Familias Hopf Galois separables

Teresa Crespo, Anna Rio, Montserrat Vela (Presentación)

En la teoría de Galois clásica, se asocia a una extensión de cuerpos K/k normal y separable un grupo G que es el grupo de k-automorfismos de K, lo cual nos proporciona una acción de este grupo sobre el cuerpo K. Extendiendo esta acción sobre el álgebra de grupo $k[G]$, obtenemos un morfismo $\mu : k[G] \to \mathrm{End}_k(K)$ que, por extensión de escalares a K, proporciona un isomorfismo $K \otimes_k k[G] \to \mathrm{End}_k(K)$. Tenemos asimismo el Teorema Fundamental de la teoría de Galois que establece una correspondencia biyectiva entre el retículo de subextensiones de K/k y el retículo de subgrupos de G (o, equivalentemente, de subálgebras de $k[G]$).

En 1969, Chase y Sweedler [4] desarrollaron la teoría de Hopf Galois para extensiones de cuerpos, como generalización de la teoría de Galois clásica: Una extensión finita de cuerpos K/k es una extensión Hopf Galois si existe una k-álgebra de Hopf H finita coconmutativa y una acción de Hopf, es decir una aplicación k-lineal $\mu : H \to \mathrm{End}_k(K)$, que induce, por extensión de escalares, un isomorfismo $K \otimes_k H \to \mathrm{End}_k(K)$. Como el álgebra de grupo $k[G]$ es un álgebra de Hopf, en particular, todas las extensiones de Galois tienen una estructura Hopf Galois que viene dada por $H = k[G]$ y la acción por k-automorfismos. Chase y Sweedler determinan también que, para una extensión Hopf Galois, la correspondencia entre el conjunto de subálgebras de Hopf de H i el retículo de subextensiones de K/k que envia una subálgebra de Hopf H' de H al subcuerpo de K fijo por H' es inyectiva e invierte las inclusiones.

En 1987, Greither y Pareigis [5] consideraron el caso de las extensiones Hopf Galois separables y probaron que éstas pueden ser descritas en términos de teoría de grupos a partir del grupo de Galois G de la clausura galoisiana $\tilde{K}$ de la extensión de cuerpos considerada. En este caso el álgebra de Hopf es una $\tilde{K}$-forma de una k-álgebra de grupo $k[N]$ para un cierto grupo N con acción de G. La condición Hopf Galois se traduce entonces en términos del grupo N y la acción de G sobre él.

A diferencia de lo que ocurre con la teoría clásica en la que el grupo de Galois está unívocamente determinado por la extensión de Galois, las extensiones Hopf Galois separables tienen asociados diferentes grupos que dan lugar a las diferentes estructuras Hopf Galois. Estos autores introdujeron también la subclase de las extensiones casi clásicamente Galois, que, en particular, poseen una estructura Hopf Galois para la cual la correspondencia de Galois es biyectiva.

El trabajo [1] es una reseña de diversos resultados de la teoría de Hopf Galois.

En esta exposición, consideramos una cuestión diferente que nos permite apreciar la riqueza de las distintas estructuras y la información que nos proporcionan. Nos preguntamos por la imagen de la correspondencia de Galois para cada una de las diferentes estructuras Hopf Galois de una extensión dada. Para ello, presentamos una reformulación de la correspondencia de Galois en la teoría de Hopf Galois en términos de grupos que nos permitirá conocer para cuáles de estas estructuras la correspondencia de Galois es biyectiva y más generalmente cómo es el subretículo de subextensiones intermedias de cuerpos para una estructura Hopf Galois dada. En particular, vemos que la clase de las extensiones que admiten alguna estructura Hopf Galois con correspondencia de Galois biyectiva es mayor que la clase de extensiones casi clásicamente Galois pero menor que la de todas las extensiones que admiten estructura Hopf Galois.

Consideramos, en primer lugar, una familia de extensiones cuya clausura galoisiana tiene grupo de Galois el grupo de Frobenius $F_{p(p-1)}$ para $p \geq 5$ primo. Estas extensiones tienen, al menos, dos estructuras Hopf Galois diferentes, una de las cuales no es casi clásicamente Galois pero para la cual la correspondencia de Galois asociada es biyectiva. Esta familia nos proporciona un ejemplo de extensiones Hopf Galois que no son clásicament Galois pero que están dotadas de una estructura para la cual la correspondencia de Galois es biyectiva. En segundo lugar consideramos extensiones de Galois con grupo de Galois el diedral D_{2p} para $p \geq 3$ primo. N.P. Byott calculó que hay $p+2$ estructuras Hopf Galois diferentes para estas extensiones. En este caso probamos que cada una de estas estructuras da lugar a un subretículo diferente del retículo de extensiones intermedias. En tercer lugar, mostramos una extensión Hopf Galois para la cual ninguna de las posibles estructuras Hopf Galois de la que pueda ser dotada da lugar a una correspondencia de Galois biyectiva. Estos resultados forman parte del trabajo [2].

Para finalizar, mostraremos el ejemplo estudiado en [3] de una extensión Hopf Galois con 4 estructuras diferentes, dos de las cuales con álgebras de Hopf isomorfas y con la misma imagen por la correspondencia de Galois, pero con acciones diferentes.

Referències

[1] T. Crespo, A. Rio, M. Vela, *From Galois to Hopf Galois: theory and practice*, por aparecer en Contemporary Mathematics (2015).

[2] T. Crespo, A. Rio, M. Vela, *On the Galois correspondence theorem in separable Hopf Galois theory*, por aparecer en Publicacions Matemàtiques (2015-1016).

[3] T. Crespo, A. Rio, M. Vela, *Non-isomorphic Hopf Galois structures with isomorphic underlying Hopf algebras* . J. Algebra **422** (2015) 270-276.

[4] S.U. Chase, M.E. Sweedler, *Hopf algebras and Galois theory*. Springer, 1969.

[5] C. Greither, B. Pareigis, *Hopf Galois theory for separable field extensions*. J. Algebra, **106** (1987), 239-258.