Ejercicio #1

Considera el polinomio $x^3 - 3x + 4$.Calcula su factorización en los siguientes cuerpos:

1. $\mathbb{F}_5$.
2. Un cuerpo finito con 125 elementos.
3. Los números racionales.
4. Los números reales.
5. Los números complejos.

Ejercicio #2

Los **polinomios de Conway** son polinomios irreducibles sobre $\mathbb{F}_p$ que SAGE utiliza para construir ideales maximales sobre anillos de polinomios, esto es, sus anillos cocientes son cuerpos. Son unja forma cannica de elegir un polinomio para cada primo p y adems tiene propiedades buenas con los subcuerpos. El comando

```
conway_polynomial(p, n)
```

proporciona el polinomio irreducible de grado n sobre $\mathbb{F}_p$. Ejecuta

```
conway_polynomial(5, 4)
```

Calcula a continuación

```
conway_polynomial(5, 2)
```

¿Puedes ver alguna relación?

Puedes consultar más información en:
`http://www.math.rwth-aachen.de/~Frank.Luebeck/data/ConwayPol/index.html`
`http://www.sagemath.org/doc/reference/finite_rings/sage/rings/finite_rings/conway_polynomials.html`
`http://en.wikipedia.org/wiki/Conway_polynomial_%28finite_fields%29`

Ejercicio #3

Construye un cuerpo finito de orden 729 como un cociente utilizando el polinomio de Conway adecuado.

Ejercicio #4

Define los polinomios $p = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ y $q = x^4 + 2x^2$ como polinomios con coeficientes enteros. Calcula `gcd(p, q)` y verifica que el resultado divide realmente a p y a q utilizando

```
.quo_rem()
```

Utiliza `xgcd(p, q)` para calcular la expresión

$$\gcd(p, q) = r(x)p(x) + s(x)q(x).$$

Ejercicio #5

En un anillo de polinomios sobre un cuerpo todo ideal es principal. Construye varios ideales generados por más de un polinomio y utilizando

```
.gen()
```

calcula un generador único para el ideal. ¿Puedes explicar como calcula SAGE dicho polinomio?

Referencia:

Sage for Abstract Algebra: A Supplement to Abstract Algebra, Theory and Applications by Robert A. Beezer (Department of Mathematics and Computer Science University of Puget Sound)