deberemos encontrar una ruta óptima para que el cartero camine la menor distancia posible.

EL cartero chino

Reformulación el problema en teoría de grafos: debemos construir un grafo en el que las calles del barrio son las aristas del grafo que tiene por vértices las intersecciones de las calles.

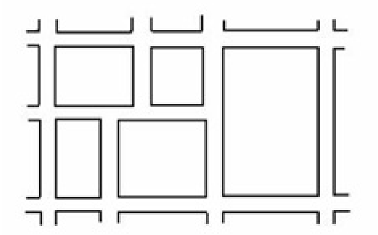


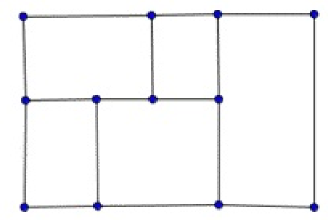


Ciclo Euleriano: Si tiene todos los vértices de grado par.

EL cartero chino

Reformulación el problema en teoría de grafos: debemos construir un grafo en el que las calles del barrio son las aristas del grafo que tiene por vértices las intersecciones de las calles.





Ciclo Euleriano: Si tiene todos los vértices de grado par.

Metro urbano

Problema: Dada una red de transporte, hallar la ruta óptima entre dos elementos de la red.

Modelización: Encontrar un camino mínimo entre cada par de vértices de un grafo conexo y ponderado. Algoritmo de Dijkstra.

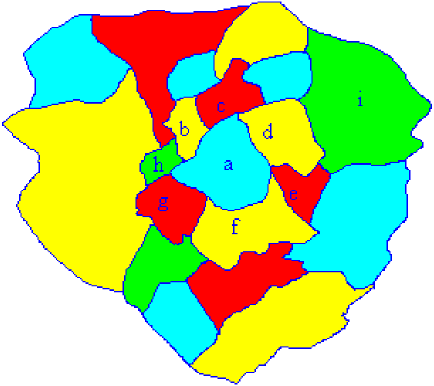
Metro urbano

Problema: Dada una red de transporte, hallar la ruta óptima entre dos elementos de la red.

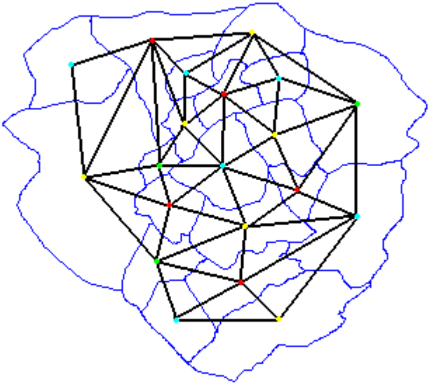
Modelización: Encontrar un camino mínimo entre cada par de vértices de un grafo conexo y ponderado. Algoritmo de Dijkstra.

Histórico: Mapa de los cuatro colores

Problema: ¿Cuántos colores son necesarios para dibujar un mapa político, con la condición obvia que dos países adyacentes no puedan tener el mismo color?



Histórico: Mapa de los cuatro colores



Respuesta: Cuatro colores son siempre suficientes para colorear un mapa. Algoritmo secuencial básico.

Representación matemática de un grafo

Matrices

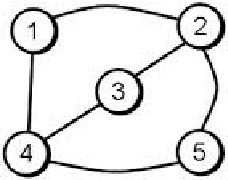
Se puede definir una **matriz**, como un conjunto de elementos (números) ordenados en una tabla que tiene *m*-filas y *n*-columnas.

Cada uno de los elementos de la matriz (aij) tiene dos subíndices. El primero i indica la fila a la que pertenece y el segundo j la columna.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz de incidencia de un grafo

Un grafo se representa con una matriz cuadrada (y simétrica) que tiene tantas filas como vértices. Si el vértice i y el vértice j estan unidos por una arista con peso w entonces en la posición (i, j) de la matrices se escribe w (cero en caso de no existir arista).



M	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0

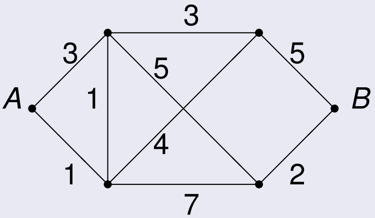
¿Cómo se manejan?

CON PROGRAMAS DE CÁLCULO SIMBÓLICO.
MATHEMATICA.

EJEMPLO PRACTICO

Gasto en transmitir información

La red de ordenadores de una universidad puede esquematizarse en el grafo siguiente.



Cada arista tiene un peso que refleja el gasto en euros de enviar 1 Gb. de información. Queremos enviar un paquete de información entre la máquina A y B.

¿CUAL ES EL MODO MÀS BARATO DE HACERLO?

Cómo se introduce un grafo en Mathematica

Abrimos el programa. Y luego le pedimos que cargue un paquete específico

Paquete

≪DiscreteMath‘Combinatorica‘

Modo elemental de introducir un grafo

Ponemos una matriz que indica las flechas y otra las coordenadas de los puntos.
G= Graph$[\{\{0,1,0,1,1\},\{1,0,1,0,1\},$
$\{0,1,0,1,1\},\{1,0,1,0,1\},\{1,1,1,1,0\}\},$
$\{\{0,1.\},\{-1.,0\},\{0,-1.\},\{1.,0\},\{0,0\}\}]$

Para verlo en pantalla. ShowLabeledGraph[G]

NUESTRO PROBLEMA

Basta poner ShortestPath[G, 1, 6]
SOLUCIÓN: 1, 2, 3, 4, 6