Ejercicio #1

Define `A` en SAGE como el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ ejecutando uno de los siguientes comandos:

```
R = ZZ
R = Integers()
```

El comando

```
R.ideal(4)
```

creará el ideal principal $4\mathbb{Z}$. El mismo comando puede aceptar más de un generador, por ejemplo,

```
R.ideal(21, 9)
```

crea el ideal $\{a \cdot 21 + b \cdot 9 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Crea varios ideales de $\mathbb{Z}$ con dos generadores y pregunta a SAGE qu'e haga un `print` de cada uno. Explica lo que observas y crea un código en SAGE que compruebe tu observación para unos miles de ejemplos diferentes.

Ejercicio #2

Crea el cuerpo finito $\mathbb{F}_{81}$ con el comando

```
F.<t>=FiniteField(3^4)
```

1. Lista todos los elementos de $\mathbb{F}_{81}$.
2. Calcula los generadores de $\mathbb{F}_{81}$.
3. Calcula el primer generador de $\mathbb{F}_{81}$ y almacnalo en la variable u con el comando

   ```
   u = F.gen(0)
   ```

4. Calcula las primeras 80 potencias de u y comenta el resultado.
5. El generador u es un cero de un polinomio sobre $\mathbb{F}_3$. Calcula el polinomio con

   ```
   F.modulus()
   ```

   y utilízalo para explicar la forma que tiene el cuarto generador de la lista creada en el apartado anterior.

Ejercicio #3

Construye y analiza el anillo cociente H siguiendo los siguientes pasos:

1. Utiliza

   ```
   P.<z>=(Integers(7))[]
   ```

   para construir el anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{F}_7$.

2. Utiliza

   ```
   K = P.ideal(z^2+z+3)
   ```

   para generar el ideal $\langle z^2 + z + 3 \rangle \subseteq P$.

3. Con el comando

   ```
   H = P.quotient(K)
   ```

   construye el anillo H y utiliza SAGE para comprobar que es un cuerpo.

4. Como en el ejercicio anterior obtén un generador y estudia la correspondiente secuencia de potencias del mismo.

Referencia:

Sage for Abstract Algebra: A Supplement to Abstract Algebra, Theory and Applications by Robert A. Beezer (Department of Mathematics and Computer Science University of Puget Sound)