JTN 2015
Universidad de Valladolid
June 29-July 3, 2015

Puntos visibles desde el origen: un enfoque probabilístico

J. Cilleruelo[1], J. Guijarro-Ordóñez[2]

[1] *Instituto de Ciencias Matemáticas (CSIC-UAM-UC3M-UCM) y Universidad Autónoma de Madrid, España, franciscojavier.cilleruelo@uam.es*
[2] *Universidad Complutense de Madrid, España, jorge.guijarro.ord@hotmail.com*

Consideremos el plano real junto con el retículo formado por los puntos de coordenadas enteras. Decimos que un punto de este retículo es *visible desde el origen* si el segmento que une dicho punto con el origen de coordenadas no pasa por ningún otro punto de coordenadas enteras. Es fácil ver que un tal punto es visible desde el origen si y sólo si sus coordenadas son primas entre sí, por lo que hay un número infinito de ellos y es natural preguntarse por su densidad. Es un resultado clásico bien conocido que el número de puntos visibles en el cuadrado de lado n se comporta asintóticamente como $\frac{6}{\pi^2}n^2$.

Este problema también admite una lectura combinatoria: el número de fracciones irreducibles distintas que se pueden obtener como cocientes de elementos de $A = \{1,\ldots,n\}$ (que se denota $|A/A|$) es asintóticamente $\frac{6}{\pi^2}n^2$, ya que cada posible recta desde el origen se corresponde de forma unívoca con una de estas fracciones. Por tanto, el problema de la visibilidad en $A\times A$ es equivalente al de estimar el cardinal $|A/A|$; y con esto ya tenemos tres interpretaciones del problema: la definición geométrica inicial, la cuestión de la coprimalidad, y la combinatoria de $|A/A|$.

Ahora bien, ¿qué sucede si en vez de considerar todo el conjunto $\{1,...,n\}$ escogemos un subconjunto A suyo? En primer lugar, la definición de punto visible se precisa a que el segmento que una el origen con el punto no pase por otro punto *de* $A\times A$. Y, en estas condiciones, la equivalencia con la coprimalidad se pierde: puede que los puntos intermedios ya no estén en $A\times A$. Más aún, la respuesta depende de qué conjunto A escojamos y, más específicamente, de cuál es su estructura multiplicativa. Por ejemplo, si los elementos de A son todos primos, *todos* los puntos de $A\times A$ serán visibles menos los de la diagonal y $|A/A|$ será asintóticamente como $|A|^2$. En el extremo opuesto, si los elementos de A forman una *progresión geométrica*, entonces $|A/A| = 2|A|-1$ y *casi ningún* punto de $A\times A$ será visible desde el origen. De hecho, aunque el conjunto A tenga *densidad positiva* en $\{1,...,n\}$ en un sentido que precisaremos más adelante, el comportamiento de los puntos visibles dependerá de la aritmética de A. El siguiente resultado considera el caso de que A sea una *progresion aritmética*.

Theorem 1 *Sea A el conjunto de los enteros congruentes con $a \pmod q$ en $\{1,\ldots,n\}$. Si $(a,q)=1$ se tiene que*

$$|A/A| = \frac{n^2}{q^2}\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\sum_{\substack{1\le t\le q\\(t,q)=1}}\frac{1}{t^2} + O(n\log n),$$

donde el producto está extendido a todos los primos p que no dividen a q.

Se observa que para $q=1$ y debido a la identidad $\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{6}{\pi^2}$ recuperamos el resultado clásico sobre los puntos visibles desde el origen.

Ante esta situación, cabe preguntarse por el valor medio de $|A/A|$ entre todos los subconjuntos $A\subset\{1,\ldots,n\}$. No sólo hallamos ese valor medio, que vendrá expresado en términos de la función dilogaritmo ($\mathrm{Li}_2(z)=\sum_{k\ge1} z^k/k^2$) sino que demostramos que también es ése el *valor típico* de $|A/A|$.

Theorem 2

$$\frac{1}{2^n}\sum_{A\subset\{1,\dots,n\}}|A/A|\sim\frac{2}{\pi^2}n^2\mathrm{Li}_2(3/4).$$

Además $|A/A|\sim\frac{2}{\pi^2}n^2\mathrm{Li}_2(3/4)$ *para todos excepto para* $o(2^n)$ *de los subconjuntos* $A\subset\{1,\dots,n\}$.

Elegir un subconjunto $A\subset\{1,\dots,n\}$ con probabilidad uniforme entre todos los subconjuntos es equivalente a ir eligiendo cada entero de $\{1,\dots,n\}$ con probabilidad $1/2$ de manera independiente. Si en lugar de hacerlo con probabilidad $1/2$ se los elige con probabilidad α, el resultado anterior se generaliza de la siguiente manera.

Theorem 3 *En el espacio probabilístico definido por* $\mathbb{P}(x\in A)=\alpha$ *para* $x\in\{1,\dots,n\}$ *y donde todos los sucesos* $x\in A$ *son independientes, se tiene que*

$$\mathbb{E}(|A/A|)\sim\frac{6}{\pi^2}(n\alpha)^2\frac{\mathrm{Li}_2(1-\alpha^2)}{1-\alpha^2},$$

Además con probabilidad $1-o(1)$ *se tiene que*

$$|A/A|\sim\frac{6}{\pi^2}(n\alpha)^2\frac{\mathrm{Li}_2(1-\alpha^2)}{1-\alpha^2}.$$

Como en este espacio probabilístico el valor típico de $|A|$ es asintóticamente αn, el teorema anterior se puede interpretar como el valor típico de $|A/A|$ cuando $|A|\sim\alpha n$. Del Teorema 1 y el Teorema 3 se puede observar que las progresiones aritméticas son *atípicas* para este problema entre todos los subconjuntos del mismo tamaño.

Por último, propondremos y analizaremos varias generalizaciones del problema en un contexto multidimensional. En particular, estudiaremos el número esperado de puntos visibles desde el origen en un espacio probabilizado $d-$dimensional, y veremos que esto proporciona una manera natural de introducir las funciones polilogaritmo.

Theorem 4 *El número de puntos visibles de* $A_1\times\cdots\times A_d$ *desde el origen con* $A_j\subset\{1,\dots,n\}$ *y* $|A_j|\sim\alpha_j n$ *se comporta asintóticamente como*

$$\frac{\prod_{i=1}^d(n\alpha_i)}{\zeta(d)}\frac{\mathrm{Li}_d(1-\alpha_1\cdots\alpha_d)}{1-\alpha_1\cdots\alpha_d},$$

donde $\mathrm{Li}_d(z)=\sum_{k\geq1}z^k/k^d$ *es el polilogaritmo de orden* d *y* $\zeta(d)=\mathrm{Li}_d(1)=\sum_{k\geq1}1/k^d$*. Además, con probabilidad* $1-o(1)$ *se tiene que*

$$|\mathrm{visibles}(A_1\times\cdots\times A_d)|\sim\frac{\prod_{i=1}^d(n\alpha_i)}{\zeta(d)}\frac{\mathrm{Li}_d(1-\alpha_1\cdots\alpha_d)}{1-\alpha_1\cdots\alpha_d}.$$

En este trabajo se utilizan herramientas combinatorias y probabilísticas junto con otras clásicas de teoría de números.