Universidad de Valladolid

Curso 2016-2017. Antonio Campillo López. Actividad Docente

Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología

Facultad de Ciencias, Despacho A-338

Trabajos Fin de Grado Propuestos

Trabajos Fin de Máster Propuestos

Matemática Discreta. Grado de Matemáticas. Tercer Curso

Teoría de Números y Aplicaciones. Máster Universitario de Investigación en Matemáticas

TRABAJOS FIN DE GRADO. Grado en Matemáticas

TFG-1. Título: La Conjetura Jacobiana

Breve descripción: Desde 1939, cuando fue formulada por Keller, la conjetura jacobiana es uno de los principales problemas abiertos de álgebra. Afirma que si una aplicación polinómica de dos o más variables (sobre el cuerpo de los números complejos) tiene jacobiano constante y no nulo, entonces es una aplicación inversible y su inversa es también polinómica. Se trata de un problema de enunciado sencillo, fácil de comprender, cuya solución es aún un gran emigna. El trabajo consiste en realizar un estudio sobre los intentos, técnicas, formulaciones equivalentes y enfoque conceptual de su dificultad, incluyendo los que se realizan en la actualidad.

TFG-2. Título: Teorema de Cayley-Bacharah en Geometría Combinatoria.

Breve descripción: El teorema de Cayley-Bacharach es un resultado clásico de geometría sintética de gran simplicidad. Descubierto hace 130 años, es la evolución general de los aún más clásicos teoremas sobre los exágonos en pares de rectas y cónicas de Pappus y Pascal, o el de Chasles que afirma que si una cúbica plana pasa por ocho de los nueve puntos de intersección de dos cúbicas, entonces también tiene que pasar por el noveno. Por su formulación analítica, el teorema de Cayley-Bacharach es también un principio de interpolación polinómica en varias variables, y junto a la geométrica un importante argumento aplicado en el área emergente llamada geometría combinatoria. El trabajo consiste en realizar un estudio sistemático de los resultados, principios, argumentos y aplicaciones, incluyendo entre éstas los recientes avances sobre los números de rectas que contienen un número concreto de puntos de una configuración de puntos del plano dada, que son la evolución de la clásica teoría que había iniciado Sylvester.

TFG-3. Título: Fórmulas de Brion y de Varchenko.

Breve descripción: Los politopos reticulares son envolventes convexas de configuraciones finitas de puntos reticuarles, es decir aquellos cuyas coordenadas son n-uplas de números enteros. El clásico problema enumerativo de contar el número de puntos reticulares que contienen dichos politopos, obtuvo una solución inesperada hace 30 años cuando, por dos procedimientos distintos, Brion y Varchenko descubrieron fórmulas de gran sencillez que permitían no sólo contar dichos puntos sino exhibir de qué puntos se tratan con un cálculo algebraico. Ambas fórmulas, que utilizan la expresión racional de la suma de la serie generatriz de los puntos reticulares de los conos racionales, no disponen todavía de pruebas sencillas. El trabajo consiste en realizar un estudio de la formulación, comprensión, prueba y aplicación, de las fórmulas de Brion y de Varchenko, así como del cálculo de las mencionadas expresiones racionales por medio de un algoritmo polinómico.

TFG-4. Título: Matemáticas de la Teoría de la Información.

Breve descripción: Se conmemora en 2016 el centenario del nacimiento de Claude Shannon, cuyo artículo "A Mathematical theory of Communication" publicado en 1948 es es trabajo referente que ha originado la Teoría de la Información. Las nociones de mensaje, emisor, transmisor, canal, receptor y destino forman parte del modelo matemático de Shannon, que alrededor de cuatro décadas después se implementaría comercialmente. La capacidad creativa de Shannon ha sido extraordinaria y nítidamente matemática. Shannon, cuantificó por completo la información introduciendo el bit como unidad de media, y la noción de capacidad para los canales de transmisión o almacenamiento, estableciendo los límites fundamentales, desarrollando los conceptos de redundancia y entropía en la información entre otros. Igualmente, con otro artículo referente "A Mathematical Theory of Cryptografy" publicado en 1949 es el precursor de la Criptografía, y en buena parte de la Matemática Industrial y en el desarrollo de soluciones computacionales a problemas relevantes de las ciencias. También creó modelos matemáticos y máquinas en el ámbito del divertimento, como los juegos malabares, uniciclos, ajedrez y otros. El objeto del TFM es el de revisar los artículos referentes, algunos de los modelos y resultados de Shannon, así como proporcionar una versión actual de las teorías y resultados matemáticos de la teoría de la información.

TRABAJOS FIN DE MÁSTER. Máster Universitario en Investigación Matemática

TFM-1. (Co-director Edgar Martínez Moro). Título: Códigos MDS y otros códigos con corrección eficaz.

Breve descripción: Los avances en las tecnologías de la comunicación motivan el estudio de los códigos correctores de errores, su descripción, su codificación y decodificación. La amplia clase de códigos lineales (subespacios de dimensión k de espacios vectoriales de dimensión finita n sobre cuerpos finitos), que se describe en términos de álgebra, aritmética y geometría algebraica, permite localizar, entre otros muchas aplicaciones, familias de códigos con buena optimización simultánea de su redundancia (proporción de símbolos añadidos a un texto antes de ser transmitido) y de su capacidad correctora (proporción de errores que es posible corregir en el texto una vez recibido). Sin embargo la localización de códigos y familias apropiadas así como su decodificación eficaz presentan muchas preguntas y problemas fundamentales en este campo. Por una parte, salvo avances parciales recientes debidos a S. Ball, permanece abierta la conjetura MDS que afirma que para valores arbitrarios de k,n (salvo pocas excepciones conocidas) existen códigos de máxima distancia de separación (los denominados MDS), es decir para los que la desigualdad de Singleton entre sus parámetros es una igualdad. Por otra parte, en la práctica no basta con construir buenos códigos y familias, sino también disponer de algoritmos eficaces para su decodificación. Aunque ello es posible en determinados casos, existe un planteamiento, creado independiente de R. Pellikaan y R. Kötte, a través de la noción abstracta de "pares correctores" para disponer de tales algoritmos. Sólo recientemente I. Márquez y R. Pellikaan han concretado esta noción, mostrado que los códigos MDS que tienen pares correctores de errores son exactamente los códigos de Reed Solomon generalizados, que son códigos AG (algebraico-geométricos) definidos sobre una curva proyectiva racional. El objeto del TFM es el de revisar exhaustivamente todo lo anterior, y el de extender los planteamientos y resultados anteriores para otros códigos lineales, en particular los que están definidos sobre anillos o sobre variedades más generales.

TFM-2. Título: El método polinómico en combinatoria y aritmética. Geometría combinatoria.

Breve descripción: Son multitud de los ejemplos en la investigación actual en los que se han logrado formulaciones avanzadas y notables progresos, utilizando la combinatoria de los polinomios en varias variables con coeficientes en algún cuerpo (real, complejo, racional, finitos) o en el anillo de números enteros así como la visión geométrica o aritmética relacionada con ellos. El "Método Polinómico", llamado así hoy día por autores como Tao, no es más que el algebraico-geométrico clásico enfocado hacia la resolución de problemas en combinatoria (o en topología cuando se consideran configuraciones de puntos euclídeos). Ha generado áreas matemáticas emergentes conocidas como "Geometría Combinatoria" o "Combinatoria Aritmética". La profundización formativa simultánea sobre estos problemas y áreas es un objetivo general hacia el que se orienta el trabajo. El objetivo específico es, por un lado, el estudio de técnicas clásicas y actuales, como son el teorema de Bezout para las intersecciones de hipersuperficies, el método de Stepanov para contar puntos sobre las curvas elípticas, o el teorema de los ceros en su versión combinatoria debida a Alon. Por otro lado, es el estudio de los recientes e inesperados resultados que resuelven la célebre conjetura de Kakeya para cuerpos finitos (abierta todavía en el caso original), y otros problemas relacionados, mediante polinomios, debido a trabajos actuales de Dvir, Tao, Ellemberg o Bourgain. También lo son los recientes resultados de Szemerédi sobre el máximo número de incidencias punto-recta o los de Melchior sobre autorrelaciones tipo Hirzebruch de los sucesivos números de rectas incidentes con números concretos de puntos, cuando se tienen respectivos conjuntos de rectas y puntos dados. El Método Polinómico permite abordar problemas relevantes por medio de técnicas elementales inspiradas en la geometría y en la aritmética.

MATEMÁTICA DISCRETA. Grado de Matemáticas. Obligatoria. Tercer Curso.

Créditos: 6

Competencias: Combinatoria, cálculo algebraico, modelización, enumeración, algoritmos, existencia de modelos, aplicaciones cotidianas y sociales.

Contenidos: Combinatoria enumerativa. Permutaciones, Enumeración de Polya, aplicación del cálculo con polinomios en varias variables. Sucesiones recurrentes, aplicación del cálculo con series de potencias. Recurrencia lineal, polinómica y diferencial. Combinatoria básica, números combinatorios, aplicación del cálculo de exponenciales no enteras de series. Números de Stirling de primera y segunda clase. Grafos duales, caras y dualidad. Teorema de Euler, relaciones numéricas, número cromático, caracterización de grafos planos. Combinatoria existencial. Teoría de Ramsey. Combinatoria constructiva. Emparejamientos, flujos en redes. Aplicaciones.

Objetivos/Resultados del aprendizaje: Modelización de problemas de la realidad cotidiana en términos de problemas combinatorios. Desarrollar técnicas de matemática discreta apropiadas para comprender la solución a los problemas de modelos de aplicación frecuente. Focalizar sistemáticamente en problemas combinatorios enumerativos, existenciales o constructivos, así como en sus aplicaciones.

Ejercitar el cálculo con polinomios de varias variables y aplicarlo a la determinación exacta del número de coloraciones diferentes de un objeto módulo la acción de un grupo. Ejercitar el cálculo con series de potencias de una o varias variables y aplicarlo al cálculo de funciones generatrices de sucesiones recurrentes comprendiendo la correspondencia entre el tipo de recurrencia y la naturaleza de la función generatriz asociada. Ejercitar el cálculo combinatorio básico (permutaciones, variaciones, combinaciones, …) por medio de funciones generatrices. Comprender los números de Stirling de primera y segunda clase y las relaciones entre ellos.

Manejar los grafos planos y la dualidad entre ellos, a través de relaciones entre números de vértices, aristas y caras, y sus aplicaciones. Estudiar los grafos asociados a poliedros regulares y otros grafos de interés teórico y práctico. Comprender los principios de las coloraciones de grafos y mapas planos. Ejercitar la inspección en grafos a través de invariantes prácticos para distinguirlos. Comprender los grafos eulerianos y su caracterización. Comprender los grafos hamiltonianos y algunos ejemplos significativos no hamiltonianos. Comprender, a través de coloraciones de aristas o caras de complejos, cómo deducir la existencia de configuraciones monocolor. Comprender los resultados centrales de la teoría de Ramsey y sus aplicaciones a problemas de relaciones sociales, en particular el principio del palomar. Ejercitar la noción de grafo completo.

Conocer los criterios para la existencia de emparejamientos estables y para la existencia de emparejamientos máximos. Ejercitar la noción de grafo bipartito. Comprender el problema del transporte y los modelos matemáticos de flujos en redes. Visualizar cada resultado simultáneamente a través de modelos cotidianos, modelos de combinatoria y aplicación de técnicas matemáticas (polinomios, series, grafos, complejos, fórmulas, algoritmos,…).

TEORÍA DE NÚMEROS Y APLICACIONES. Máster Universitario de Investigación en Matemáticas. Optativa.

Créditos: 6

Competencias: Números enteros, p-ádicos, modulares, enteros de cuerpos de números. Clasificación de formas cuadráticas. Funciones zeta en artimética. Distribución de números primos. Resultados recientes.

Contenidos: Enteros y números racionales. Enteros y cuerpos p-ádicos. Valoraciones p-ádicas. Números reales. Cuerpos finitos. Reciprocidad cuadrática. Clasificación de formas cuadráticas sobre cuerpos finitos, números p-ádicos y números racionales. Representación. Teorema de Hasse-Minkowski. Anillos de enteros y cuerpos de números. Teoría de Dedekind. Ramificación y discriminantes. Grupos de unidades de los cuerpos de números. Cuerpos de números cuadráticos, ciclotómicos. Funciones zeta de Riemann, Dedekind, Igusa y Weil. Números primos, distribución y densidad. Teorema de Dirichlet. Teorema del número primo y conjetura de Riemann. Resultados recientes relevantes en teoría de números.

Objetivo: Estudio científico y técnico en profundidad, y utilización práctica, de los anillos de números enteros, p-ádicos, modulares y enteros algebraicos. Cuerpos finitos, reciprocidad cuadrática y clasificación de formas cuadráticas. Comprender y ejercitar la teoría de Hasse- Minkowski, en particular la clasificación de formas cuadráticas racionales a través de reducción p-ádica. Comprender y ejercitar la estructura los anillos de enteros de cuerpos de números, la factorización de Dedekind en términos de ideales primos, la ramificación de ideales y el papel del discriminante. Comprender las propiedades de finitud y ejercitar el cálculo de las unidades de los anillos de enteros de cuerpos de números.

Formular y comprender las funciones zeta de Riemann y Dedekind asociadas a los cuerpos de números, así como las funciones zeta de Igusa y de Weil, asociadas respectivamente a los números de soluciones p-ádicas y sobre cuerpos finitos de ecuaciones algebraicas, comprendiendo los principales resultados y estado de las conjeturas en este ámbito. Comprender los resultados clásicos de distribución de números primos, y analizar el teorema del número primo y las fórmulas asintóticas que permiten establecerlo, analizando el papel de la hipótesis de Riemann en el conocimiento de la distribución.

Conocer los resultados de números primos en progresiones aritméticas, comprendiendo resultados como el teorema de Dirichlet y los recientes de Green-Tao y Tao. Conocer también otros resultados y conjeturas relevantes en variados problemas de teoría de números, como son los probados de Mordell, Fermat, o la débil de Golbach, o las conjeturas abc y de la monodromía, o las de Birch y Swinnerton-Dyer y la hipótesis de Riemann que son dos de los conocidos Problemas del Milenio.